Relaxation cinétique vers les lois de conservation scalaire

Thomas Migliore

24 octobre 2006

Mémoire de Master II de Mathématiques

Directeur de stage : F. Berthelin [1]

Année 2005-2006

[1]Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, UMR 6621 CNRS, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc valrose, 06108 Nice Cedex 02 - bertheli@math.unice.fr

Remerciements

Je remercie F. Berthelin de m'avoir dirigé au cours de ce premier travail de recherches. D'un caractère toujours agréable, il a manifesté à mon égard une grande disponibilité durant ce stage, témoignant beaucoup de patience et faisant preuve de pédagogie. Sa culture et son recul sur les mathématiques m'ont été très précieux pour la rédaction de ce mémoire.

Je remercie également J. Blum et P.E. Jabin d'assister à mon oral de soutenance.

Je tiens également à témoigner ma reconnaissance à mon ami Michel Raibaut pour ses remarques qui ont été très constructives et ont contribué sans nul doute à l'amélioration de ce papier.

Table des matières

1 Introduction

Dans ce mémoire, on étudie la relaxation du modèle cinétique BGK impliquant un terme en champ fort dans l'opérateur de transport. Ceci nous menera aux lois de conservation scalaire avec un flux perturbé par rapport aux relaxations classiques. On verra alors apparaître une Maxwellienne modifiée. Ce travail suit l'article [1] en rajoutant un terme source dans l'équation cinétique ce qui rajoute un terme source modifié dans la loi scalaire obtenue.
L'intérêt d'utiliser une méthode de relaxation est de faire disparaître le terme non linéaire dans la partie dérivée du modèle. On peut le voir sur le cas "académique" de relaxation où le système

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v &= 0 \\ \partial_t v + \lambda \partial_x u &= \frac{F(u)-v}{\varepsilon} \end{cases}$$

va approcher $\partial_t u + \partial_x F(u) = 0$ car à la limite ($\varepsilon \to 0$) $F(u) = v$. Le terme non linéaire $\partial_x F(u)$ devient dans le système $\frac{F(u)-v}{\varepsilon}$. Pour des généralités sur l'étude mathématique des problèmes de relaxation hyperbolique, on peut citer par exemple [9], [10] et [16].
Hilbert, dans son sixième problème intitulé "Traitement mathématique des axiomes de physique" (voir en annexe), suggérait déjà, en citant notamment les travaux de *Boltzmann*, le besoin de développer mathématiquement de tels processus limites. L'effet de la relaxation est en effet important dans de nombreuses situations physiques comme la théorie cinétique des gaz, la viscoélasticité avec perte de mémoire, l'étude des flux de gaz près de l'équilibre thermodynamique, ...
On doit également citer *Perthame* et *Tadmor* [12] qui ont traité le cas où la force F (définie ci-dessous) est nulle.

Le modèle BGK étudié est le suivant

$$\partial_t f_\varepsilon + \mathrm{div}(a(x,v) f_\varepsilon) + \frac{F}{\varepsilon}\partial_v f_\varepsilon = \frac{\chi_\rho - f_\varepsilon}{\varepsilon} + R(t,x,v) f_\varepsilon, \quad (t,x,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

où χ est la Maxwellienne classique pour les lois de conservation scalaire

$$\chi_\rho(v) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\rho) & \text{si } (\rho - v)v \geq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la densité

$$\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)\, dv.$$

La fonction sgn est défini comme d'habitude $\mathrm{sgn}(u) = 1$ pour $u > 0$, $\mathrm{sgn}(u) = -1$ pour $u < 0$ et $\mathrm{sgn}(u) = 0$ pour $u = 0$. Le champ de vitesse $a : \mathbb{R}^D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^D$ et la force $F \in \mathbb{R}$ sont donnés, $\varepsilon \in]0, +\infty[$. On notera f_ε pour $f_\varepsilon(t,x,v) \in \mathbb{R}$.

Le point important est que le terme F/ε dans (1.1) modifie la limite hydrodynamique obtenue. En effet, dans le cas avec une force $F = 0$, la limite obtenue est

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}_x\, A(x,\rho) = 0, \qquad A(x,\rho) = \int_0^\rho a(x,u)\, du \tag{1.2}$$

où

$$\mathrm{div}_x\, A(x,\rho) = \sum_{i=1}^{D} \partial_{x_i} A_i(x,\rho),$$

alors que dans le cas où $F \neq 0$, nous obtenons

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}_x\, B(x,\rho) = T(t,x,\rho), \tag{1.3}$$

avec

$$B(x,\rho) = \int_0^\rho \int_0^\infty a(x, v+Fu) e^{-u}\, dv\, du, \tag{1.4}$$

$$T(t,x,\rho) = \int_0^\rho \int_0^\infty R(t,x,v+Fu) e^{-u}\, dv\, du. \tag{1.5}$$

Dans la suite, on notera $C_b^1(\Omega)$ l'ensemble des fonctions réelles continues et bornées une fois différentiable sur Ω ainsi que leurs dérivées premières. Cet espace sera munit de la norme $\|f\|_{C_b^1(\Omega)} = \sup_\Omega |f(x)| + \sup_\Omega |\partial f(x)|$. On définit $C_b^{2,1}(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D)$ comme l'espace des fonctions continues bornées qui sont deux fois continument différentiable par rapport à x et une fois par rapport à v avec dérivées bornées. L'espace des mesures bornées sur Ω sera noté $\mathcal{M}_1(\Omega)$. L'ensemble $BV(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions intégrables dont les dérivées distribution appartiennent à $\mathcal{M}_1(\Omega)$. L'ensemble $W^{1,p}(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev usuel.

Le principal résultat de ce mémoire est le suivant

Théorème 1.1 *Soient $f_I \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^D)$, $F \in \mathbb{R}$, $a \in C_b^{2,1}(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$ et $R(t,x,.) \in L^\infty(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}; C_b^1(\mathbb{R}))$ vérifiant $R(t,x,0) = 0$. Alors $\rho_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon\, dv$, où f_ε est la solution du modèle BGK (1.1) avec la donnée initiale $f_\varepsilon(0,x,v) = f_I$, converge vers ρ dans $L^1([0,T] \times K)$ pour $T > 0$ et tout ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^D$. La limite ρ est une solution faible de*

$$\partial_t \rho(t,x) + div_x B(x,\rho) = T(t,x,\rho), \qquad \rho(0) = \rho_I = \int_{\mathbb{R}} f_I\, dv, \tag{1.6}$$

avec B donnée par (1.4) et T par (1.5). La fonction distribution $f_\varepsilon \to M_\rho$ dans $L^1([0,T] \times K \times \mathbb{R})$.
De plus, on a les relations entropiques de Kružkov :

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{R}, \quad \partial_t |\rho - k| \; &+ \; div_x((B(x,\rho) - B(x,k))\, sgn(\rho - k)) + (div_x B)(x,k)\, sgn(\rho - k)) \\ &\leq \; (T(t,x,\rho) - T(t,x,k))\, sgn(\rho - k). \end{aligned} \tag{1.7}$$

2 Existence de la solution cinétique

Dans cette section, on montre qu'il existe des solutions à l'équation cinétique (1.1) avec la possibilité que $F(x) = F$. Tout d'abord, on remarque que la Maxwellienne vérifie

$$\forall k, k' \in \mathbb{R}, \quad \int_{\mathbb{R}} \chi_k(v)\, dv = k, \tag{2.1}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_k(v) - \chi_{k'}(v)|\, dv = |k - k'|, \tag{2.2}$$

$$\forall B \in C^1(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \chi_k(v) B'(v)\, dv = B(k) - B(0). \tag{2.3}$$

Théorème 2.1 *Pour* $a \in C_b^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$, $F \in C_b^1(\mathbb{R}^D)$ *et* $R(t,x,.) \in L^\infty(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}; C_b^1(\mathbb{R}))$ *vérifiant* $R(t,x,0) = 0$, *l'équation cinétique (1.1) avec la condition initiale* $f(0) = f_I \in L^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$ *est bien posé dans* $L^\infty([0,T]; L^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}))$.

Preuve
On va ramener le problème d'existence de la solution cinétique à un problème de point fixe. Pour cela, on réécrit (1.1) sous la forme

$$\partial_t f + \mathrm{div}_{x,v}\left[\Big(a(x,v), \frac{F(x)}{\varepsilon}\Big).f\right] = \frac{\chi_\rho - f}{\varepsilon} + R(t,x,v).f. \tag{2.4}$$

Ainsi, on est en mesure d'introduire les caractéristiques associées à (2.4) (cf. [2])

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{ds}(s,x,v) & = & a(X(s,x,v), V(s,x,v)), \\ \dfrac{dV}{ds}(s,x,v) & = & \dfrac{F(X(s,x,v))}{\varepsilon}, \\ X(t,x,v) = x & , & V(t,x,v) = v, \end{cases}$$

ainsi que le jacobien du changement de variables $(x,v) \longmapsto (X(s,x,v), V(s,x,v))$ donné par $J(s,x,v) > 0$ et vérifiant

$$\begin{cases} \dfrac{dJ}{ds}(s,x,v) & = & J(s,x,v)\ \mathrm{div}_x\ a(X(s,x,v), V(s,x,v)), \\ J(t,x,v) & = & 1. \end{cases}$$

On voit que :

$$J(0,x,v) = \exp\Big(-\int_0^t \mathrm{div}_x\ a(X(s,x,v), V(s,x,v))ds\Big). \tag{2.5}$$

L'équation (1.1) multipliée par $J(s, X(s), V(s))$ se réécrit donc sous la forme

$$\frac{d}{ds}[f(s,X(s),V(s))J(s,X(s),V(s))] + (\frac{1}{\varepsilon} - R(s,X(s),V(s)))f(s,X(s),V(s))J(s,X(s),V(s))$$
$$= \frac{\chi_\rho}{\varepsilon}(s,X(s),V(s))J(s,X(s),V(s)).$$

On cherche alors une fonction $G(s)$ tq

$$\frac{d}{ds}\left[f(s,X(s),V(s))J(s,X(s),V(s))e^{G(s)}\right] = \frac{\chi_\rho}{\varepsilon}(s,X(s),V(s))J(s,X(s),V(s))e^{G(s)}$$

avec $G(0) = 0$, *i.e.*

$$\begin{aligned} G'(s) &= \frac{1}{\varepsilon} - R(s,X(s),V(s)) \\ G(t) &= G(0) + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} - R(s,X(s),V(s))ds \\ &= \frac{t}{\varepsilon} - \int_0^t R(s,X(s),V(s))ds. \end{aligned}$$

D'où

$$f(t,X(t),V(t))e^{G(t)} = f(0,X(0),V(0))J(0,X(0),V(0)) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_\rho(\tau,X(\tau),V(\tau))J(\tau,X(\tau),V(\tau))e^{G(\tau)}d\tau$$

$$f(t,x,v) = f(0,X(0),V(0))J(0,X(0),V(0))e^{-G(t)}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_\rho(\tau,X(\tau),V(\tau))J(\tau,X(\tau),V(\tau))e^{G(\tau)-G(t)}d\tau.$$

On va montrer que la solution f de (1.1) peut être obtenu comme limite de la suite

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= f(0)\\
\rho_n(t) &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t)dv\\
f_{n+1}(t) &= f(0,X(0),V(0))J(0,X(0),V(0))e^{-G(t)}\\
&\quad +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_{\rho_n}(\tau,X(\tau),V(\tau))J(\tau,X(\tau),V(\tau))e^{(G(\tau)-G(t))}d\tau.
\end{aligned}$$

Pour cela, on va prouver que l'application

$$\begin{aligned}
\Phi(f) &= f(0,X(0),V(0))J(0,X(0),V(0))e^{-G(t)}\\
&\quad +\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \chi_{\rho}(\tau,X(\tau),V(\tau))J(\tau,X(\tau),V(\tau))e^{(G(\tau)-G(t))}d\tau
\end{aligned} \tag{2.6}$$

est lipschitzienne. En fait, nous allons voir que c'est insuffisant à cause du terme source. On aura donc besoin de montrer qu'une itérée de Φ est contractante.

Prenons deux solutions de (1.1), notées f et g avec $f(0) = g(0) = f_I$, de densités $\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)dv$ et $\phi(t,x) = \int_{\mathbb{R}} g(t,x,v)dv$ respectivement, on va estimer $\|\Phi(f(t,x,v)) - \Phi(g(t,x,v))\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})}$.

