Conditions de bord entropiques faibles d'une loi de conservation scalaire via la relaxation cinétique

Damien BROIZAT
sous la direction de Florent BERTHELIN

Juin 2007

Contents

1 Introduction

L'objet de ce travail est de traiter la relaxation cinétique d'une loi de conservation scalaire avec condition initiale et condition de bord :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x A(\rho) = 0, \quad t > 0, \quad x > 0 \\ \rho(0,x) = \rho^0(x), \quad x > 0 \\ \rho(t,0) = \rho^b(t), \quad t > 0 \end{array}\right. \tag{1.1}$$

où le flux A est une fonction de classe C^1.

De façon générale, l'intérêt des méthodes de relaxation est le suivant : pour un flux A non linéaire, on "transporte" la non-linéarité de l'opérateur différentiel vers le second membre d'une nouvelle EDP (ou système d'EDP) qui, elle, est linéaire. Par exemple, soit le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x A(\rho) = 0, \quad t > 0, \quad x > 0 \\ \rho(0,x) = \rho^0(x), \quad x > 0 \end{array}\right. \tag{1.2}$$

Un des modèles de relaxation de ce problème est le suivant : on introduit le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \rho_\varepsilon + \partial_x u_\varepsilon = 0, \quad t > 0, \quad x > 0 \\ \\ \partial_t u_\varepsilon + \lambda \partial_x \rho_\varepsilon = \dfrac{A(\rho_\varepsilon) - u_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad t > 0, \quad x > 0 \\ \\ \rho_\varepsilon(0,x) = \rho^0(x), \quad x > 0 \\ \\ u_\varepsilon(0,x) = A(\rho^0(x)), \quad x > 0 \end{array}\right.$$

où $\varepsilon > 0$ est appelé paramètre de relaxation. Nous voyons formellement que lorsque $\varepsilon \to 0$, $A(\rho_\varepsilon) - u_\varepsilon \to 0$ et donc, si $\rho_\varepsilon \to \rho$ on récupère $\partial_t \rho + \partial_x A(\rho) = 0$. Le modèle relaxé semble donc approcher en un certain sens la loi de conservation scalaire (1.2), moyennant la légitimité du passage à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$.

Un modèle de relaxation de (1.2) plus sophistiqué est le modèle cinétique, où l'on introduit une troisième variable ξ pouvant être assimilée à la vitesse instantanée de particules, et une nouvelle inconnue, la densité microscopique $f_\varepsilon(t,x,\xi)$, reliée à une densité macroscopique ρ_ε par : $\rho_\varepsilon(t,x) = \displaystyle\int_\xi f_\varepsilon(t,x,\xi)d\xi$. Ce modèle est le suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t f_\varepsilon + a(\xi)\partial_x f_\varepsilon = \dfrac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \\ f_\varepsilon(0,x,\xi) = f^0(x,\xi), \quad x > 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \end{array}\right. \tag{1.3}$$

où $a = A'$ et où χ est une fonction "d'équilibre" définie comme suit :

Définition 1.1 (Fonction χ) *On note χ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\chi_r(\xi) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq \xi \leq r \\ -1 & si \quad r \leq \xi \leq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

B. Perthame et E. Tadmor ont montré (voir [1]) que le modèle (1.3) approche effectivement (1.2), dans le sens où (1.3) possède des solutions et que leurs densités ρ_ε convergent vers l'unique solution entropique de (1.2). A cet effet, rappelons le théorème suivant:

Théorème 1.2 (Kružkov) *Il existe au plus une solution entropique de la loi de conservation scalaire (1.2), c'est-à-dire une solution vérifiant :*

$$\forall k \in \mathbb{R} \qquad \partial_t|\rho - k| + \partial_x\left(sgn(\rho - k)(A(\rho) - A(k))\right) \leq 0. \tag{1.4}$$

Rappelons également la définition plus générale suivante :

Définition 1.3 (Entropies) *Deux fonctions η et G : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ forment un couple entropie-flux d'entropie pour la loi de conservation scalaire $\partial_t\rho + \partial_x A(\rho) = 0$ si η est convexe et :*

$$\eta' A' = G' \text{ au sens des distributions.}$$

Remarque 1.1 *Nous voyons ainsi que dans le théorème de Kružkov, les entropies en jeu sont :*

$$\forall k \in \mathbb{R} \qquad \eta_k(\rho) = |\rho - k|, \quad G_k(\rho) = sgn(\rho - k)\left(A(\rho) - A(k)\right).$$

Ici, nous adopterons une démarche semblable à [1] en étudiant un modèle de relaxation cinétique avec condition initiale et condition de bord, mais en étant confrontés à la difficulté suivante : en général, le problème

