Université Nice Sophia Antipolis | Année 2018/2019
L3 M/MI/MA | Semestre 1

Algèbre et Géométrie
Partiel

Mercredi 28 novembre 2018, durée : 1 heure

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Les réponses doivent être justifiées. Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être modifié.

Exercice 1

1. (1 point) Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un espace $\mathbb{K}$-vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Donner la définition de l'orthogonale linéaire $F^\perp$ de F. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset G$. Que peut-on dire de $F^\perp$ et $G^\perp$?

2. (2 points) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Donner la définition d'un produit scalaire sur E.

Exercice 2

On considère les trois formes linéaires φ_1^*, φ_2^* et φ_3^* de $(\mathbb{R}^3)^*$ définies par:

$$\varphi_1^*(x) = 2x_1 + x_2 + x_3,\ \varphi_2^*(x) = -x_1 - x_3,\ \text{et } \varphi_3^*(x) = x_1 + 3x_3.$$

1. (1 point) Montrer que la famille $\mathcal{B}^* = (\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*)$ forme une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

2. (2 points) Déterminer la famille $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathcal{B}^*$ soit la base duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 3

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \big(P(t)Q(t) + P'(t)Q'(t)\big)\mathrm{d}t$.

1. (1 point) Montrer que $(E, \langle -, -\rangle)$ est un espace euclidien de dimension 3.

2. (2 points) En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à $(1, X, X^2)$, trouver une base orthonormée (L_0, L_1, L_2) de $(E, \langle -, -\rangle)$.

3. (1 point) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \big((P(t))^2 + (P'(t))^2\big)\mathrm{d}t$ en fonction des coefficients (a, b, c) du polynôme P défini par $P(X) = aL_0 + bL_1 + cL_2$.