On pose $\|R\|_\infty = \sup\limits_{(t,x)}\|R(t,x,.)\|_{C_b^1(\mathbb{R})}$ (ce qui est légitime car $R(t,x,.) \in L^\infty(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R};C_b^1(\mathbb{R}))$).
Cette notation sera ensuite utilisée dans tout le mémoire. On a alors

$$\begin{aligned}
\|\Phi(f(t,x,v)) - \Phi(g(t,x,v))\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} \;\leq\; & \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|\chi_\rho(\tau,X(\tau),V(\tau)) - \chi_\phi(\tau,X(\tau),V(\tau))\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})}\\
& J(\tau,X(\tau),V(\tau))e^{(G(\tau)-G(t))}d\tau.
\end{aligned}$$

A τ fixé, on fait le changement de variable $(X(\tau,x,v),V(\tau,x,v)) \longmapsto (x,v)$ dans l'intégrale sur $\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}$. Le jacobien de cette transformation vaut $J(\tau,x,v)^{-1}$ et $G(\tau)-G(t) = \frac{\tau-t}{\varepsilon} - \int_t^\tau R(s,X(s),V(s))ds$ devient $G(\tau)-G(t) = \frac{\tau-t}{\varepsilon} - \int_t^\tau R(s,x,v)ds$.
D'après (2.2) $\int_{\mathbb{R}} |\chi_\rho(v) - \chi_\phi(v)|dv = |\rho-\phi|$. On en déduit que $\|\chi_\rho(v)-\chi_\phi(v)\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} = \|f(\tau,x,v) - g(\tau,x,v)\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})}$. L'inégalité précédente s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(f(t,x,v)) - \Phi(g(t,x,v))\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})}\\
\leq\;& \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|\chi_\rho(t_1,x,v) - \chi_\phi(t_1,x,v)\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})}e^{\frac{t_1-t}{\varepsilon}-\int_t^{t_1}R(s,x,v)ds}\,dt_1.
\end{aligned}$$

On pose $\alpha = \frac{1}{\varepsilon} - \|R\|_\infty$ et on choisit $0 < \varepsilon < \frac{1}{\|R\|_\infty}$ de telle sorte que $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(f(t,x,v)) - \Phi(g(t,x,v))\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} \\
\leq\ & \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|f(t_1,x,v) - g(t_1,x,v)\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} e^{\frac{t_1-t}{\varepsilon} - \int_t^{t_1} R(s,x,v)ds}\ dt_1.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(f(t,x,v)) - \Phi(g(t,x,v))\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}))} \\
\leq\ & \frac{1}{\varepsilon}\|f-g\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}))} \int_0^T e^{\frac{t_1-t}{\varepsilon}+t\|R\|_\infty}\ dt_1 \\
\leq\ & e^{T\|R\|_\infty}\|f-g\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}))}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T e^{\frac{t_1-t}{\varepsilon}}\ dt_1 \\
\leq\ & e^{T\|R\|_\infty}\|f-g\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}))}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Pour avoir une application contractante, on calcule la p-ième itérée de Φ, *i.e.* $\Phi^p = \Phi \circ \Phi \circ \cdots \circ \Phi$, ce qui donnera l'existence d'un point fixe (à savoir f avec la donnée initiale $f(0) = f_I$) dans $L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}))$ et la convergence de $(f_n)_{n\geq 0}$ vers f sur tous les intervalles $[0,T]$ avec $T > 0$ par le théorème du point fixe de Picard.
On a

$$\begin{aligned}
&\|\Phi^2(f(t,x,v)) - \Phi^2(g(t,x,v))\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} \\
\leq\ & \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|\chi_{\rho_{\Phi(f)}}(t_1,x,v) - \chi_{\phi_{\Phi(g)}}(t_1,x,v)\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} e^{\frac{t_1-t}{\varepsilon} - \int_t^{t_1} R(s,x,v)ds}\ dt_1 \\
\leq\ & \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|\chi_{\rho_{\Phi(f)}}(t_1,x,v) - \chi_{\phi_{\Phi(g)}}(t_1,x,v)\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} e^{\frac{t_1-t}{\varepsilon} + \int_{t_1}^{t} \|R\|_\infty ds}\ dt_1 \\
\leq\ & \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|\Phi(f(t,x,v)) - \Phi(g(t,x,v))\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} e^{\frac{t_1-t}{\varepsilon} + \int_{t_1}^{t} \|R\|_\infty ds}\ dt_1.
\end{aligned}$$

D'où par (2.7) :

$$\begin{aligned}
&\|\Phi^2(f(t,x,v)) - \Phi^2(g(t,x,v))\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} \\
\leq\ & \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t\int_0^{t_1} \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})}(t_2,x,v) e^{\frac{t_2-t}{\varepsilon} + \int_{t_2}^{t} \|R\|_\infty ds} dt_2\ dt_1
\end{aligned}$$

Par récurrence, on arrive à :

$$\begin{aligned}
&\|\Phi^p(f) - \Phi^p(g)\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} \\
\leq\ & \frac{1}{\varepsilon^p}\int_0^t\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{p-1}} \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})}(t_p,x,v) e^{\frac{t_p-t}{\varepsilon} + \int_{t_p}^{t} \|R\|_\infty ds}\ dt_p\dots dt_1
\end{aligned}$$

et donc à

$$\begin{aligned}
&\|\Phi^p(f) - \Phi^p(g)\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}))} \\
\leq\ & \Big(\frac{1}{\varepsilon^p}\int_0^t\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{p-1}} e^{\frac{t_p-t}{\varepsilon} + \int_{t_p}^{t} \|R\|_\infty ds}\ dt_p\dots dt_1\Big)\|f-g\|_{L^\infty([0,T])}.
\end{aligned}$$

Il reste à calculer $C_p(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{p-1}} e^{(t_p - t)(\|R\|_\infty - \frac{1}{\varepsilon})}\, dt_p \dots dt_1$.

On commence par calculer $\int_0^{t_{p-1}} e^{-\alpha(t-t_p)} dt_p = \frac{1}{\alpha}(e^{-\alpha(t-t_{p-1})} - e^{-\alpha t})$.
Ensuite $\int_0^{t_{p-2}} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}(e^{\alpha t_{p-1}} - 1) dt_{p-1} = \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t_{p-2}} - \frac{1}{\alpha} - t_{p-2})$
$\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \int_0^{t_{p-3}} (\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t_{p-2}} - \frac{1}{\alpha} - t_{p-2}) dt_{p-2} = \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}(\frac{1}{\alpha^2}(e^{\alpha t_{p-3}} - 1) - \frac{t_{p-3}}{\alpha} - \frac{t_{p-3}^2}{2}), \cdots$

Ainsi par récurrence, on arrive à
$C_p(t) = \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}[\frac{1}{\alpha^{p-1}}(e^{\alpha t} - 1) - \frac{t}{\alpha^{p-2}} - \frac{t^2}{2\alpha^{p-3}} - \frac{t^3}{3!\alpha^{p-3}} - \dots - \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}]$.

D'où $\|\Phi^p(f(t,x,v)) - \Phi^p(g(t,x,v))\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}))} \le \sup_{t \in [0,T]} C_p(t) \|f - g\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}))}$.

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $e^{\alpha t}$:
$e^{\alpha t} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{t^k \alpha^k}{k!} + \frac{1}{(p-1)!} \int_0^t (t-u)^{p-1} \alpha^p e^{\alpha u} du$,
$\frac{1}{\alpha^{p-1}}(e^{\alpha t} - 1) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t^k}{\alpha^{p-1-k} k!} + \frac{\alpha}{(p-1)!} \int_0^t (t-u)^{p-1} e^{\alpha u} du$.
Ainsi $C_p(t) = \frac{\alpha}{(p-1)!} \int_0^t (t-u)^{p-1} e^{\alpha u} du$ et

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0,T]} C_p(t) &\le \frac{\alpha}{(p-1)!} \int_0^T T^{p-1} e^{\alpha T} du \\ &\le \frac{\alpha}{(p-1)!} T^p e^{\alpha T}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\|\Phi^p(f) - \Phi^p(g)\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}))} \le \frac{\alpha}{(p-1)!} T^p e^{\alpha T} \|f - g\|_{L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}))} \tag{2.9}$$

pour ε assez petit ($0 < \varepsilon < \frac{1}{\|R\|_\infty}$).

Comme $\frac{\alpha}{(p-1)!} T^p e^{\alpha T} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, pour p assez grand, Φ^p est contractante. Elle admet donc un unique point fixe f mais comme $\Phi^p(\Phi(f)) = \Phi(\Phi^p(f)) = \Phi(f)$ et $\Phi(f)$ est aussi un point fixe de Φ^p. D'où $\Phi(f) = f$ par unicité et f est point fixe de Φ. Inversement, tout point fixe de Φ l'est aussi de Φ^p. Le f obtenu est donc bien l'unique point fixe de Φ.

On vient de montrer que la suite $(f_{n+1}^{p+1})_n$, qui est la (p+1)-ième itérée de $(f_{n+1})_n$, est contractante de rapport $\frac{\alpha}{(p-1)!} T^p e^{\alpha T}$ et que les suites $(f_{n+1})_n$ et $(f_{n+1}^{p+1})_n$ ont même point fixe, à savoir f. Elles convergent donc vers ce point fixe dans $L^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$. De plus, grâce à (2.9), on a unicité de la solution cinétique.

□

3 Relaxation formelle et Maxwellienne modifiée

Dans cette section, on calcule formellement la limite de (1.1) quand $\varepsilon \to 0$ et on traite également le cas où $F(x) = F$. On va voir que la force F, quand celle-ci est non nulle,

modifie l'équilibre cinétique c'est-à-dire la Maxwellienne. En conséquence, la limite de la loi de conservation est elle aussi modifiée.
La preuve rigoureuse de cette dérivation formelle sera faite dans la section 5.

3.1 Limite formelle

Tout d'abord, on fait tendre $\varepsilon \to 0$ dans l'équation (1.1), ce qui donne formellement

$$F(x)\partial_v f = \chi_\rho - f. \tag{3.1}$$

Ensuite, une intégration par rapport à v dans (1.1) donne

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} f\, dv + \mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}} a(x,v) f\, dv = \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) f\, dv. \tag{3.2}$$

Il reste maintenant à calculer le flux $\int_{\mathbb{R}} a(x,v) f\, dv$ et le terme source $\int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) f\, dv$ en terme de densité $\rho = \int_{\mathbb{R}} f\, dv$.
On mutiplie (3.1) par une fonction $b(x,v) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$ et on intègre en v, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} b(x,v) F(x) \partial_v f\, dv &= \int_{\mathbb{R}} (\chi_\rho - f) b(x,v)\, dv \\ &= B(x,\rho) - \int_{\mathbb{R}} f b(x,v)\, dv \end{aligned} \tag{3.3}$$

où on a posé

$$B(x,v) = \int_0^v b(x,u)\, du. \tag{3.4}$$

Il est à noter que la dernière égalité provient de (2.3). Après une intégration par parties, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} \left(b(x,v) - F\partial_v b(x,v)\right) f\, dv = B(x,\rho). \tag{3.5}$$

Il reste à calculer la solution de l'équation

$$b(x,v) - F(x)\partial_v b(x,v) = a(x,v).$$

Comme b est bornée, il vient

$$b(x,v) = \begin{cases} \displaystyle\int_v^{+\infty} \frac{a(x,u)}{F(x)} e^{\frac{v-u}{F(x)}}\, du & \text{si} \quad F(x) > 0 \\ a(x,v) & \text{si} \quad F(x) = 0 \\ \displaystyle -\int_{-\infty}^v \frac{a(x,u)}{F(x)} e^{\frac{v-u}{F(x)}}\, du & \text{si} \quad F(x) < 0 \end{cases}$$

En utilisant le changement de variables $u \to uF + v$, on obtient

$$b(x,v) = \int_0^{+\infty} a(x, v + uF(x))e^{-u}\, du. \tag{3.6}$$

De la formule (3.4), on en déduit que B est donné par (1.4). Si maitenant on reporte la fonction b dans (3.5), on a

$$B(x,\rho(t,x)) = \int_{\mathbb{R}} a(x,v)f(t,x,v)\, dv.$$

On procède de même pour calculer le terme $\int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)f(t,x,v)$ en fonction de ρ.
On mutiplie (3.1) par une fonction $P(t,x,v) \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$ et on intègre en v, ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} P(t,x,v)F(x)\partial_v f\, dv &= \int_{\mathbb{R}} (\chi_\rho - f)P(t,x,v)\, dv \\ &= T(t,x,\rho) - \int_{\mathbb{R}} fP(t,x,v)\, dv \end{aligned} \tag{3.7}$$

où on a posé

$$T(t,x,\rho) = \int_0^{\rho} P(t,x,v)\, dv. \tag{3.8}$$

En effectuant les mêmes calculs que ci-dessus, on en déduit tout d'abord que

$$P(t,x,v) = \int_0^{+\infty} R(t,x,v + F(x)u)e^{-u}\, du \tag{3.9}$$

et donc que

$$T(t,x,\rho(t,x)) = \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)f(t,x,v)\, dv.$$

Ainsi (3.2) devient

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}_x B(x,\rho) = T(t,x,\rho) \tag{3.10}$$

où $T(t,x,\rho)$ est donné par (1.5).
On se rend compte que le champ fort a un impact sur l'équation scalaire obtenue puisque le flux A qu'on obtient classiquement est

$$A(x,\rho(t,x)) = \int_0^{\rho(t,x)} a(x,u)\, du$$

au lieu de B donné par (1.4).