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + a(\xi)\partial_x f_\varepsilon = \dfrac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \\ f_\varepsilon(0, x, \xi) = f^0(x, \xi), \quad x > 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \\ f_\varepsilon(t, 0, \xi) = f^b(t, \xi), \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.5}$$

est mal posé, à cause du signe variable de $a(\xi)$. Par exemple, nous pouvons examiner le système hyperbolique linéaire

$$\begin{cases} \partial_t f + \partial_x f = 0, \quad t > 0, \quad x > 0 \\ \partial_t g - \partial_x g = 0, \quad t > 0, \quad x > 0 \\ f(0, x) = f^0(x), \quad x > 0 \\ f(t, 0) = f^b(t), \quad t > 0 \\ g(0, x) = g^0(x), \quad x > 0 \\ g(t, 0) = g^b(t), \quad t > 0 \end{cases}$$

Nous constatons qu' à cause de la vitesse de transport négative dans la deuxième équation, le problème est mal posé. Ceci nous oblige à considérer une condition de bord moins exigeante que dans l'équation (1.1). Les conditions de bord de notre modèle cinétique ne porteront donc que sur les "vitesses rentrantes", i.e on n'imposera $f(t,0,\xi)=f^b(t,\xi)$ que sur les ξ tels que $a(\xi)>0$.

Mais nous pouvons alors nous demander quelles conditions de bord seront vérifieés par la limite ρ des densités ρ_ε, si celle-ci existe. Pour les deviner, on utilise le résultat suivant : si on "approche" le problème (1.1) par un problème parabolique "visqueux" du type

$$\begin{cases} \partial_t\rho_\varepsilon+\partial_x A(\rho_\varepsilon)=\varepsilon\partial^2_{xx}\rho_\varepsilon, \quad t>0, \quad x>0 \\ \rho_\varepsilon(0,x)=\rho^0(x), \quad x>0 \\ \rho_\varepsilon(t,0)=\rho^b(t), \quad t>0 \end{cases},$$

qui lui est bien posé, on montre que sous certaines hypothèses (notamment l'existence d'une trace forte $\rho(t,0^+)$), la limite ρ recouvre l'inégalité entropique

$$G(\rho(t,0^+))-G(\rho^b(t))-\eta'(\rho^b(t))\left(A(\rho(t,0^+))-A(\rho^b(t))\right)\leq 0,$$

pour tout couple (η,G) entropie-flux.
Nous pouvons donc espérer des conditions de bord entropiques faibles de ce type, sauf que dans notre cas, nous ne pourrons travailler qu'avec des traces faibles, définies en annexe.

Plus précisement, nous allons montrer le théorème suivant :

Théorème 1.4
Soit A un flux de classe C^1, $a=A'$, soient des données $f^0(x,\xi)\in L^1(]0,+\infty[_x\times\mathbb{R}_\xi)$ et $f^b(t,\xi)=\chi_{\rho^b(t)}(\xi)$, où $\rho^b(t)\in L^\infty(]0,T[_t)$, et soit la mesure $d\mu=|a(\xi)|dtd\xi$. On suppose également que f^0 vérifie $\displaystyle\int_\xi \|f^0(.,\xi)\|_{L^\infty_x}d\xi<+\infty$ et qu'elle est à support compact en ξ. Alors :

(i) Pour tout $\varepsilon>0$, le problème cinétique

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon+a(\xi)\partial_x f_\varepsilon=\dfrac{\chi_{\rho_\varepsilon}-f_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad t>0, \quad x>0, \quad \xi\in\mathbb{R} \\ f_\varepsilon(0,x,\xi)=f^0(x,\xi), \quad x>0, \quad \xi\in\mathbb{R} \\ f_\varepsilon(t,0,\xi)=f^b(t,\xi), \quad t>0, \quad a(\xi)>0 \end{cases},$$

où $\rho_\varepsilon(t,x)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t,x,\xi)d\xi$, est bien posé dans
$C^0\left([0,T]_t;L^1(]0,+\infty[_x\times\mathbb{R}_\xi)\right)\cap C^0\left([0,+\infty[_x;L^1_\mu(]0,T[_t\times\mathbb{R}_\xi)\right)$.

(ii) Lorsque $\varepsilon\to 0$, la suite des densités $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ converge dans $L^1_{loc}(]0,T[_t\times]0,+\infty[_x)$ vers l'unique solution entropique ρ de

$$\begin{cases} \partial_t\rho+\partial_x A(\rho)=0, \quad t>0, \quad x>0 \\ \rho(0,x)=\rho^0(x), \quad x>0 \end{cases},$$

où $\rho^0(x) = \displaystyle\int_\xi f^0(x,\xi)d\xi$.

