Contrôle du 30 novembre 2017
Durée: 0h45. Tous documents interdits.

1. On considère la matrice symétrique réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.a. Indiquer une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

1.b. Déterminer la signature de la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2xy - 2yz$. Indication: on pourra relier la forme quadratique q à la matrice symétrique A.

1.c. Un vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est dit q-isotrope si $q(x, y, z) = 0$. Existe-t-il des vecteurs q-isotropes non nuls ? Si oui, en construire un. Indication: calculer la valeur de la forme quadratique q en les vecteurs-colonnes de P.

2. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. On munit E de la forme bilinéaire symétrique

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

2.a. Montrer que $< -, - >$ est définie positive. On notera $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$ la norme associée, et f^n la fonction définie par $f^n(t) = f(t)^n$ pour $t \in [0, 1]$.

Pour $f \in E$ non nulle, on pose $I_n(f) = \|f^n\|$ et $u_n(f) = \frac{I_n(f)}{I_{n+1}(f)}$.

2.b. Montrer l'inégalité $(I_{n+1}(f))^2 \leq I_n(f)I_{n+2}(f)$. Indication: on pourra se servir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. En déduire que la suite $(u_n(f))_{n\geq 0}$ converge. Calculer $\lim_{n\to\infty} u_n(f)$ pour la fonction $f(t) = t$.

2.c. Déterminer une base orthonormée du sous-espace euclidien E_{aff} de E formé par les fonctions affines $f(t) = a + bt$.

Barème indicatif: (2.5 + 1 + 1.5) + (1 + 2 + 2) = 10 pts