3.2 Maxwellienne modifiée

L'équation (3.1) montre que f_ε ne peut pas converger vers χ_ρ mais vers une Maxwellienne modifiée. Dans cette section, on calcule cette Maxwellienne modifiée M_ρ qui sera utilisée tout au long du mémoire.
La Maxwellienne $M_k(v)$ doit satisfaire

$$F\partial_v M_k(v) + M_k(v) = \chi_k, \tag{3.11}$$

avec

$$\int_{\mathbb{R}} M_k(v)dv = k. \tag{3.12}$$

En faisant le même calcul que ci-dessus, on obtient

$$M_k(v) = \int_0^{+\infty} \chi_k(v - Fu)e^{-u}du. \tag{3.13}$$

Grâce à la formule ci-dessus, il est facile de vérifier (3.12) en utilisant (2.1) et le théorème de Fubini . Avec (2.2), on voit que la Maxwellienne modifiée vérifie pour tout $k, k' \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sgn}(M_k(v) - M_{k'}(v)) = \operatorname{sgn}(k - k'), \tag{3.14}$$

$$\int_{\mathbb{R}} |M_k(v) - M_{k'}(v)|dv = |k - k'|, \tag{3.15}$$

$$\int_{\mathbb{R}} a(x,v)M_k(v)dv = \int_{\mathbb{R}} b(x,v)\chi_k(v)dv = B(x,k). \tag{3.16}$$

4 Equations de transport et entropies de Kružkov

On commence par montrer un résultat général sur les équations de transport et on obtient ensuite un résultat entropique.

Lemme 4.1 *Soit $c \in (W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^D))^D$ un champ de vecteurs, $u \in L^1([0,T]; L^q_{loc}(\mathbb{R}^D))$ une fonction réelle avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $S \in L^1([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^D))$, $\tilde{R} \in \mathcal{M}([0,T] \times \mathbb{R}^D)$ des termes sources qui satisfont*

$$\partial_t u(t,y) + div_y(cu)(t,y) = S(t,y) + \tilde{R}(t,y), \qquad sur\ [0,T] \times \mathbb{R}^D$$

au sens des distributions.
Si $\tilde{R} = 0$, alors pour toute fonction réelle $G \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaisant $G' \in L^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\partial_t G(u) + div_y(c\, G(u)) - div_y(c)(G(u) - G'(u)u) - SG'(u) = 0, \qquad sur\ [0,T] \times \mathbb{R}^D$$

au sens des distributions. De plus, l'ensemble $\{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^D / \ u(t,x) = 0,\ S(t,x) \neq 0\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue et

$$\partial_t |u| + div_y(c|u|) = S\ sgn(u), \qquad sur\ [0,T] \times \mathbb{R}^D$$

au sens des distributions.
Si $\tilde{R} \neq 0$, alors pour toute fonction réelle $G \in C^1(\mathbb{R})$ satisfaisant $G' \in L^\infty(\mathbb{R})$, on a toujours

$$\partial_t G(u) + div_y(c\, G(u)) - div_y(c)(G(u) - G'(u)u) - SG'(u) \leq \|G\|_\infty |\tilde{R}|, \qquad sur\ [0,T] \times \mathbb{R}^D$$

ainsi que

$$\partial_t |u| + div_y(c|u|) - S\ sgn(u) \leq |\tilde{R}|, \qquad sur\ [0,T] \times \mathbb{R}^D$$

au sens des distributions.

Preuve
On va tout d'abord prouver que si on vérifie les hypothèses du lemme alors on a pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^D$

$$r^\delta = \mathrm{div}_y(cu) *_y \eta^\delta - \mathrm{div}_y(c(u *_y \eta^\delta)) \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } L^1([0,T] \times K)$$

où η^δ est une approximation de l'unité définie par

$$\eta^\delta(y) = \eta(y/\delta)/\delta^D,\ \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^D),\ \int_{\mathbb{R}^D} \eta(y)dy = 1,\ \eta \text{ pair.}$$

On réécrit r^δ sous la forme

$$\begin{aligned}
r^\delta &= (u\, \mathrm{div}_y(c) + c.\nabla u) *_y \eta^\delta - \mathrm{div}_y(c)(u *_y \eta^\delta) + c.\nabla(u *_y \eta^\delta) \\
r^\delta &= \mathrm{div}_y(c) u^\delta + (c.\nabla u) *_y \eta^\delta - \mathrm{div}_y(c) u^\delta - c.\nabla u^\delta \\
r^\delta &= (c.\nabla u) *_y \eta^\delta - c.\nabla u^\delta
\end{aligned}$$

où on a posé $u^\delta = u *_y \eta^\delta$.

Pour continuer, on a besoin du lemme ci-dessous qui est dû à DiPerna-Lions [4].

Lemme 4.2 *Soit $c \in (W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^D))^D$ un champ de vecteurs, $u \in L^1([0,T]; L^q_{loc}(\mathbb{R}^D))$ une fonction réelle avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors*

$$(c.\nabla u) *_y \eta^\delta - c.\nabla(u *_y \eta^\delta) \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad dans\ L^1([0,T] \times K)$$

pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^D$.

Preuve
On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}
(c.\nabla u) *_y \eta^\delta - c.\nabla(u *_y \eta^\delta) &= -\int_{\mathbb{R}^D} u(y)[\mathrm{div}_y(c(y)\eta^\delta(x-y)) + c(x).\nabla\eta^\delta(x-y)]\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^D} u(y)\{(c(y) - c(x)).\nabla\eta^\delta(x-y)\}\, dy - (u\, \mathrm{div}_y c) *_y \eta^\delta.
\end{aligned}$$

Le terme $u \operatorname{div}_y c$ est dans $L^1([0,T] \times K)$ donc $(u \operatorname{div}_y c) *_y \eta^\delta$ converge vers $u \operatorname{div}_y c$ quand δ vers 0 grâce aux résultats standards sur la convolution.
Maintenant, on va majorer le premier terme

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^D} u(y)\{(c(y) - c(x)).\nabla\eta^\delta(x-y)\}\, dy \right\|_{L^1(B_R)} \tag{4.1}$$

où B_R est la boule ouverte de rayon R et η est à support compact. Il existe donc $C \in \mathbb{R}^+$ tel que supp $\eta \subset [-C, C]$. On peut donc écrire en appliquant l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{\mathbb{R}^D} u(y)\{(c(y) - c(x)).\nabla\eta^\delta(x-y)\}\, dy \right\|_{L^1(B_R)} \\
= &\int_{B_R} \left| \int_{\mathbb{R}^D} u(y)\{(c(y) - c(x)).\nabla\eta^\delta(x-y)\}\, dy \right| dx \\
\leq &\left(\int_{B_{R+1}} dx \int_{|x-y|\leq C\delta} \left| \frac{c(y)-c(x)}{\delta} \right|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{B_R} \int_{|x-y|\leq C\delta} \left| u(y)\nabla\eta^\delta(x-y)\delta \right|^q dy\, dx \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

En remarquant que $|\delta.\nabla\eta^\delta(x-y)|^q = |(\nabla\eta^\delta)(x-y)|^q$

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{\mathbb{R}^D} u(y)\{(c(y) - c(x)).\nabla\eta^\delta(x-y)\}\, dy \right\|_{L^1(B_R)} \\
\leq &\left(\int_{B_{R+1}} dx \int_{|x-y|\leq C\delta} \left| \frac{c(y)-c(x)}{\delta} \right|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{|x-y|\leq C\delta} |u(y)|^q \left(\int_{B_R} |(\nabla\eta^\delta)(x-y)|^q\, dx \right) dy \right)^{1/q} \\
\leq &\left(\int_{B_{R+1}} dx \int_{|x-y|\leq C\delta} \left| \frac{c(y)-c(x)}{\delta} \right|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{|x-y|\leq C\delta} |u(y)|^q \left(\int_{|z|\leq C\delta} |(\nabla\eta)(z)|^q\, dz \right) dy \right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

η est C^∞ à support compact, il existe donc $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|(\nabla\eta)(z)| \leq M$. De plus, comme δ est petit, on peut le prendre tel que $\delta < \frac{1}{C}$. On arrive alors à

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_{\mathbb{R}^D} u(y)\{(c(y) - c(x)).\nabla\eta^\delta(x-y)\}\, dy \right\|_{L^1(B_R)} \\
\leq &\ A \left(\int_{B_{R+1}} dx \int_{|x-y|\leq C\delta} \left| \frac{c(y)-c(x)}{\delta} \right|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_{|x-y|\leq C} |u(y)|^q\, dy \right)^{1/q} \\
\leq &\ A \left(\int_{B_{R+1}} dx \int_{|x-y|\leq C\delta} \left| \frac{c(y)-c(x)}{\delta} \right|^p dy \right)^{1/p} \|u\|_{L^q(B_{R+1})}
\end{aligned}$$

avec $A \in \mathbb{R}^+$.
On s'occupe maintenant de l'autre terme

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B_{R+1}} dx \int_{|x-y|\le C\delta} \left|\frac{c(y)-c(x)}{\delta}\right|^p dy\right)^{1/p} &= \left(\int_{B_{R+1}} dx \int_{|z|\le C} |c(x+\delta z)-c(x)|^p dz\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{B_{R+1}} dx \int_{|z|\le C} dz \left|\int_0^1 \nabla c(x+t\delta z)\, dt\right|^p\right)^{1/p} \\
&\le \left(\int_{B_{R+1}} dx \int_{|z|\le C} dz \left(\int_0^1 |\nabla c(x+t\delta z)|\, dt\right)^p\right)^{1/p} \\
&\le 2\gamma\, \|\nabla c\|_{L^p(B_{R+1+C})}
\end{aligned}$$

avec $\gamma \in \mathbb{R}^+$.
Ensuite, on s'aperçoit qu'il est facile de prouver la convergence de (4.1) dans le cas où les fonctions sont régulières. Supposons donc qu'on a un champ de vecteurs $\tilde{c} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^D)$ et une fonction $\tilde{u} \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^D)$. Dans ce cas là, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^D} \tilde{u}(y)\{(\tilde{c}(y)-\tilde{c}(x))\}.\nabla\eta^\delta(x-y)\, dy \underset{\delta\to 0}{\to} -\tilde{u}(x)\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial_{x_i}}\tilde{c}_j(x)\int_{\mathbb{R}^D} z_i \frac{\partial}{\partial_{z_j}}\eta(z)\, dz \ \text{ dans } L^1(B_R).$$

Comme

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial_{x_i}}\tilde{c}_j(x)\int_{\mathbb{R}^D} z_i \frac{\partial}{\partial_{z_j}}\eta(z)\, dz = \operatorname{div}_y \tilde{c},$$

on vient de montrer le lemme dans le cas régulier, c'est-à-dire

$$\exists\, \delta_0 > 0 \text{ tq si } 0<\delta<\delta_0 \text{ alors } \left\|\int_{\mathbb{R}^D} \tilde{u}(y)(\tilde{c}(y)-\tilde{c}(x)).\nabla\eta^\delta\, dy - \tilde{u}\operatorname{div}_y \tilde{c}\right\|_{L^1(B_R)} \le \varepsilon.$$

Passons maintenant au cas général. On utilise deux théorèmes de densité :

$$\begin{aligned}
&\forall\varepsilon>0,\ \exists\, \tilde{c}\in C_c^\infty(\mathbb{R}^D) \ \text{ tel que } \ \|c-\tilde{c}\|_{W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^D)} \le \varepsilon, \\
&\forall\varepsilon>0,\ \exists\, \tilde{u}\in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^D) \ \text{ tel que } \ \|u-\tilde{u}\|_{L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^D)} \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Majorons $\| \int_{\mathbb{R}^D} u(y)(c(y)-c(x)).\nabla\eta^\delta\, dy - u\operatorname{div}_y c\|_{L^1(B_R)}$:

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_{\mathbb{R}^D} u(y)(c(y)-c(x)).\nabla\eta^\delta\, dy - u\operatorname{div}_y c\right\|_{L^1(B_R)} \\
\le\ &\left\|\int_{\mathbb{R}^D} (u(y)-\tilde{u}(y))(c(y)-c(x)).\nabla\eta^\delta\, dy\right\|_{L^1(B_R)} \\
&+\left\|\int_{\mathbb{R}^D} \tilde{u}(y)[(c(y)-\tilde{c}(y))-(c(x)-\tilde{c}(x))].\nabla\eta^\delta\, dy\right\|_{L^1(B_R)} \\
&+\left\|\int_{\mathbb{R}^D} \tilde{u}(y)(\tilde{c}(y)-\tilde{c}(x)).\nabla\eta^\delta\, dy - \tilde{u}\operatorname{div}_y \tilde{c}\right\|_{L^1(B_R)} \\
&+\|(u-\tilde{u})\operatorname{div}_y \tilde{c}\|_{L^1(B_R)} + \|u(\operatorname{div}_y c - \operatorname{div}_y \tilde{c})\|_{L^1(B_R)} \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Sur $W^{1,p}(B_R)$, on prend la norme $\|c\|_{W^{1,p}(B_R)} = \|c\|_{L^p(B_R)} + \sum_{i=1}^{N} \|\frac{\partial c}{\partial_{x_i}}\|_{L^p(B_R)}$ et on majore chaque terme de (4.2).