(iii) La solution ρ *vérifie les inégalités entropiques faibles suivantes :*

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad \overline{G_k(\rho)} - G_k(\rho^b) - sgn(\rho^b - k)\left(\overline{A(\rho)} - A(\rho^b)\right) \leq 0,$$

où $G_k(\rho) = sgn(\rho - k)\,(A(\rho) - A(k))$, *et où la notation* $\overline{u}$ *désigne la trace faible de* u.

2 Etude du modèle cinétique

Dans cette première partie, nous étudions les propriétés du modèle (2.1) avec condition initiale et condition de bord pour les vitesses "rentrantes" (i.e $a(\xi) > 0$). Tout d'abord, on montre l'existence (et l'unicité) d'une solution continue en temps et en espace à l'aide d'un théorème de point fixe, puis on verra comment la solution évolue au cours du temps. Enfin, nous obtiendrons des estimations sur les densités macroscopiques ρ_ε.

2.1 Propriétés de la fonction χ

Proposition 2.1 *(i) La fonction* $r \mapsto \chi_r(\xi)$ *est croissante, pour tout* $\xi \in \mathbb{R}$.

(ii) Pour tous réels r *et* ρ *:*

$$\int_\xi |\chi_\rho - \chi_r| d\xi = |\rho - r|.$$

(iii) Pour tout réel ρ *:*

$$\int_\xi a(\xi)\chi_\rho(\xi)d\xi = A(\rho).$$

2.2 Existence de solutions continues en temps et en espace

Théorème 2.2 (Existence de solutions à l'équation cinétique)
Soient $f^0(x,\xi) \in L^1(]0,+\infty[_x \times \mathbb{R}_\xi)$, $f^b(t,\xi) \in L^1_\mu(]0,T[_t \times \mathbb{R}_\xi)$ *et* $d\mu = |a(\xi)|dtd\xi$.
Alors il existe $f_\varepsilon \in C^0\left([0,T]_t; L^1(]0,+\infty[_x \times \mathbb{R}_\xi)\right) \cap C^0\left([0,+\infty[_x; L^1_\mu(]0,T[_t \times \mathbb{R}_\xi)\right)$ *telle que :*

$$\begin{cases} \partial_t f_\varepsilon + a(\xi)\partial_x f_\varepsilon = \dfrac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \\ f_\varepsilon(0,x,\xi) = f^0(x,\xi), \quad x > 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \\ f_\varepsilon(t,0,\xi) = f^b(t,\xi), \quad t > 0, \quad a(\xi) > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\varepsilon > 0$, $a \in C^0(\mathbb{R})$, $\rho_\varepsilon(t,x) = \displaystyle\int_\mathbb{R} f_\varepsilon(t,x,\xi)d\xi$.
De plus, on a la formulation intégrale suivante : $\forall\, x \geq 0$, *pp* $x > 0$, *pp* $\xi \in \mathbb{R}$

$$f_\varepsilon(t,x,\xi) = \left(f^0(x-ta(\xi),\xi)e^{-t/\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-s/\varepsilon}\chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi)ds \right) \mathbb{I}_{\{x>ta(\xi)\}}$$

$$+ \left(f^b(t-x/a(\xi),\xi)e^{-x/\varepsilon a(\xi)} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{x/a(\xi)} e^{-s/\varepsilon}\chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi)ds \right) \mathbb{I}_{\{a(\xi)>0,\, x<ta(\xi)\}}. \tag{2.2}$$

Preuve :
Montrons d'abord l'équivalence entre le problème (2.1) et la formulation intégrale (2.2). Soit une solution du problème

$$f_\varepsilon \in C^0\left([0,T]_t; L^1(]0,+\infty[_x\times\mathbb{R}_\xi)\right) \cap C^0\left([0,+\infty[_x; L^1_\mu(]0,T[_t\times\mathbb{R}_\xi)\right) \subset L^1_{tx\xi}.$$

On approche cette solution par une suite $(f^n_\varepsilon) \in C^1_c\,(]0,T[_t\times]0,+\infty[_x\times\mathbb{R}_\xi)$, i.e $f^n_\varepsilon \xrightarrow{L^1} f_\varepsilon$. Introduisons les courbes caractéristiques, notées $X(s,t,x)$ et définies par :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{ds}(s,t,x) = a(\xi) \\ \\ X(t,t,x) = x \end{cases}$$

où ξ est un réel fixé.

On a donc $X(s,t,x) = (s-t)a(\xi) + x$ et

$$\frac{d}{ds}(e^{s/\varepsilon}f^n_\varepsilon(s,X(s,t,x),\xi)) = e^{s/\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}\chi_{\rho_\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}(f^n_\varepsilon - f_\varepsilon) + g^n_\varepsilon\right) \tag{2.3}$$

où $g^n_\varepsilon = \partial_t(f^n_\varepsilon - f_\varepsilon) + a(\xi)\partial_x(f^n_\varepsilon - f_\varepsilon) \in L^1_{tx\xi}$.

