Contrôle du 1 décembre 2016
Durée: 0h45. Tous documents interdits.

1. On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1.a. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée par des vecteurs propres de A.

1.b. Indiquer une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

1.c. Indiquer une forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $q(v) = {}^tvAv$. Quelle est la signature de q ?

2. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_{\leq 2}[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2, muni de la forme bilinéaire symétrique

$$< P(X), Q(X) >= \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt.$$

2.a. Montrer que $(E, <-,->)$ est un espace euclidien de dimension 3.

2.b. Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in E$. Montrer que $< 1, P(X) >= 0$ si et seulement si $a + \frac{c}{3} = 0$. Montrer que $< X, P(X) >= 0$ si et seulement si $b = 0$. Montrer enfin que $< X^2, P(X) >= 0$ si et seulement si $\frac{a}{3} + \frac{c}{5} = 0$.

2.c. Déduire de **2.b.** une base orthonormée de $(E, <-,->)$.

Barème indicatif: 5 + 5