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\mathbb{R}^D} (u(y) - \tilde{u}(y))(c(y) - c(x)).\nabla\eta^\delta \, dy \right\|_{L^1(B_R)} &\leq 2A\gamma \, \|u - \tilde{u}\|_{L^q(B_{R+1})} \|\nabla c\|_{L^p(B_{R+1+C})} \\
&\leq 2A\gamma \, \varepsilon \|\nabla c\|_{L^p(B_{R+1+C})},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\mathbb{R}^D} \tilde{u}(y)[(c(y) - \tilde{c}(y)) - (c(x) - \tilde{c}(x))].\nabla\eta^\delta \, dy \right\|_{L^1(B_R)} &\leq 2A\gamma \, \|u\|_{L^q(B_{R+1})} \|\nabla(c - \tilde{c})\|_{L^p(B_{R+1+C})} \\
&\leq 2A\gamma \, \|u\|_{L^q(B_{R+1})} \|c - \tilde{c}\|_{W^{1,p}(B_{R+1+C})} \\
&\leq 2A\gamma \, \varepsilon \, \|u\|_{L^q(B_{R+1})},
\end{aligned}$$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^D} \tilde{u}(y)(\tilde{c}(y) - \tilde{c}(x)).\nabla\eta^\delta \, dy - \tilde{u} \, \mathrm{div}_y \, \tilde{c} \right\|_{L^1(B_R)} \leq \varepsilon,$$

$$\begin{aligned}
\|u \, \mathrm{div}_y \, c - \mathrm{div}_y \, \tilde{c})\|_{L^1(B_R)} &\leq \|u\|_{L^q(B_R)} \|(\mathrm{div}_y \, c - \mathrm{div}_y \, \tilde{c}\|_{L^p(B_R)} \\
&\leq \|u\|_{L^q(B_R)} \|c - \tilde{c}\|_{W^{1,p}(B_R)} \\
&\leq \varepsilon \, \|u\|_{L^q(B_R)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|(u - \tilde{u}) \, \mathrm{div}_y \, \tilde{c}\|_{L^1(B_R)} &\leq \|u - \tilde{u}\|_{L^q(B_R)} \|\mathrm{div}_y \, \tilde{c}\|_{L^p(B_R)} \\
&\leq \|u - \tilde{u}\|_{L^q(B_R)} \|\tilde{c}\|_{W^{1,p}(B_R)} \\
&\leq \varepsilon \, \|\tilde{c}\|_{C_c^\infty(B_R)},
\end{aligned}$$

En prenant $\tilde{\varepsilon} = \max(2A\gamma \, \varepsilon \|\nabla c\|_{L^p(B_{R+1+C})}, 2A\gamma \, \varepsilon \, \|u\|_{L^q(B_{R+1})}, \varepsilon, \varepsilon \, \|u\|_{L^q(B_R)}, \varepsilon \, \|\tilde{c}\|_{C_c^\infty(B_R)})$, on obtient

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^D} u(y)(c(y) - c(x)).\nabla\eta^\delta \, dy - u \, \mathrm{div}_y \, c \right\|_{L^1(B_R)} \leq 5 \, \tilde{\varepsilon}$$

pour $0 < \delta < \delta_0$.

$\square$

Le lemme intermédiaire étant démontré, on utilise maintenant la règle de dérivation composée (Proposition 6.1) pour $u^\delta = u *_y \eta^\delta$ qui satisfait

$$\partial_t u^\delta + \mathrm{div}_y(cu^\delta) = S *_y \eta^\delta + \tilde{R} *_y \eta^\delta - r^\delta.$$

Si $\tilde{R} = 0$, la première équation du lemme est obtenu en multipliant l'équation ci-dessus par $G'(u^\delta)$ et en faisant tendre δ vers 0.
Pour démontrer la deuxième équation, on multiplie la première équation du lemme par $G' = \mathrm{sgn}^\alpha$ et $G(\lambda) = |\lambda|_\alpha = \int_0^\lambda \mathrm{sgn}^\alpha(s) \, ds$ où sgn^α est une régularisation de la fonction sign. On impose que $\mathrm{sgn}^\alpha(0) = d \in [-1, 1]$ de telle sorte que $\mathrm{sgn}^\alpha \underset{\alpha\to 0}{\to} \mathrm{sgn}_d$ partout. La fonction sgn_0 est la fonction sgn habituelle.
De plus, on remarque que

$$G(\lambda) - \lambda G'(\lambda) = |\lambda|_\alpha - \lambda \mathrm{sgn}^\alpha(\lambda)$$

tend uniformément vers 0 quand $\alpha \to 0$.

Il reste à prouver que $\partial_t|u|_\alpha \underset{\alpha\to 0}{\to} \partial_t|u|$ au sens des distributions.
Soit $\varphi \in C_c^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})$, alors

$$
\begin{aligned}
| < \partial_t|u|_\alpha - \partial_t|u|, \varphi > | &= |- < |u|_\alpha - |u|, \partial_t\varphi > | \\
&= \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} (|u|_\alpha - |u|)\, \partial_t\varphi \; dt\; dx\; dv \right| \\
&= \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} \int_0^u [\mathrm{sgn}^\alpha(s) - \mathrm{sgn}_d(u)]\, \partial_t\varphi \; dt\; dx\; dv\; ds \right|.
\end{aligned}
$$

On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la fonction

$$
\begin{aligned}
F_\alpha &= \int_0^u [\mathrm{sgn}^\alpha(s) - \mathrm{sgn}_d(u)]\, \partial_t\varphi \; ds \\
&= u(\mathrm{sgn}^\alpha(u) - \mathrm{sgn}_d(u))\partial_t\varphi
\end{aligned}
$$

qui tend vers 0 partout quand $\alpha \to 0$ et qui est majorée par $2\; |\partial_t\varphi|\; u \in L^1([0,T]\times\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})$.
On en déduit que

$$
< \partial_t|u|_\alpha - \partial_t|u|, \varphi > \underset{\alpha\to 0}{\to} 0
$$

et que

$$
\partial_t|u|_\alpha + \mathrm{div}_y(c|u|_\alpha) - S\; \mathrm{sgn}_d(u) = 0 \underset{\alpha\to 0}{\to} \partial_t|u| + \mathrm{div}_y(c|u|) - S\; \mathrm{sgn}(u) = 0
$$

au sens des distributions.
Comme $S\;\mathrm{sgn}_d(u)$ définit la même distribution pour tout d, l'ensemble $\{u = 0, S \neq 0\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesque.

Si $\tilde{R} \neq 0$ alors on prend $\varphi \in C_c^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})$ et il vient

$$
\int_0^T \int_K \tilde{R} *_y \eta^\delta G'(u *_y \eta^\delta)\varphi(t,y)\; dt\; dy \leq \|G'\|_\infty \int_0^T \int_K \varphi(t,y) *_y \eta^\delta |\tilde{R}|\; dt\; dy
$$

Il reste à montrer que $< \tilde{R}, \varphi *_y \eta^\delta > \underset{\delta\to 0}{\to} < \tilde{R}, \varphi >$. On vérifie que $\varphi *_y \eta^\delta \underset{\delta\to 0}{\to} \varphi$ au sens des distributions *i.e.* $\partial^\alpha(\varphi *_y \eta^\delta) \underset{\delta\to 0}{\to} \partial^\alpha\varphi$ uniformément sur tout compact pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$. Or comme $\partial^\alpha(\varphi *_y \eta^\delta) = (\partial^\alpha\varphi) *_y \eta^\delta$ alors en appliquant la Proposition 6.7 : $(\partial^\alpha\varphi) *_y \eta^\delta \underset{\delta\to 0}{\to} \partial^\alpha\varphi$ uniformément sur tout compact.
On en déduit que $< \tilde{R}, \varphi *_y \eta^\delta > \underset{\delta\to 0}{\to} < \tilde{R}, \varphi >$ car $\tilde{R}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$\square$

Lemme 4.3 *Soit $a \in (C_b^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}))^D$ et $F \in \mathbb{R}$. Soient f_1 et f_2 deux solutions de l'équation cinétique (1.1) avec les termes sources $S_1 + R_1$ et $S_2 + R_2$. On suppose que les fonctions f_1, f_2, S_1, S_2 appartiennent à $L^1([0,T] \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$ et que R_1, R_2 appartiennent à $\mathcal{M}_1([0,T] \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$. Alors on obtient*

$$\begin{aligned}
&\partial_t \int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_2| dv + div_x \int_{\mathbb{R}} a|f_1 - f_2| dv - \int_{\mathbb{R}} (S_1 - S_2)\ sgn(f_1 - f_2) dv \\
\leq\ & \int_{\mathbb{R}} |R_1 - R_2| dv + \frac{1}{\varepsilon}\left(|\rho_1 - \rho_2| - \int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_2| dv\right) + \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)|f_1 - f_2|\ dv \\
\leq\ & \int_{\mathbb{R}} |R_1 - R_2| dv + \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)|f_1 - f_2|\ dv. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que, si $S_2 = div_x(a(x,v)M_k(x,v)) \in L^1([0,T] \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$, nous avons l'inégalité entropique suivante pour toute solution f de l'équation cinétique et pour tout $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_{\mathbb{R}} |f - M_k| dv + div_x \int_{\mathbb{R}} a|f - M_k| dv \ &+ \int_{\mathbb{R}} div_x(a\ M_k)\ sgn(f - M_k)\ dv \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)|f - M_k|\ dv. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Preuve
On va appliquer le Lemme 4.1. Pour cela, on prend comme variable $y = (x,v)$ et on pose $u(t,y) = f_1(t,y) - f_2(t,y)$, $c(t,y) = \left(a(x,v), \frac{F}{\varepsilon}\right)$, $\tilde{R}(t,y) = (\chi_{\rho_1} - \chi_{\rho_2})(t,y) + (R_1 - R_2)(t,y)$, $S(t,y) = (f_2 - f_1)(t,y) + (S_1 - S_2)(t,y) + R(t,y)(f_2 - f_1)(t,y)$.

On vérifie que $u \in L^1([0,T] \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}) \subset L^1([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}))$, χ_{ρ_1}, χ_{ρ_2}, R_1, $R_2 \in \mathcal{M}_1([0,T] \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$ et $f_1, f_2, S_1, S_2 \in L^1([0,T] \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$.

On a donc

$$\begin{aligned}
&\partial_t(f_1 - f_2) + \mathrm{div}_x\left(a(x,v).(f_1 - f_2)\right) + \frac{F}{\varepsilon}\partial_v(f_1 - f_2) \\
=\ & \frac{\chi_{\rho_1} - f_1 - \chi_{\rho_2} + f_2}{\varepsilon} + S_1 - S_2 + R_1 - R_2 + R(t,x,v)(f_1 - f_2)
\end{aligned}$$

avec

$$\rho_1 = \int_{\mathbb{R}} f_1\ dv,\ \rho_2 = \int_{\mathbb{R}} f_2\ dv.$$

On applique alors le Lemme 4.1 et on intègre en v :

$$\begin{aligned}
&\partial_t \int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_2| dv + \mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}} a(x,v)|f_1 - f_2| dv - \int_{\mathbb{R}} (S_1 - S_2)\mathrm{sgn}(f_1 - f_2) dv \\
\leq\ & \int_{\mathbb{R}} |R_1 - R_2| dv + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} |\chi_{\rho_1} - \chi_{\rho_2}| dv - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_2| dv + \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)|f_1 - f_2|\ dv.
\end{aligned}$$

Pour cela, on a utilisé

Lemme 4.4 *Soit* $f \in L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$*. Si on prend* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D)$ *et* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ *alors* $< f, \varphi\, \partial_v \phi > \to 0$ *si* $\phi \to \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ *au sens des distributions.*

Preuve
On sait par densité que

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall f \in L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}) \;\; \exists \tilde{f} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}) \;\; \text{tq} \;\; \|f - \tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Il est clair que $\int_{\mathbb{R}} \partial_v \tilde{f}(t,x,v)\; dv = 0$. Nous avons, au sens des distributions, (en prenant une fonction "test" $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$ à variables séparées *i.e.* $\psi(t,x,v) = \varphi(t,x)\phi(v)$)

$$\begin{aligned} < f, \varphi\, \phi' > &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} f\; \varphi\; \phi'\; dt\; dx\; dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}\; \varphi\; \phi'\; dt\; dx\; dv + \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} (f - \tilde{f})\; \varphi\; \phi'\; dt\; dx\; dv. \end{aligned}$$

Le premier terme se réécrit

$$\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}\; \varphi\; \phi'\; dt\; dx\; dv = - < \partial_v \tilde{f}, \varphi\, \phi > .$$

Comme $\tilde{f} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$, il existe $R \in \mathbb{R}^+$ tel que supp $\partial_v \tilde{f} \subset [-R, R]$ et donc

$$\begin{aligned} |- < \partial_v \tilde{f}, \varphi\, \phi > | &= \left| - \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{-R}^{R} \partial_v \tilde{f}\; \varphi\; \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(v)\; dt\; dx\; dv \right| \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Donc $| < \partial_v \tilde{f}, \varphi\, \phi > | = 0$.

On majore le deuxième terme de l'égalité

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} (f - \tilde{f})\; \varphi\; \phi'\; dt\; dx\; dv \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} |(f - \tilde{f})|\; \varphi\; \phi'\; dt\; dx\; dv \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} |(f - \tilde{f})|\; dt\; dx\; dv \\ &\leq C\; \|f - \tilde{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})} \\ &\leq C\; \varepsilon \end{aligned}$$

où $C = \sup\limits_{t,x} \varphi \;\; \sup\limits_{v} \phi'$.
On a donc $| < \partial_v f, \varphi\, \phi > | \leq \varepsilon$. $\square$

En appliquant le Lemme 4.4 à $f = \partial_v |f_1 - f_2|$ et en utilisant

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_{\rho_1} - \chi_{\rho_2}| dv = |\rho_1 - \rho_2| = \left| \int_{\mathbb{R}} (f_1 - f_2) dv \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_2| dv,$$

la première inégalité est prouvée.
Quant à (4.4), il suffit de prendre $f_1 = f$, $f_2 = M_k$, $S_1 = 0$, $S_2 = \mathrm{div}_x(a(x,v)M_k(x,v))$, $R_1 = R_2$.

