Contrôle du 10 octobre 2019
Durée: 0h45. Tous documents interdits.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1.a. Calculer le polynôme caractéristique $p_A(X)$ de A. En déduire que A possède deux valeurs propres réelles que l'on notera $\lambda < \mu$.

1.b. Calculer les espaces propres E_λ et E_μ associés.

1.c. La matrice A est-elle diagonalisable, trigonalisable sur $\mathbb{R}$? Justifier votre réponse.

1.d. Calculer les matrices $A - \lambda I_3$ et $(A - \lambda I_3)^2$. En déduire que le sous-espace caractéristique $E(\lambda)$ est de dimension 2. Décrire $E(\lambda)$ comme solution d'une equation linéaire.

1.e. Soit $v \in E_\lambda$ un vecteur propre. Trouver un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $v = Aw - \lambda w$. Vérifier que $w \in E(\lambda)$.

1.f. Déduire de ce qui précède une matrice de changement de base $P \in Gl_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice $J \in M_3(\mathbb{R})$ n'ayant que 4 coefficients non nuls.

1.g. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire une formule pour A^n, $n \in \mathbb{N}$.

BARÈME INDICATIF: 2.0+1.5+1.0+1.5+1.5+1.0+1.5 = 10 PTS