Si $x - ta(\xi) > 0$, on intègre cette égalité entre $s=0$ et $s=t$:

$$\begin{aligned} e^{t/\varepsilon}f^n_\varepsilon(t,x,\xi) - f^n_\varepsilon(0,x-ta(\xi),\xi) \;&=\; \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{s/\varepsilon}\chi_{\rho_\varepsilon(s,x+(s-t)a(\xi))}(\xi)ds \\ &+\; \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{s/\varepsilon}(f^n_\varepsilon - f_\varepsilon)(s,x+(s-t)a(\xi),\xi)ds \\ &+\; \int_0^t e^{s/\varepsilon}g^n_\varepsilon(s,x+(s-t)a(\xi),\xi)ds. \end{aligned}$$

On va passer à la limite dans $L^1_{tx\xi}$ dans cette égalité :

$$e^{t/\varepsilon}f^n_\varepsilon(t,x,\xi) \xrightarrow{L^1} e^{t/\varepsilon}f_\varepsilon(t,x,\xi),$$

$$f^n_\varepsilon(0,x-ta(\xi),\xi) \xrightarrow{L^1} f^0(x-ta(\xi),\xi),$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{s/\varepsilon}(f^n_\varepsilon - f_\varepsilon)(s,x+(s-t)a(\xi),\xi)ds \xrightarrow{L^1} 0.$$

car

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_{s=0}^{t} e^{s/\varepsilon} (f_\varepsilon^n - f_\varepsilon)(s, x + (s-t)a(\xi), \xi) ds \right\|_{L^1_{tx\xi}} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{s=0}^{T} \|f_\varepsilon^n - f_\varepsilon\|_{L^1_{tx\xi}} e^{s/\varepsilon} ds$$

$$= (e^{T/\varepsilon} - 1) \|f_\varepsilon^n - f_\varepsilon\|_{L^1}.$$

Ceci montre que $\displaystyle\int_0^t e^{s/\varepsilon} g_\varepsilon^n(s, x+(s-t)a(\xi), \xi) ds$ possède une limite dans $L^1_{tx\xi}$, lorsque $n \to +\infty$. Or,

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[_t \times]0, +\infty[_x \times \mathbb{R}_\xi) \quad | < g_\varepsilon^n, \varphi > | \leq C(\varphi) \|f_\varepsilon^n - f_\varepsilon\|_{L^1}$$

où

$$C(\varphi) = \max_{supp(\varphi)} |\partial_t \varphi + a(\xi) \partial_x \varphi|$$

donc

$$\int_0^t e^{s/\varepsilon} g_\varepsilon^n(s, x + (s-t)a(\xi), \xi) ds \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0.$$

Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'$, nous obtenons

$$\int_0^t e^{s/\varepsilon} g_\varepsilon^n(s, x + (s-t)a(\xi), \xi) ds \xrightarrow{L^1} 0.$$

Finalement :

$$e^{t/\varepsilon} f_\varepsilon(t, x, \xi) - f^0(x - ta(\xi), \xi) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{s/\varepsilon} \chi_{\rho_\varepsilon(s, x+(s-t)a(\xi))}(\xi) ds,$$

c'est-à-dire

$$e^{t/\varepsilon} f_\varepsilon(t, x, \xi) - f^0(x - ta(\xi), \xi) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{(t-s)/\varepsilon} \chi_{\rho_\varepsilon(t-s, x-sa(\xi))}(\xi) ds. \qquad (2.4)$$

Si $x - ta(\xi) < 0$ et $a(\xi) > 0$, on intègre (2.3) entre $s = t - x/a(\xi)$ et $s = t$:

$$\begin{aligned} e^{t/\varepsilon} f_\varepsilon^n(t, x, \xi) &= e^{t/\varepsilon} e^{-x/\varepsilon a(\xi)} f_\varepsilon^n(t - x/a(\xi), 0, \xi) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{x/a(\xi)} e^{(t-s)/\varepsilon} \chi_{\rho_\varepsilon(t-s, x-sa(\xi))}(\xi) ds \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{x/a(\xi)} e^{(t-s)/\varepsilon} (f_\varepsilon^n - f_\varepsilon)(t-s, x-sa(\xi), \xi) ds \\ &+ \int_0^{x/a(\xi)} e^{(t-s)/\varepsilon} g_\varepsilon^n(t-s, x-sa(\xi), \xi) ds, \end{aligned}$$

et on passe de même à la limite dans $L^1_{tx\xi}$. On obtient

$$e^{t/\varepsilon}f_\varepsilon(t,x,\xi)-e^{t/\varepsilon}e^{-x/\varepsilon a(\xi)}f^b(t-x/a(\xi),\xi)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{x/a(\xi)}e^{(t-s)/\varepsilon}\chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi)ds. \tag{2.5}$$