$\square$

5 Preuve du Théorème

5.1 Compacité de $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans $C^0([0,T];L^1(K))$

On commence par prouver une borne L^1 sur f_ε.

Proposition 5.1 *Pour $a \in C_b^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})$, $F \in \mathbb{R}$ et $f_I \in L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})$, la suite $(\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t,x,v)|dv)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^D))$ pour tout $T\in\mathbb{R}^+$. En particulier, la suite $(\rho_\varepsilon(t,x))_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^D))$ pour tout $T\in\mathbb{R}^+$.*

Preuve
On utilise (4.3) avec $f_1 = f_\varepsilon$, $f_2 = 0$, $R_1 = R_2$, $S_1 = S_2$ et on intègre en v :

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t,x,v)|\,dx\,dv \quad &+ \quad \mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} a(x,v)|f_\varepsilon(t,x,v)|\,dx\,dv. \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} R(t,x,v)|f_\varepsilon(t,x,v)|\,dx\,dv \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} \|R\|_\infty |f_\varepsilon(t,x,v)|\,dx\,dv.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.4, $\mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} a(x,v)|f_\varepsilon(t,x,v)|\,dx\,dv = 0$.
On pose $g_\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t,x,v)|\,dx\,dv$. L'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned}
\partial_t g_\varepsilon(t) &\leq \|R\|_\infty g_\varepsilon(t) \\
\frac{d}{dt}\Big(g_\varepsilon(t)e^{-t\|R\|_\infty}\Big) &\leq 0 \\
g_\varepsilon(t) &\leq g_\varepsilon(0)e^{t\|R\|_\infty}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t,x,v)|\,dx\,dv &\leq \|f_I\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} e^{t\|R\|_\infty} \\
\sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t,x,v)|\,dx\,dv &\leq \|f_I\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} e^{T\|R\|_\infty}
\end{aligned}$$

et $(\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t,x,v)|\,dv)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^D))$.
Comme $\sup\limits_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^D} |\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,v)\,dv|\,dx \leq \sup\limits_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t,x,v)|\,dx\,dv < +\infty$, ceci montre que $(\rho_\varepsilon(t,x))_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty([0,T],L^1(\mathbb{R}^D))$.

□

C'est au niveau da la proposition suivante que la restriction $F = cste$ se trouve.

Proposition 5.2 *On suppose que F est constant et que $a \in C_b^{2,1}(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$. Pour $f_I \in L^1(\mathbb{R}; BV(\mathbb{R}^D))$, la famille $\{\rho_\varepsilon(t),\ \varepsilon > 0,\ 0 \le t \le T\}$ est bornée dans $BV(\mathbb{R}^D)$. De plus, pour tout $T > 0$ et pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^D$, la suite $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est précompacte dans $C^0([0,T]; L^1(K))$. Par conséquent, il existe une sous-suite toujours notée $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $\rho \in C^0([0,T]; L^1(\mathbb{R}^D))$ tels que*

$$\rho_\varepsilon(t,x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \rho(t,x), \qquad \forall t \ge 0 \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}^D, \tag{5.1}$$

$$\int_K |\rho_\varepsilon - \rho|(t,x)dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{pour tout compact } K \subset \mathbb{R}^D, \tag{5.2}$$

uniformément en temps sur tous les intervalles $[0,T]$ avec $T > 0$.

Preuve

Pour $h \in \mathbb{R}^D$, on utilise (4.4) avec $f_1 = \tau_h f_\varepsilon$, $f_2 = f_\varepsilon$ où $\tau_h f_\varepsilon(t,x,v) = f_\varepsilon(t,x+h,v)$, $S_1 = S_2 = R_2 = 0$ et $R_1 = \mathrm{div}_x\left((a - \tau_h a)\tau_h f_\varepsilon\right)$. Alors, en intégrant en x nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}} |\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon|\, dx\, dv \;\le\; & \int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}} \left|\mathrm{div}_x\left((a-\tau_h a)\tau_h f_\varepsilon\right)\right| dx\, dv \\ & + \int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon|\, dx\, dv. \end{aligned} \tag{5.3}$$

On remarque tout d'abord que $\mathrm{div}_x\left((a-\tau_h a)\tau_h f_\varepsilon\right) = \tau_h f_\varepsilon \mathrm{div}_x(a - \tau_h a) + (a - \tau_h a).\nabla_x \tau_h f_\varepsilon$. Ensuite, on applique la formule de Taylor reste intégral à $a(x,v) \in C_b^{2,1}(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$ à l'ordre 1 et on utilise le fait que a, $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$ sont bornées

$$\begin{aligned}|a(x+h,v) - a(x,v)| &= \left|\int_0^h \frac{\partial a}{\partial x}(t+x,v)\, dt\right| \\ &\le \int_0^h \left|\frac{\partial a}{\partial x}(t+x,v)\right| dt \\ &\le C_1|h|.\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x+h,v) - a(x,v)\right) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^h \frac{\partial a}{\partial x}(t+x,v)\, dt\right) \\ &= \int_0^h \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial a}{\partial x}(t+x,v)\right) dt.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{div}_x\left(a(x+h,v) - a(x,v)\right)\right| &= \left|\int_0^h \mathrm{div}_x\left(\frac{\partial a}{\partial x}(t+x,v)\right) dt\right| \\ \left|\mathrm{div}_x\left(a(x+h,v) - a(x,v)\right)\right| &\le C_2\,|h|.\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{div}_x\left((a-\tau_h a)\tau_h f_\varepsilon\right)\right| &\le C_2\,|h||\tau_h f_\varepsilon| + C_1|h||\nabla_x \tau_h f_\varepsilon| \\ &\le C(a)\,|h|(|\tau_h f_\varepsilon| + |\nabla_x \tau_h f_\varepsilon|)\end{aligned}$$

avec $C(a)=\max(C_1,C_2)$. (5.3) devient alors

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}}|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon|\,dx\,dv &\le C(a)\,|h|\|f_\varepsilon(t)\|_{L^1(BV)}+\|R\|_\infty\int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}}|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon|\,dx\,dv\\
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}}\frac{|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon|}{|h|}\,dx\,dv &\le C(a)\,\|f_\varepsilon(t)\|_{L^1(BV)}+\|R\|_\infty\int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}}\frac{|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon|}{|h|}\,dx\,dv
\end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0, on arrive à

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}}|\nabla_x f_\varepsilon|\,dx\,dv &\le C(a)\,\|f_\varepsilon(t)\|_{L^1(BV)}+\|R\|_\infty\int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}}|\nabla_x f_\varepsilon|\,dx\,dv\\
\int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}}|\nabla_x f_\varepsilon|\,dx\,dv &\le \int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}}|\nabla_x f_I|\,dx\,dv + C(a)\int_0^t\|f_\varepsilon(s)\|_{L^1(BV)}\,ds\\
&\quad +\|R\|_\infty\int_0^t\int_{\mathbb{R}^D}\int_{\mathbb{R}}|\nabla_x f_\varepsilon|\,ds\,dx\,dv
\end{aligned}\tag{5.4}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|f_\varepsilon(t)\|_{L^1(BV)} &\le \|f_I\|_{L^1(BV)}+\|f_\varepsilon(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})}+C(a)\int_0^t\|f_\varepsilon(s)\|_{L^1(BV)}\,ds\\
&\quad +\|R\|_\infty\int_0^t\|f_\varepsilon(s)\|_{L^1(BV)}\,ds\\
&\le \|f_I\|_{L^1(BV)}+\|f_\varepsilon(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})}+\tilde{C}(a)\int_0^t\|f_\varepsilon(s)\|_{L^1(BV)}\,ds
\end{aligned}$$

avec $\tilde{C}(a)=C(a)+\|R\|_\infty$.

En utilisant la Proposition 5.1 et le Lemme de Gronwall (en annexe), il vient

$$\|f_\varepsilon(t)\|_{L^1(BV)}\le e^{T\tilde{C}(a)}\left(\|f_\varepsilon(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})}+\|f_I\|_{L^1(BV)}+\|f_\varepsilon\|_{L^1([0,T]\times\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})}\right).$$

On voit que la suite $(f_\varepsilon(t))_{\varepsilon>0}$, $t\in[0,T]$ est bornée dans $L^1(\mathbb{R};BV(\mathbb{R}^D))$. De même, on en déduit que $(\rho_\varepsilon(t))_{\varepsilon>0}$, $t\in[0,T]$ est bornée dans $BV(\mathbb{R}^D)$ qui est compact dans $L^1(K)$ pour tout compact $K\subset\mathbb{R}^D$ ce qui donne la relative compacité de la famille $\{\rho_\varepsilon(t),\ \varepsilon>0,\ 0\le t\le T\}$.

On va voir maintenant que la famille $t\in[0,T]\longmapsto\rho_\varepsilon(t)\in L^1(K),\varepsilon>0$ est équicontinue. En intégrant (1.1), il vient

$$\partial_t\rho_\varepsilon+\int_{\mathbb{R}}\left[f_\varepsilon(t,x,v)\mathrm{div}_x\,a(x,v)+a(x,v).\nabla_x f_\varepsilon(t,x,v)\right]\,dv=\int_{\mathbb{R}}R(t,x,v)f_\varepsilon(t,x,v)\,dv$$

pour arriver à

$$\begin{aligned}
|\partial_t\rho_\varepsilon| &\le \int_{\mathbb{R}}|f_\varepsilon(t,x,v)||\mathrm{div}_x\,a(x,v)|+|a(x,v).\nabla_x f_\varepsilon(t,x,v)|\,dv+\int_{\mathbb{R}}|R(t,x,v)f_\varepsilon(t,x,v)|\,dv\\
|\partial_t\rho_\varepsilon| &\le C\int_{\mathbb{R}}|f_\varepsilon(t)|+|\nabla_x f_\varepsilon(t)|\,dv+\|R\|_\infty\int_{\mathbb{R}}|f_\varepsilon(t)|\,dv\\
|\partial_t\rho_\varepsilon| &\le A\int_{\mathbb{R}}|f_\varepsilon(t)|+|\nabla_x f_\varepsilon(t)|\,dv
\end{aligned}\tag{5.5}$$

avec $A, C \in \mathbb{R}^+$ et $A = C + \|R\|_\infty$. Il s'ensuit que $\forall s, t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^D} |\rho_\varepsilon(t,.) - \rho_\varepsilon(s,.)| \, dx &\leq A \int_s^t \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(u)| + |\nabla_x f_\varepsilon(u)| \, du \, dx \, dv \\
&\leq A \int_s^t \|f_\varepsilon(u)\|_{L^1(BV)} \, du \\
&\leq A \int_s^t \Big[\|f_I\|_{L^1(BV)} + \|f_\varepsilon(u)\|_{L^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})} + \tilde{C}(a) \int_0^u \|f_\varepsilon(w)\|_{L^1(BV)} \, dw \Big] \, du \\
&\leq A \, |t-s| \, \Big[\big(1 + e^{T\|R\|_\infty}\big) \|f_I\|_{L^1(BV)} + \tilde{C}(a) \, \beta(T) \Big]
\end{aligned}$$

où $\beta(T) = \int_0^T \|f_\varepsilon(w)\|_{L^1(BV)} \, dw$ et on a majoré $\|f_\varepsilon(u)\|_{L^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})}$ par (2.8).

Finalement

$$\|\rho_\varepsilon(t,.) - \rho_\varepsilon(s,.)\|_{L^1(\mathbb{R}^D)} \leq C(T) \, \|f_I\|_{L^1(BV)} |t-s|$$

avec $C(T) = \max(A(1+e^{T\|R\|_\infty}), A\tilde{C}(a)\beta(T))$. En particulier, cela donne que $\rho \in C^0([0,T]; L^1(\mathbb{R}^D)$.

Le Théorème d'Ascoli donne alors la précompacité de $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ dans $C^0([0,T]; L^1(K))$. On vient de montrer qu'à t fixé, $(\rho_\varepsilon(t))$ a une sous-suite convergente dans $L^1(\mathbb{R}^D)$. Il reste à montrer que (ρ_ε) a une sous-suite convergente.

Soit $(t_n)_{n\geq 0}$ une suite dense dans $[0,T]$ *i.e* $\forall \eta > 0 \ \exists \, t_k \in [0,T]$ tq $|t - t_k| \leq \eta$.
A t_0 fixé, j'extrais de $(\rho_\varepsilon(t_0))$ la suite $(\rho_{\varepsilon_n^0}(t_0))$ qui converge dans $L^1(\mathbb{R}^D)$.
De $(\rho_{\varepsilon_n^0}(t_1))$, j'extrais la suite $(\rho_{\varepsilon_n^1}(t_1))$ qui converge dans $L^1(\mathbb{R}^D)$.
De $(\rho_{\varepsilon_n^1}(t_2))$, j'extrais la suite $(\rho_{\varepsilon_n^2}(t_2))$ qui converge dans $L^1(\mathbb{R}^D)$, etc...
J'obtiens donc le tableau suivant

$$\begin{array}{cccccc}
\rho_{\varepsilon_0^0}(t_0) & \rho_{\varepsilon_1^0}(t_0) & \dots & \dots & \rho_{\varepsilon_n^0}(t_0) & \dots \\
\rho_{\varepsilon_0^1}(t_1) & \rho_{\varepsilon_1^1}(t_1) & \dots & \dots & \rho_{\varepsilon_n^1}(t_1) & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\rho_{\varepsilon_0^n}(t_n) & \rho_{\varepsilon_1^n}(t_n) & \dots & \dots & \rho_{\varepsilon_n^n}(t_n) & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Le procédé d'extraction diagonale nous dit que $(\rho_{\varepsilon_n^n}(t_i))_{n\geq 0}$ converge $\forall t_i \in [0,T]$ car c'est une sous-suite extraite de pour n assez grand. Dans la suite, on notera (ρ_ε) au lieu de $(\rho_{\varepsilon_n^n})$.
Soit t_k tel que $|t - t_k| < \eta$ où $\eta > 0$. La suite $(\rho_\varepsilon(t_k))_k$ converge, elle est donc de Cauchy *i.e.* $\exists \, \varepsilon_0 > 0$ tq si $0 < \varepsilon, \varepsilon' < \varepsilon_0$ alors $\|\rho_\varepsilon(t_k) - \rho_{\varepsilon'}(t_k)\|_{L^1(\mathbb{R}^D)} \leq \eta$.

Soient $\varepsilon, \varepsilon' \in]0, +\infty[$, alors

$$\begin{aligned}
& \|\rho_\varepsilon(t) - \rho_{\varepsilon'}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^D)} \\
\leq \ & \|\rho_\varepsilon(t) - \rho_\varepsilon(t_k)\|_{L^1(\mathbb{R}^D)} + \|\rho_\varepsilon(t_k) - \rho_{\varepsilon'}(t_k)\|_{L^1(\mathbb{R}^D)} + \|\rho_{\varepsilon'}(t_k) - \rho_{\varepsilon'}(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^D)} \\
\leq \ & C \, |t - t_k| + \eta + C \, |t - t_k| \\
\leq \ & (2C+1)\eta.
\end{aligned}$$

La suite $(\rho_\varepsilon(t))$ est de Cauchy pour tout $t \in [0,T]$ et elle converge car $(C^0([0,T]; L^1(\mathbb{R}^D)), \|.\|_\infty)$ est complet.

On vient de prouver qu'il existe une sous-suite (indépendante de t) tq $(\rho_\varepsilon(t))_\varepsilon$ converge pour tout $t \in [0,T]$ dans $L^1(K)$.
En utilisant et le fait que (ρ_ε) soit bornée uniformément par rapport à t grâce à la Proposition 5.1, on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue sur $X = [0,T] \times K$ avec la mesure $d\mu = dt\, dx$, ce qui donne

$$\int_X |\rho_\varepsilon(t,x) - \rho(t,x)|\, d\mu \to 0$$

Pour conclure, il reste à utiliser le théorème 6.3 qui nous assure l'existence d'une sous-suite (ρ_ε) qui converge vers ρ presque partout sur X.

$\square$

5.2 Convergence de f_ε vers M_ρ

Proposition 5.3 *Soient $a \in C_b^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$, $F \in \mathbb{R}$ et $f_I \in L^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$. Alors, pour tout $T > 0$ et pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^D$, on a pour toute la suite ρ_ε*

$$\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k| dv - |\rho_\varepsilon - k| \to 0, \qquad \textit{dans } L^1([0,T] \times K) \qquad (5.6)$$

où $k = k(t,x)$ est une fonction appartenant à $BV(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^D)$.
Sur la sous-suite ρ_ε tq $\rho_\varepsilon \to \rho$ dans $L^1([0,T] \times K)$, alors

$$|f_\varepsilon - M_\rho| \to 0, \qquad \textit{dans } L^1([0,T] \times K \times \mathbb{R}) \qquad (5.7)$$

Preuve
On va utiliser (4.3) avec $f_1 = f_\varepsilon$, $f_2 = M_k$, $S_1 = S_2 = R_1$, $R_2 = \partial_t M_k + \mathrm{div}_x(aM_k)$ afin de montrer que R_2 est uniformément borné dans $\mathcal{M}_1([0,T] \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$.
Tout d'abord, on a

$$\partial_k \chi_k = \delta(v-k), \;\; \partial_v \chi_k = \delta(v) - \delta(v-k).$$

Ensuite, en remarquant que $R_2 = \partial_t M_k + \mathrm{div}_x(aM_k) = \partial_t M_k + M_k \mathrm{div}_x(a) + a.\nabla_x M_k$, on majore chaque terme de R_2

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} |\partial_t M_k| dt\, dx\, dv &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} |\partial_t k(t,x)| \delta(v - Fu - k) e^{-u} dt\, dx\, dv\, du \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} |\partial_t k(t,x)| dt\, dx, \\
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}} |M_k(x,v)| dt\, dx\, dv &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} |k(t,x)| dt\, dx, \\
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} |\nabla_x M_k| dt\, dx\, dv &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} |\nabla_x k(t,x)| \delta(v - Fu - k)\, dt\, dx\, dv\, du \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} |\nabla_x k(t,x)|\, dt\, dx.
\end{aligned}$$

Comme $a(x,v) \in C_b^1(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$, on en déduit la borne uniforme pour R_2.
Ensuite, on applique (4.3) et on intègre en x

$$\begin{aligned} &\partial_t \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|\, dx\, dv + \mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} a|f_\varepsilon - M_k|\, dx\, dv \\ \leq\ & \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |R_2|\, dx\, dv + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^D} (|\rho_\varepsilon - k| - \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|\, dv)\, dx + \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} R(t,x,v)|f_\varepsilon - M_k|\, dx\, dv. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Comme $\mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} a|f_\varepsilon - M_k|dx\, dv = 0$, l'inégalité précédente devient en intégrant en t

$$\begin{aligned} & \varepsilon\left[\int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|(T,x,v)dx\, dv - \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|(0,x,v)dx\, dv\right] \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|dv - |\rho_\varepsilon - k|\right) dt\, dx \\ \leq\ & \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |R_2|dt\, dx\, dv + \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} R(t,x,v)|f_\varepsilon - M_k|dt\, dx\, dv \\ \leq\ & \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |R_2|dt\, dx\, dv + \varepsilon\|R\|_\infty \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|dt\, dx\, dv. \end{aligned}$$

On va montrer que $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} R(t,x,v)|f_\varepsilon - M_k|dt\, dx\, dx$ est borné. En effet,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|dt\, dx\, dv \ &\leq\ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t,x,v)|dt\, dx\, dv + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |M_k(x,v)|dt\, dx\, dv \\ &\leq\ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t,x,v)|dt\, dx\, dv + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} |k(t,x)|dt\, dx \\ &\leq\ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t,x,v)|dt\, dx\, dv + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} |k(t,x)|dt\, dx. \end{aligned}$$

On a vu plus haut que $\int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon(t,x,v)|dx\, dv$ était borné par $M_1 \in \mathbb{R}^+$ sur $[0,T]$. De plus, $k \in BV(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^D)$ donc $\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^D} |k(t,x)|dt\, dx$ est borné par $M_2 \in \mathbb{R}^+$.
Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|dt\, dx\, dv \ &\leq\ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|dt\, dx\, dv \\ &\leq\ M_1 T + M_2 = C(T). \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} |\rho_\varepsilon - k| = \left|\int_{\mathbb{R}} \big(f_\varepsilon - M_k\big)\, dv\right| \ &\leq\ \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|\, dv \\ 0 \ &\leq\ \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|\, dv - |\rho_\varepsilon - k|, \end{aligned}$$

on arrive à

$$\begin{aligned} 0 \ \leq\ & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|dv - |\rho_\varepsilon - k|\right) dt\, dx \leq\ \varepsilon\|R\|_\infty C(T) \\ & + \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |R_2|dt\, dx\, dv + \int_{\mathbb{R}^D\times\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|(0,x,v)dx\, dv \end{aligned}$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on arrive à (5.6). De plus, on remarque que si on multiplie k dans la dernière inégalité par une fonction valant 1 sur K et 0 ailleurs, on obtient (5.6) pour $k \in BV_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^D)$.
Maintenant, on prouve (5.7) pour une sous-suite satisfaisant $\rho_\varepsilon \to \rho$ dans $L^1([0,T] \times K)$. Soit $(\rho^\delta)_{\delta>0}$ une suite régularisante de ρ au sens BV, *i.e.*

$$\rho^\delta \in BV(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D), \qquad \rho^\delta \underset{\delta\to 0}{\to} \rho \in L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D).$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_K \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_\rho| dt\, dx\, dv = \int_0^T \int_K \Big[\Big(\int_{\mathbb{R}} &|(f_\varepsilon - M_{\rho^\delta}) + (M_{\rho^\delta} - M_\rho)|\, dv \Big) \\
&+ |(\rho - \rho^\delta) + (\rho_\varepsilon - \rho) - (\rho_\varepsilon - \rho^\delta)| \Big]\, dt\, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^T \int_K \Big[\Big(\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_{\rho^\delta}|\, dv + |\rho - \rho^\delta| \Big) + |\rho^\delta - \rho| + |\rho - \rho_\varepsilon| - |\rho_\varepsilon - \rho^\delta| \Big]\, dt\, dx \\
&\leq \int_0^T \int_K \Big[\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_{\rho^\delta}|\, dv - |\rho_\varepsilon - \rho^\delta| \Big]\, dt\, dx + \int_0^T \int_K 2|\rho^\delta - \rho| + |\rho - \rho_\varepsilon|\, dt\, dx.
\end{aligned}$$

En utilisant (5.6) et la convergence de $\rho_\varepsilon \to \rho$, on obtient

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \|f_\varepsilon - M_\rho\|_{L^1([0,T]\times K\times\mathbb{R})} \leq 2\|\rho^\delta - \rho\|_{L^1([0,T]\times K)}. \tag{5.9}$$

Il reste plus qu'à faire tendre $\delta \to 0$ pour conclure.

□

5.3 Loi de conservation scalaire

On cherche à passer à la limite dans les termes $\int_{\mathbb{R}} a(x,v) f_\varepsilon(t,x,v)dv$ et $\int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) f_\varepsilon(t,x,v)dv$ pour obtenir une solution de l'équation scalaire.

Lemme 5.4 *On pose $j_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} a(x,v) f_\varepsilon(t,x,v)dv$ et $d_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) f_\varepsilon(t,x,v)dv$. Sous les mêmes hypothèses que dans la Proposition 5.3, on a*

$$j_\varepsilon - B(x,\rho_\varepsilon) \to 0, \qquad \textit{au sens des distributions} \tag{5.10}$$

$$d_\varepsilon - T(t,x,\rho_\varepsilon) \to 0, \qquad \textit{au sens des distributions} \tag{5.11}$$

$$\int_{\mathbb{R}} a(x,v)|f_\varepsilon - M_k|(t,x,v)dv - sgn(\rho_\varepsilon - k)(j_\varepsilon - B(x,\rho_\varepsilon)) \to 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)|f_\varepsilon - M_k|(t,x,v)dv - sgn(\rho_\varepsilon - k)(d_\varepsilon - T(t,x,\rho_\varepsilon)) \to 0$$

dans $L^1([0,T] \times K)$ pour tout $T > 0$ et tout compact $K \subset \mathbb{R}^D$.

Preuve
On procède de façon similiaire aux calculs de la section 3 mais on rend rigoureux la preuve heuristique, *i.e.* on réécrit

$$\partial_t f_\varepsilon + \mathrm{div}_x(a(x,v).f_\varepsilon) + \frac{F}{\varepsilon}.\partial_v f_\varepsilon = \frac{\chi_\rho - f_\varepsilon}{\varepsilon} + R(t,x,v) f_\varepsilon$$

sous la forme

$$\varepsilon \partial_t f_\varepsilon + \varepsilon \mathrm{div}_x(a(x,v).f_\varepsilon) + F\ \partial_v f_\varepsilon = \chi_\rho - f_\varepsilon + \varepsilon R(t,x,v) f_\varepsilon. \tag{5.12}$$

On multiplie par une fonction $b(x,v) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$ et on intègre en v

$$\varepsilon\ \partial_t \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,v) b(x,v) dv + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \mathrm{div}_x(a(x,v).f_\varepsilon) b(x,v) dv - F \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,v) \partial_v b(x,v) dv$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (\chi_\rho - f_\varepsilon) b(x,v) dv + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) f_\varepsilon(t,x,v) b(x,v) dv$$

$$\varepsilon\Big(\partial_t \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,v) b(x,v)\ dv + \mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}} a(x,v) f_\varepsilon(t,x,v) b(x,v)\ dv - \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) f_\varepsilon(t,x,v) b(x,v)\ dv$$
$$-\sum_i \int_{\mathbb{R}} \partial_{x_i} b(x,v) a_i(x,v) f_\varepsilon(t,x,v)\ dv\Big) - F \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,v) \partial_v b(x,v)\ dv$$
$$= B(x,\rho_\varepsilon) - \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,v) b(x,v)\ dv.$$

$$\varepsilon\Big(\partial_t \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,v) b(x,v)\ dv + \mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}} a(x,v) f_\varepsilon(t,x,v) b(x,v)\ dv - \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) f_\varepsilon(t,x,v) b(x,v)\ dv$$
$$-\sum_i \int_{\mathbb{R}} \partial_{x_i} b(x,v) a_i(x,v) f_\varepsilon(t,x,v)\ dv\Big)$$
$$= B(x,\rho_\varepsilon) - j_\varepsilon.$$

On a donc $\int_{\mathbb{R}} a(x,v) f_\varepsilon(t,x,v)\ dv = B(x,\rho_\varepsilon) - r_\varepsilon$ où

$$\begin{aligned} r_\varepsilon &= \varepsilon\Big(\partial_t \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,v) b(x,v)\ dv + \sum_i \partial_{x_i}\Big(\int_{\mathbb{R}} a_i(x,v) b(x,v) f_\varepsilon(t,x,v)\ dv\Big) \\ &\quad -\sum_i \int_{\mathbb{R}} \partial_{x_i} b(x,v) a_i(x,v) f_\varepsilon(t,x,v)\ dv - \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) b(x,v) f_\varepsilon(t,x,v)\ dv\Big). \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} a(x,v) M_k(x,v) dv &= B(x,k), \\ \int_{\mathbb{R}} a(x,v) f_\varepsilon(t,x,v)\ dv &= B(x,\rho_\varepsilon) - r_\varepsilon. \end{aligned}$$

On remarque que les fonctions a, b, $\nabla_x b$ et R sont bornées. Grâce à la Proposition 5.1, on obtient que r_ε tends vers 0 au sens des distributions.