(2.4) et (2.5) donnent la formule annoncée car la partie $\{(t,x,\xi)\,,x=ta(\xi)\}$ est négligeable dans $]0,T[\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

Réciproquement, si une fonction

$$f_\varepsilon\in C^0\left([0,T]_t;L^1(]0,+\infty[_x\times\mathbb{R}_\xi)\right)\cap C^0\left([0,+\infty[_x;L^1_\mu(]0,T[_t\times\mathbb{R}_\xi)\right)$$

vérifie l'équation intégrale (2.2), alors cette fonction est une solution (faible) du problème (2.1). Pour cela, il suffit de dériver l'équation intégrale dans $\mathcal{D}'$, en observant que

$$\forall s\in[0,T],\quad \partial_t\chi_{\rho_\varepsilon(s,x-(t-s)a(\xi))}(\xi)+a(\xi)\partial_x\chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi)=0\quad\text{dans}\quad {\mathcal{D}'}_{tx\xi}.$$

En effet, pour toute fonction test φ :

$$\begin{aligned}
&-\int_t\int_x\int_\xi\chi_{\rho_\varepsilon(s,x-(t-s)a(\xi))}(\xi)(\partial_t\varphi(t,x,\xi)+a(\xi)\partial_x\varphi(t,x,\xi)))dtdxd\xi\\
=&\ -\int_t\int_y\int_\xi\chi_{\rho_\varepsilon(s,y)}(\xi)\begin{pmatrix} & \partial_t\varphi(t,y+(t-s)a(\xi),\xi)\\ + & a(\xi)\partial_x\varphi(t,y+(t-s)a(\xi),\xi)\end{pmatrix}dtdyd\xi\\
=&\ -\int_y\int_\xi\chi_{\rho_\varepsilon(s,y)}(\xi)\underbrace{\left(\int_t\frac{d}{dt}\varphi(t,y+(t-s)a(\xi),\xi)dt\right)}_{=0}dyd\xi=0.
\end{aligned}$$

Le problème de l'existence (et l'unicité) d'une solution se ramène donc à un problème de point fixe.
On introduit l'espace de Banach $E=C^0([0,T]_t;L^1(]0,+\infty[_x\times\mathbb{R}_\xi))$, muni de la norme $\|f_\varepsilon\|_E=\sup\limits_{0\le t\le T}\int_x\int_\xi|f_\varepsilon(t,x,\xi)|dxd\xi$, et l'application Φ définie par :

$$\Phi(f_\varepsilon)(t,x,\xi)=\left(f^0(x-ta(\xi),\xi)e^{-t/\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-s/\varepsilon}\chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi)ds\right)\mathbb{1}_{\{x>ta(\xi)\}}$$

$$+\left(f^b(t-x/a(\xi),\xi)e^{-x/\varepsilon a(\xi)}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{x/a(\xi)}e^{-s/\varepsilon}\chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi)ds\right)\mathbb{1}_{\{a(\xi)>0,\,x<ta(\xi)\}}.$$

Tout d'abord, observons que Φ est bien définie de E dans E. Fixons $t\in[0,T]$, et soit (t_n) une suite tendant vers t. Nous avons

$$\left\|f^0(x-t_na(\xi),\xi)\mathbb{1}_{\{x>t_na(\xi)\}}-f^0(x-ta(\xi),\xi)\mathbb{1}_{\{x>ta(\xi)\}}\right\|_{L^1_{x\xi}}$$

$$=\int_y\int_\xi\left|f^0(y-(t_n-t)a(\xi),\xi)\mathbb{1}_{\{y>(t_n-t)a(\xi)\}}-f^0(y,\xi)\right|dyd\xi.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Approchons $f^0 \in L^1_{x\xi}$ par $\tilde{f}^0 \in C^0_c(]0, +\infty[_x \times \mathbb{R}_\xi)$, i.e

$$\|f^0 - \tilde{f}^0\|_{L^1_{x\xi}} < \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned} & \left\| f^0(x - t_n a(\xi), \xi) \mathbb{1}_{\{x > t_n a(\xi)\}} - f^0(x - ta(\xi), \xi) \mathbb{1}_{\{x > ta(\xi)\}} \right\|_{L^1_{x\xi}} \\ \leq \; & 2\|f^0 - \tilde{f}^0\|_{L^1} + R(t_n - t). \end{aligned}$$

où

$$R(t_n - t) = \int_y \int_\xi \left| \tilde{f}^0(y - (t_n - t)a(\xi), \xi) \mathbb{1}_{\{y > (t_n - t)a(\xi)\}} - \tilde{f}^0(y, \xi) \right| dy d\xi \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

par convergence dominée. Donc, pour n assez grand :

$$\left\| f^0(x - t_n a(\xi), \xi) \mathbb{1}_{\{x > t_n a(\xi)\}} - f^0(x - ta(\xi), \xi) \mathbb{1}_{\{x > ta(\xi)\}} \right\|_{L^1_{x\xi}} < 3\varepsilon.$$