On procède de même pour (5.11). On multiplie (5.12) par une fonction $P(t,x,v) \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$ et on intègre en v

$$-\varepsilon \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,v) \partial_t P(t,x,v)\ dv + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \mathrm{div}_x(a(x,v).f_\varepsilon) P(t,x,v)\ dv - F \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,v) \partial_v P(t,x,v)\ dv$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (\chi_\rho - f_\varepsilon) P(t,x,v)\ dv + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) f_\varepsilon(t,x,v) P(t,x,v)\ dv.$$

On arrive à

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\Big(-\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,v)\partial_t P(t,x,v)\ dv - \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) f_\varepsilon(t,x,v) P(t,x,v)\ dv \\
&+\sum_i \partial_{x_i}\Big(\int_{\mathbb{R}} a_i(x,v)P(t,x,v)f_\varepsilon(t,x,v)\ dv - \sum_i \int_{\mathbb{R}} \partial_{x_i}P(t,x,v)a_i(x,v)f_\varepsilon(t,x,v)\ dv\Big) \\
&= T(t,x,\rho_\varepsilon) - d_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Comme les fonctions a, P, $\partial_t P$, $\nabla_x P$ et R sont bornées et grâce à la Proposition 5.1, on obtient que d_ε tends vers 0 au sens des distributions.

Maintenant, on pose $S(v) = \mathrm{sgn}(f_\varepsilon - M_k) - \mathrm{sgn}(\rho_\varepsilon - k)$, d'où
$\text{supp S} = \{v \mid \mathrm{sgn}(f_\varepsilon - \chi_k) \neq \mathrm{sgn}(\rho_\varepsilon - k)\}$ et $\mathrm{sgn}(f_\varepsilon - \chi_k).S(v) = 2 \quad \forall v \in \text{supp S}$.
On en déduit la suite d'égalités
$\int_{\text{supp } S} |f_\varepsilon - M_k| dv - |\rho_\varepsilon - k| = \int_{\text{supp } S} |f_\varepsilon - M_k| \mathrm{sgn}(f_\varepsilon - M_k) S(v)\ dv = 2\int_{\text{supp } S} |f_\varepsilon - M_k|\ dv$.

Pour conclure, on utilise le 1er résultat de la Proposition 5.3 :

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}} a(x,v)|f_\varepsilon - M_k|\ dv - \mathrm{sgn}(\rho_\varepsilon - k)\int_{\mathbb{R}} a(x,v)(f_\varepsilon - M_k)\ dv \right| \\
\leq\ & 2\|a\|_\infty \int_{\text{supp } S} |f_\varepsilon - M_k|\ dv \\
\leq\ & \|a\|_\infty \left(\int_{\text{supp } S} |f_\varepsilon - M_k|\ dv - |\rho_\varepsilon - k| \right) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.
\end{aligned}
$$

De même

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)|f_\varepsilon - M_k|\ dv - \mathrm{sgn}(\rho_\varepsilon - k)\int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)(f_\varepsilon - M_k)\ dv \right| \\
\leq\ & 2\|R\|_\infty \int_{\text{supp } S} |f_\varepsilon - M_k|\ dv \\
\leq\ & \|R\|_\infty \left(\int_{\text{supp } S} |f_\varepsilon - M_k|\ dv - |\rho_\varepsilon - k| \right) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.
\end{aligned}
$$

□

Proposition 5.5 *On suppose F est constant, $a \in C_b^{2,1}(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$ et $f_I \in L^1(\mathbb{R}; BV(\mathbb{R}^D))$. Alors ρ est une solution faible de la loi de conservation scalaire*

$$
\begin{aligned}
\partial_t \rho(t,x) + div_x B(x,\rho(t,x)) &= T(t,x,\rho), \qquad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^D, \qquad (5.13)\\
\rho(0,x) = \rho_I(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_I(x,v) dv, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^D. \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

Preuve
On intègre (1.1) par rapport à v, ce qui donne

$$
\partial_t \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,v)\ dv + \mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}} a(x,v) f_\varepsilon(t,x,v)\ dv = \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) f_\varepsilon(t,x,v)\ dv, \qquad (5.15)
$$

et on cherche à passer à la limite dans cette équation.
Comme $|B(x,\rho_\varepsilon)-B(x,\rho)| \le \|b\|_\infty|\rho_\varepsilon-\rho|$ et $|T(t,x,\rho_\varepsilon)-T(t,x,\rho)| \le \|P\|_\infty|\rho_\varepsilon-\rho|$, (5.1) et (5.2) impliquent que pour tout $T>0$ et pour tout compact $K\subset\mathbb{R}^D$, on a

$$B(x,\rho_\varepsilon(t,x)) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} B(x,\rho(t,x)), \quad \forall t>0, \quad \text{pour presque tout } \; x\in\mathbb{R}^D$$

$$T(t,x,\rho_\varepsilon(t,x)) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} T(t,x,\rho(t,x)), \quad \forall t>0, \quad \text{pour presque tout } \; x\in\mathbb{R}^D$$

et dans $L^1(K)$ uniformément en temps sur $[0,T]$.

Ensuite, en utilisant le Lemme 5.4, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} a(x,v) f_\varepsilon(t,x,v)\, dv \underset{\varepsilon\to 0}{\to} B(x,\rho(t,x)),$$

$$\int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) f_\varepsilon(t,x,v)\, dv \underset{\varepsilon\to 0}{\to} T(t,x,\rho(t,x)).$$

au sens des distributions. Enfin, on peut passer à la limite dans (5.15) et conclure. $\square$

5.4 Inégalités d'entropies

Il nous reste à montrer que ρ_ε converge vers la solution entropique et que toute la suite $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge.

Preuve du Théorème 1.1
On considère la donnée initiale $\rho^\circ \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^D)$. Alors par densité, on a

$$\forall \eta>0 \; \exists \; \tilde\rho^\circ \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^D) \;\; \text{tq} \;\; \|\rho^\circ-\tilde\rho^\circ\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^D)} \le \eta.$$

$\tilde\rho^\circ$ étant régulière, on peut appliquer le résultat (5.1) de la Proposition 5.2, *i.e.*
$\tilde\rho_\varepsilon \to \tilde\rho$ dans $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^D)$ où $\tilde\rho_\varepsilon$ est associé à la donnée initiale $\tilde\rho^\circ$ et $\tilde\rho\in C^0([0,T];L^1(\mathbb{R}^D))$.
Maintenant si on considère $\rho_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^D)$ associé à la donnée initiale ρ°, on a

$$\|\rho_\varepsilon-\tilde\rho_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^D)} \le C\;\|\rho^\circ-\tilde\rho^\circ\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^D)} \le \eta.$$

En effet, on prend deux données initiales différentes f° et $g^\circ \in L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})$ associées à deux solutions f et g de (1.1) et tq $\Phi(f)=f$, $\Phi(g)=g$. On reporte dans (2.6), on intègre en x et en v puis après un changement (le même que dans la section 2), on arrive à

$$\begin{aligned}
\|f(t)-g(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} &\le \|f^\circ-g^\circ\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t_1} \|f(t_1,x,v)-g(t_1,x,v)\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} e^{(t_1-t)\alpha}\, dt_1 \\
&\le \|f^\circ-g^\circ\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t_1} e^{(t_1-t)/\varepsilon+t\|R\|_\infty}\, dt_1} \\
&\le \|f^\circ-g^\circ\|_{L^1(\mathbb{R}^D\times\mathbb{R})} e^{e^{T\|R\|_\infty}}
\end{aligned}$$

par le Lemme de Gronwall.
Ainsi on peut supposer que la donnée initiale est régulière et on est en mesure d'utiliser les résultats de la Proposition 5.2. En appliquant l'inégalité (4.4), on obtient pour tout $k\in\mathbb{R}$,

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|\, dv + \mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}} a|f_\varepsilon - M_k|\, dv \;+\; \int_{\mathbb{R}} \mathrm{div}_x(a\, M_k)\, \mathrm{sgn}(f_\varepsilon - M_k)\, dv$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)|f_\varepsilon - M_k|\, dv.$$

Grâce à (5.2) et (5.7), on peut passer à la limite dans les deux premiers termes à gauche du signe $\leq$. Le terme de droite du signe $\leq$ est majoré par $\|R\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon - M_k|\, dv$. Donc on peut passer à la limite grâce à (5.7). Intéressons nous maintenant au terme restant.
Le Théorème 6.3 nous dit qu'on peut supposer (quitte à extraire une sous-suite) que $f_\varepsilon \to M_k$ presque partout sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}$ et qu'il existe une fonction $h \in L^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R})$ telle que $|f_\varepsilon(t,x,v)| \leq h(t,x,v)$ presque partout sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}$.
Sur l'ensemble $\{\rho \neq k\}$, nous avons $\mathrm{sgn}(M_\rho - M_k) = \mathrm{sgn}(\rho - k) \neq 0$. Donc $\mathrm{sgn}(f_\varepsilon - M_k) \to \mathrm{sgn}(\rho - k)$ presque partout sur $\{\rho \neq k\}$. Le problème se situe sur l'ensemble $\{\rho = k\}$ où la suite $\mathrm{sgn}(f_\varepsilon - M_k)$ peut osciller entre $-1, 0$ et 1. Cependant, on a

Lemme 5.6 *Soit u une fonction réelle mesurable sur Ω un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{C}$, l'ensemble $\{u = k\}$ est négligeable.*

Preuve
On pose $\Omega_n = \Omega \cap B_n$ où B_n est la boule ouverte de rayon n. Comme les ensembles $\{u = k\} \cap \Omega_n$ sont disjoints, on a $\sum_{i=1}^{I} \mathrm{mes}(\{u = k_i\} \cap \Omega_n) \leq \mathrm{mes}(B_n)$ pour tout k_i, avec les k_i distincts, $i = 1, ..., I$. La famille $(\mathrm{mes}(\{u = k\} \cap \Omega_n))_{k \in \mathbb{R}}$ est donc sommable. Par le Lemme 6.6, il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{C}_n$ tel que pour tout $k \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{C}_n$, $\mathrm{mes}(\{u = k\} \cap \Omega_n) = 0$. On obtient le résultat annoncé pour $\mathcal{C} = \cup_{n \geq 1} \mathcal{C}_n$.

□

On utilise le Lemme 5.6 avec $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D$ et $u = \rho$. Ainsi, on obtient, excepté pour $k \in \mathcal{C}$, $\mathrm{sgn}(f_\varepsilon - M_k) \to \mathrm{sgn}(\rho - k)$ presque partout sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D$ et

$$\partial_t \int_{\mathbb{R}} |M_\rho - M_k| dv + \mathrm{div}_x \int_{\mathbb{R}} a|M_\rho - M_k| dv \;+\; \int_{\mathbb{R}} \mathrm{div}_x(a\, M_k)\, \mathrm{sgn}(M_\rho - M_k) dv$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)|M_\rho - M_k|\, dv.$$

En utilisant les relations (3.11) à (3.13), l'inégalité précédente devient

$$\forall k \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{C}, \quad \partial_t|\rho - k| \;+\; \mathrm{div}_x\Big(B(x,\rho) - B(x,k))\, \mathrm{sgn}(\rho - k)\Big) + (\mathrm{div}_x\, B)(x,k)\, \mathrm{sgn}(\rho - k)$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)(M_\rho - M_k)\, \mathrm{sgn}(\rho - k)\, dv. \tag{5.16}$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue (appliquée à la suite $(f_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$) nous donne

$$\int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) f_\varepsilon\, dv \to \int_{\mathbb{R}} R(t,x,v) M_\rho\, dv.$$

En remarquant que,

$$\int_{\mathbb{R}} R(t,x,v)M_\rho(x,v)\,dv = \int_{\mathbb{R}} P(t,x,v)\chi_\rho(v)\,dv \tag{5.17}$$

où $P(t,x,v) = \int_0^\infty R(t,x,v+Fu)e^{-u}\,du$, (5.16) devient

$$\begin{aligned}\forall k \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{C}, \quad \partial_t|\rho-k| \ &+\ \mathrm{div}_x\Big(B(x,\rho)-B(x,k))\,\mathrm{sgn}(\rho-k)\Big) + (\mathrm{div}_x\,B)(x,k)\,\mathrm{sgn}(\rho-k)\\ &\le\ (T(t,x,\rho)-T(t,x,k))\,\mathrm{sgn}(\rho-k)\end{aligned} \tag{5.18}$$

avec $T(t,x,\rho)$ définit par (1.5).
On utilise le lemme ci-dessous pour avoir les inégalités d'entropies (5.18) pour tout $k\in\mathbb{R}$. Ceci combiné avec avec la continuité de $\rho(t)$ en 0 dans $L^1(\mathbb{R}^D)$ nous permet d'utiliser le résultat d'unicité de Kružkov (voir en Annexe). Par conséquent toute la suite $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge. Ceci termine la preuve du théorème.

□

Lemme 5.7 *Soit $\rho \in C^0(\mathbb{R}^+;L^1(K))$ pour tout compact $K\subset\mathbb{R}^D$, une solution faible de (5.13)-(5.14) qui satisfait l'inégalité entropique (5.18) pour presque tout $k\in\mathbb{R}$. Alors l'inégalité (5.18) est vraie pour tout $k\in\mathbb{R}$.*

Preuve
Pour presque tout $k\in\mathbb{R}$, on a par (5.18) :

$$\begin{aligned}&\partial_t|\rho-k| + \mathrm{div}_x\big((B(x,\rho)-B(x,k))\,\mathrm{sgn}(\rho-k)\big)\\ &\quad+\big((\mathrm{div}_x B)(x,k)-(\mathrm{div}_x B)(x,\rho)\big)\,\mathrm{sgn}(\rho-k)\\ &\quad\ +(\mathrm{div}_x B)(x,\rho)\,\mathrm{sgn}(\rho-k)\\ &\le (T(t,x,\rho)-T(t,x,k))\,\mathrm{sgn}(\rho-k).\end{aligned} \tag{5.19}$$

On pose

$$\eta^\alpha(k) = \frac{1}{\alpha}\eta\left(\frac{k}{\alpha}\right),\ \eta\in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^+),\ \int_{\mathbb{R}}\eta(k)dk = 1,\ \eta \text{ pair}$$

et on prend le produit de convolution de (5.19) par rapport à la variable k.

De cette manière, il vient pour tout k

$$\begin{aligned}&\partial_t|\rho-k| *_k \eta^\alpha(k) + \mathrm{div}_x\big(((B(x,\rho)-B(x,k))\,\mathrm{sgn}(\rho-k) *_k \eta^\alpha(k)\big)\\ &\quad+\big(((\mathrm{div}_x B)(x,k)-(\mathrm{div}_x B)(x,\rho))\,\mathrm{sgn}(\rho-k)\big) *_k \eta^\alpha(k)\\ &\quad+(\mathrm{div}_x B)(x,\rho)\,\mathrm{sgn}^\alpha(\rho-k)\\ &\le \big((T(t,x,\rho)-T(t,x,k))\,\mathrm{sgn}(\rho-k)\big) *_k \eta^\alpha(k)\end{aligned} \tag{5.20}$$

où $\mathrm{sgn}^\alpha = \mathrm{sgn} *_y \eta^\delta$ est la régularisation de la fonction sgn définie au Lemme 4.1. On remarque que les trois premiers termes à gauche et le terme à droite de l'inégalité concernent des fonctions continues par rapport à k. Ils convergent donc quand $\alpha\to 0$ pour tout $k\in\mathbb{R}$. Pour le dernier terme, on utilise le fait que $\mathrm{sgn}^\alpha(0)=0$ ce qui nous donne la convergence de $\mathrm{sgn}^\alpha(\rho-k) \underset{\alpha\to 0}{\to} \mathrm{sgn}(\rho-k)$ pour tout k.
On obtient donc le lemme en faisant tendre $\alpha\to 0$.

□

6 Annexe

6.1 Résultats d'analyse

Proposition 6.1 *(Chain rule) Si $f \in W^{1,p}(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $F \in C^1(\mathbb{R})$ avec $F' \in L^\infty(\mathbb{R})$, $F(0) = 0$, alors $F(f) \in W^{1,p}(\Omega)$ et*

$$\frac{\partial F(f)}{\partial x_i} = F'(f)\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \text{Lebesgue pp (pour } i = 1, ..., n)$$

Espaces BV
En dimension 1, les fonctions $u \in L^1(\mathbb{R})$ sont à variation bornée (BV) si elles vérifient : $\exists C > 0$ tel que $|\int_I u\varphi'| \leq C\|\varphi\|_{L^{1'}(I)}$ $\forall\varphi \in C_c^\infty(I)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
En dimension > 1, les fonctions $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ à variation bornée sont caractérisées par $\exists C > 0$ tel que $|\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}| \leq C\|\varphi\|_{L^{1'}(\Omega)}$ $\forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ pour tout $i = 1, ..., n$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$.
En distribution, il s'agit des fonctions de L^1 dont toutes les dérivées premières au sens des distributions sont des mesures bornées.

Théorème 6.2 *Soit E un espace métrique. Toute partie relativement compacte de E est précompacte. La réciproque est vraie si E est complet.*

Théorème 6.3 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tels que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Alors il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) telle que*
(a) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ p.p. sur Ω
(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ $\forall k$ et p.p. sur Ω, avec $h \in L^p(\Omega)$.

Théorème 6.4 *(Théorème d'Ascoli) Soit E un espace métrique compact et F un espace métrique complet. Une famille $\mathcal{F} \subset C^0(E; F)$ qui vérifie*
(a) $\mathcal{F}$ est équicontinue,
(b) $\forall x \in E$, $K_x = \{f(x)/f \in \mathcal{F}\}$ est un sous-ensemble relativement compact de F,
est relativement compact dans $C^0(E; F)$ pour la norme du sup.

Définition famille sommable
Soient E un espace vectoriel normé, I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable de somme $S \in E$ et l'on écrit $S = \sum\limits_{i\in I} x_i$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que, pour toute partie finie K de I contenant J, on ait $\|S - \sum\limits_{i\in K} x_i\| < \varepsilon$.

Lemme 6.5 *Soient E un espace vectoriel normé et $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de E. L'ensemble des $i \in I$ tels que x_i ne soit pas nul est dénombrable.*

Lemme 6.6 *(Lemme de Gronwall) Soient ψ et y deux fonctions continues sur [a,b], avec $\psi \geq 0$, vérifiant l'inégalité*

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leq A + \int_a^t \psi(s)y(s)ds.$$

Alors

$$\forall t \in [a,b], \quad y(t) \leq A\ e^{\int_a^t \psi(s)\ ds}.$$

Proposition 6.7 *Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^D)$ alors $\eta^\delta * f \to f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^D$ où η^δ est une approximation de l'unité définie par*

$$\eta^\delta(y) = \eta(y/\delta)/\delta^D,\ \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^D),\ \int_{\mathbb{R}^D} \eta(y)dy = 1,\ \eta \text{ pair.}$$

6.2 A propos des entropies

On considère la loi de conservation scalaire suivante

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x A(u) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}^D,\ t > 0 & (6.1)\\ u(t=0,x) &= u_0(x) & (6.2) \end{aligned}$$

où $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^D$.

Définition 6.8 Une fonction $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une entropie pour (6.1)-(6.2) s'il existe une fonction $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^D$ tel que $\partial_t\eta(u) + \partial_x G(u) = 0$ est vraie pour toute solution u de (6.1)-(6.2) de classe C^1. Dans le cas où η est C^1, cela revient à trouver G tq $G' = \eta' A'$. Ainsi toute fonction C^1 est une entropie dans le cas scalaire.

Dans le résultat d'unicité de Kružkov, seules les entropies $\eta(u) = |u-k|,\ k \in \mathbb{R}$ associées aux flux $G_j(u) = \mathrm{sgn}(u-k)(A_j(u) - A_j(k))$ suffisent.

Théorème 6.8 *Kružkov*
Soient u et v deux solutions entropiques de (6.1)-(6.2) associées aux données initiales u_0 et $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^D)$, tq $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^D) \cap B([0,T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^D))$ pour tout $T > 0$. Alors en posant

$$M = max\{|A'(\xi)|, |\xi| \leq max(\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^D)}, \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^D)})\}$$

on a pour tout $C > 0$ et pour presque tout $t > 0$

$$\int_{|x|\leq C} |u(t,x) - v(t,x)|\ dx \leq \int_{|x|\leq C+Mt} |u_0(x) - v_0(x)|\ dx$$

ce qui nous donne l'unicité de la solution entropique en prenant les mêmes données initiales.

Voir [6] pour une preuve du théorème.

6.3 Historique

Je cite ici Hilbert lorsqu'il présente son sixième problème intitulé *Mathematical treatment of the axioms of physics.*

"The investigations on the foundations of geometry suggest the problem : To treat in the same manner, by means of axioms, those physical sciences in which mathematics plays an important part ; in the first rank are the theory of probabilities and mechanics.

As to the axioms of the theory of probabilities, it seems to me desirable that their logical investigation should be accompanied by a rigorous and satisfactory development of the method of mean values in mathematical physics, and in particular in the kinetic theory of gases.

Important investigations by physicists on the foundations of mechanics are at hand ; I refer to the writings of Mach, Hertz, Boltzmann and Volkmann. It is therefore very desirable that the discussion of the foundations of mechanics be taken up by mathematicians also. Thus Boltzmann's work on the principles of mechanics suggests the problem of developing mathematically the limiting processes, there merely indicated, which lead from the atomistic view to the laws of motion of continua. Conversely one might try to derive the laws of the motion of rigid bodies by a limiting process from a system of axioms depending upon the idea of continuously varying conditions of a material filling all space continuously, these conditions being defined by parameters. For the question as to the equivalence of different systems of axioms is always of great theoretical interest.

If geometry is to serve as a model for the treatment of physical axioms, we shall try first by a small number of axioms to include as large a class as possible of physical phenomena, and then by adjoining new axioms to arrive gradually at the more special theories. At the same time Lie's a principle of subdivision can perhaps be derived from profound theory of infinite transformation groups. The mathematician will have also to take account not only of those theories coming near to reality, but also, as in geometry, of all logically possible theories. He must be always alert to obtain a complete survey of all conclusions derivable from the system of axioms assumed.

Further, the mathematician has the duty to test exactly in each instance whether the new axioms are compatible with the previous ones. The physicist, as his theories develop, often finds himself forced by the results of his experiments to make new hypotheses, while he depends, with respect to the compatibility of the new hypotheses with the old axioms, solely upon these experiments or upon a certain physical intuition, a practice which in the rigorously logical building up of a theory is not admissible. The desired proof of the compatibility of all assumptions seems to me also of importance, because the effort to obtain such proof always forces us most effectually to an exact formulation of the axioms."

7 Bibliographie

[1] F. Berthelin, N.J. Mauser, F. Poupaud. *High-field limit from a kinetic equation to multidimensional scalar conservation laws.* Prépublication n^o 706, Université de Nice Sophia-Antipolis, Mars 2005, 24 pages.

[2] F. Bouchut, F. Golse., M. Pulvirenti *Kinetic equations and asymptotic theory.* Series in Appl. Math., Gauthiers-Villars, 2000.

[3] H. Brézis. *Analyse Fonctionnelle.* Dunod, Paris, Novembre 2002, 233 pages.

[4] R. DiPerna, P.-L. Lions. *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces.* Invent. Math. 98 (1989), n^o 3, 511-547.

[5] L. Evans, R.F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Studies in Advanced Mathematics, 1992, CRC Press Inc, 268 pages.

[6] E. Godlewski, P.A. Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws.* Ellipses, Mathématiques & Applications, 1991, 252 pages.

[7] X. Gourdon. *Analyse.* Ellipses, Paris, 1994, 417 pages.

[8] P.E. Jabin. *Volumes finis pour les lois de conservation scalaire.* Cours, Master II de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis, Décembre 2005.

[9] T.P. Liu. *Hyperbolic conservation laws with relaxation.* Comm. Math. Phys. 108 (1987), 153-175.

[10] R. Natalini. *Recents results on hyperbolic relaxation problems.* 1998, 66 pages.

[11] B. Perthame. *Equations de transport non linéaires et systèmes hyperboliques - Théorie et méthodes numériques.* Cours 2003-2004, *http://www.dma.ens.fr/~perthame/cours_hyp.pdf*, 77 pages.

[12] B. Perthame, E. Tadmor. *A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws.* Comm. Math. Phys. 136 (1991), 501-517.

[13] F. Poupaud. *Analyse fonctionnelle pour la licence.* Publications pédagogiques, Pupé n^o 49, Université de Nice Sophia-Antipolis, Avril 2003, 60 pages.

[14] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différientiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini, Paris, 2003, 418 pages.

[15] G. Skandalis. *Topologie et analyse 3ème année.* Dunod, Paris, novembre 2004, 324 pages.

[16] A.E. Tzavaras. *Materials with Internal Variables and Relaxation to Conservation Laws.* Arch. Rational Mech. Anal., 146(1999), 129-155.