D'où

$$t \mapsto f^0(x - ta(\xi), \xi) \mathbb{1}_{\{x > ta(\xi)\}} \in E.$$

De même, en approchant $f^b \in L^1_\mu(]0, T[_t \times \mathbb{R}_\xi)$ par $\tilde{f}^b \in C^0_c(]0, T[_t \times \mathbb{R}_\xi)$, nous obtenons

$$t \mapsto f^b(t - x/a(\xi), \xi) \mathbb{1}_{\{a(\xi) > 0,\, x < ta(\xi)\}} \in E.$$

Enfin, la continuité en t des termes définis par une intégrale s'obtient de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \int_x \int_\xi \int_0^{x/a(\xi)} e^{-s/\varepsilon} \left| \chi_{\rho_\varepsilon(t_n - s, x - sa(\xi))}(\xi) \mathbb{1}_{\{a(\xi) > 0,\, x < t_n a(\xi)\}} \right. \\ & \qquad \qquad \left. - \chi_{\rho_\varepsilon(t - s, x - sa(\xi))}(\xi) \mathbb{1}_{\{a(\xi) > 0,\, x < ta(\xi)\}} \right| ds dx d\xi \\ \leq \; & \frac{1}{\varepsilon} \int_y \int_\eta \int_0^t e^{(\sigma - t)/\varepsilon} \left| \chi_{\rho_\varepsilon((t_n - t) + \sigma, y)}(\eta) \mathbb{1}_{\{a(\eta) > 0,\, y < (t_n - t + \sigma)a(\eta)\}} \right. \\ & \qquad \qquad \left. - \chi_{\rho_\varepsilon(\sigma, y)}(\eta) \mathbb{1}_{\{a(\eta) > 0,\, y < \sigma a(\eta)\}} \right| d\sigma dy d\eta \\ \leq \; & \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \int_y e^{(\sigma - t)/\varepsilon} |\rho_\varepsilon(t_n - t + \sigma, y) - \rho_\varepsilon(\sigma, y)| dy d\sigma \\ \leq \; & \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{(\sigma - t)/\varepsilon} \left(\int_y \int_\xi |f_\varepsilon(t_n - t + \sigma, y, \xi) - f_\varepsilon(\sigma, y, \xi)| \, d\xi dy \right) d\sigma \\ \leq \; & (1 - e^{-t/\varepsilon}) \max_{\sigma \in [0, T]} \|f_\varepsilon(t_n - t + \sigma, y, \xi) - f_\varepsilon(\sigma, y, \xi)\|_{L^1_{y\xi}}, \end{aligned}$$

et on conclut en utilisant le fait que $t \mapsto f_\varepsilon(t,x,\xi) \in L^1_{x\xi}$ est continue sur $[0,T]$, donc uniformément continue.

Enfin, Φ est une contraction : Soit $0 \le t \le T$ et $f_\varepsilon, \tilde{f}_\varepsilon \in E$. On a

$$\|\Phi(f_\varepsilon)(t,.,.) - \Phi(\tilde{f}_\varepsilon)(t,.,.)\|_{L^1_{x\xi}} = \int_x \int_\xi \left| \Phi(f_\varepsilon)(t,x,\xi) - \Phi(\tilde{f}_\varepsilon)(t,x,\xi) \right| dx d\xi$$

$$\begin{aligned}
&\le \frac{1}{\varepsilon} \int_x \int_\xi \left(\int_0^t e^{-s/\varepsilon} \left| \chi_{\rho_\varepsilon} - \chi_{\tilde{\rho_\varepsilon}} \right| (t-s, x-sa(\xi), \xi) ds \right) \mathbb{1}_{\{x > ta(\xi)\}} dx d\xi \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} \int_x \int_\xi \left(\int_0^{x/a(\xi)} e^{-s/\varepsilon} \left| \chi_{\rho_\varepsilon} - \chi_{\tilde{\rho_\varepsilon}} \right| (t-s, x-sa(\xi), \xi) ds \right) \mathbb{1}_{\{a(\xi)>0,\, x<ta(\xi)\}} dx d\xi \\
&\le \frac{1}{\varepsilon} \int_x \int_\xi \left(\int_0^t e^{-s/\varepsilon} \left| \chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi) - \chi_{\tilde{\rho_\varepsilon}(t-s,x-sa(\xi))}(\xi) \right| ds \right) dx d\xi \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(\int_x \int_\xi \left| \chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi) - \chi_{\tilde{\rho_\varepsilon}(t-s,x-sa(\xi))}(\xi) \right| dx d\xi \right) e^{-s/\varepsilon} ds \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(\int_y \int_\eta \left| \chi_{\rho_\varepsilon(t-s,y)}(\eta) - \chi_{\tilde{\rho_\varepsilon}(t-s,y)}(\eta) \right| dy d\eta \right) e^{-s/\varepsilon} ds \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(\int_y \left| \rho_\varepsilon(t-s,y) - \tilde{\rho_\varepsilon}(t-s,y) \right| dy \right) e^{-s/\varepsilon} ds \\
&\le \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(\int_y \int_\xi \left| f_\varepsilon(t-s,y,\xi) - \tilde{f}_\varepsilon(t-s,y,\xi) \right| d\xi dy \right) e^{-s/\varepsilon} ds \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \left(\int_x \int_\xi |f_\varepsilon(s,x,\xi) - \tilde{f}_\varepsilon(s,x,\xi)| d\xi dx \right) e^{(s-t)/\varepsilon} ds \\
&\le (1 - e^{-t/\varepsilon}) \sup_{0 \le t \le T} \|f_\varepsilon(t,.,.) - \tilde{f}_\varepsilon(t,.,.)\|_{L^1_{x\xi}} \\
&\le (1 - e^{-T/\varepsilon}) \|f_\varepsilon - \tilde{f}_\varepsilon\|_E \quad .
\end{aligned}$$

En prenant le sup pour $0 \le t \le T$, on obtient :

$$\|\Phi(f_\varepsilon) - \Phi(\tilde{f}_\varepsilon)\|_E \le \underbrace{(1 - e^{-T/\varepsilon})}_{<1} \|f_\varepsilon - \tilde{f}_\varepsilon\|_E \quad .$$

On a donc obtenu l'existence (et l'unicité) d'une solution continue en temps, ie $f_\varepsilon \in C^0([0,T]_t; L^1(]0,+\infty[_x \times \mathbb{R}_\xi))$ telle que $\Phi(f_\varepsilon) = f_\varepsilon$.

Reste à montrer que cette solution est aussi continue en espace. Ceci est clair car $f_\varepsilon = \Phi(f_\varepsilon) \in C^0([0,+\infty[_x; L^1_\mu(]0,T[_t \times \mathbb{R}_\xi))$ par les mêmes arguments qui ont servi à montrer la continuité en temps. Le théorème est ainsi démontré.

Nous pouvons en outre obtenir des informations utiles sur la solution grâce à (2.2), comme le montrent les deux remarques suivantes.

Remarque 2.1 (Dépendance de la solution par rapport aux données) *Soient f_ε et g_ε deux solutions, de données initiales $f^0(x,\xi)$, resp. $g^0(x,\xi)$ et de données de bord $f^b(t,\xi)$, resp. $g^b(t,\xi)$. Nous avons :*

$$
\begin{aligned}
& \|f_\varepsilon(t,.,.) - g_\varepsilon(t,.,.)\|_{L^1_{x\xi}} \\
\leq \quad & (1-e^{-t/\varepsilon}) \sup_{0\leq t\leq T} \|f_\varepsilon(t,.,.) - g_\varepsilon(t,.,.)\|_{L^1_{x\xi}} \\
+ \quad & e^{-t/\varepsilon} \int_x \int_\xi |f^0(x-ta(\xi),\xi) - g^0(x-ta(\xi),\xi)| \mathbb{1}_{\{x>ta(\xi)\}} dx d\xi \\
+ \quad & \int_x \int_\xi |f^b(t-x/a(\xi),\xi) - g^b(t-x/a(\xi),\xi)| e^{-x/\varepsilon a(\xi)} \mathbb{1}_{\{a(\xi)>0,\, x<ta(\xi)\}} dx d\xi \\
\leq \quad & (1-e^{-t/\varepsilon}) \sup_{0\leq t\leq T} \|f_\varepsilon(t,.,.) - g_\varepsilon(t,.,.)\|_{L^1_{x\xi}} \\
+ \quad & e^{-t/\varepsilon} \int_{y=0}^{+\infty} \int_\xi |f^0(y,\xi) - g^0(y,\xi)| dy d\xi \\
+ \quad & \int_{y=0}^{t} \int_\xi |f^b(y,\xi) - g^b(y,\xi)| e^{(y-t)/\varepsilon} a(\xi) \mathbb{1}_{\{a(\xi)>0\}} dy d\xi \\
= \quad & (1-e^{-t/\varepsilon}) \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_E \\
+ \quad & e^{-t/\varepsilon} \left(\|f^0 - g^0\|_{L^1_{x\xi}} + \int_{y=0}^{t} \int_\xi |f^b(y,\xi) - g^b(y,\xi)| e^{y/\varepsilon} a(\xi) \mathbb{1}_{\{a(\xi)>0\}} dy d\xi \right).
\end{aligned}
$$

En multipliant par $e^{t/\varepsilon}$ et en prenant le sup en $0 \leq t \leq T$, il vient

$$
\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_E \leq \|f^0 - g^0\|_{L^1_{x\xi}} + \int_{y=0}^{T} \int_{\xi,\, a(\xi)>0} |f^b(y,\xi) - g^b(y,\xi)| e^{y/\varepsilon} a(\xi) dy d\xi.
$$

Cette inégalité pourrait sans doute donner des estimations BV sur la solution, mais la difficulté serait d'obtenir des estimations uniformes en ε.

Remarque 2.2 (Bornes L^∞_x) *Soient t et ξ fixés.*

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(t,x,\xi)| &\le \left(e^{-t/\varepsilon}|f^0(x-ta(\xi),\xi)| + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-s/\varepsilon}ds\right)\mathbb{1}_{\{x>ta(\xi)\}} \\
&+ \left(e^{-x/\varepsilon a(\xi)}|f^b(t-x/a(\xi),\xi)| + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{x/a(\xi)} e^{-s/\varepsilon}ds\right)\mathbb{1}_{\{a(\xi)>0,\, x<ta(\xi)\}} \\
&\le e^{-t/\varepsilon}\sup_{x>ta(\xi)}|f^0(x-ta(\xi),\xi)| + (1-e^{-t/\varepsilon})\mathbb{1}_{\{x>ta(\xi)\}} \\
&+ e^{-x/\varepsilon a(\xi)}\sup_{x<ta(\xi)}|f^b(t-x/a(\xi),\xi)|\mathbb{1}_{\{a(\xi)>0\}} \\
&+ (1-e^{-x/\varepsilon a(\xi)})\mathbb{1}_{\{a(\xi)>0,\, x<ta(\xi)\}} \\
&\le e^{-t/\varepsilon}\|f^0(.,\xi)\|_{L^\infty_x} + \|f^b(.,\xi)\|_{L^\infty_t}\mathbb{1}_{\{a(\xi)>0\}} + (1-e^{-t/\varepsilon}).
\end{aligned}$$

En prenant le sup en $x>0$, il vient

$$\begin{aligned}
\|f_\varepsilon(t,.,\xi)\|_{L^\infty_x} &\le e^{-t/\varepsilon}\|f^0(.,\xi)\|_{L^\infty_x} + \|f^b(.,\xi)\|_{L^\infty_t}\mathbb{1}_{\{a(\xi)>0\}} + (1-e^{-t/\varepsilon}) \\
&\le \|f^0(.,\xi)\|_{L^\infty_x} + \|f^b(.,\xi)\|_{L^\infty_t} + 1.
\end{aligned}$$

A ce stade, on sait donc que la solution est uniformément bornée en ε et t si les données sont bornées.

2.3 Conservation du support compact en ξ

Dans ce paragraphe, nous allons, grâce à des estimations plus fines (via la convexité), donner des bornes sur la densité ρ_ε, qui permettront de conserver le support compact de f_ε en la variable cinétique ξ. De plus, nous verrons que ces bornes sont en fait uniformes en ε.

Proposition 2.3
On suppose que $\displaystyle\int_\xi \|f^0(.,\xi)\|_{L^\infty_x}d\xi < +\infty$ *et* $\displaystyle\int_\xi \|f^b(.,\xi)\|_{L^\infty([0,T])}d\xi < +\infty$. *Alors :*

(i) $\rho_\varepsilon(t,x)$ est bornée sur $[0,T]\times[0;+\infty[$:

$$\|\rho_\varepsilon(t,x)\|_{L^\infty} \le \rho^\varepsilon_\infty \quad \text{où} \quad \rho^\varepsilon_\infty = \|f^0\|_{L^1(\mathbb{R}_\xi;L^\infty(]0,+\infty[_x))} + e^{T/\varepsilon}\|f^b\|_{L^1(\mathbb{R}_\xi;L^\infty([0,T]_t))}.$$

(ii) On suppose que la donnée initiale et la donnée au bord sont à support compact en ξ. Alors, pour tout $t\in[0,T]$, $f_\varepsilon(t)$ reste à support compact en ξ et on a :

$$supp_\xi(f_\varepsilon(t)) \subset supp_\xi(f^0)\cup supp_\xi(f^b)\cup[-\rho^\varepsilon_\infty,\rho^\varepsilon_\infty].$$

Preuve :
On réécrit d'abord f_ε sous la forme d'une combinaison convexe.

Si $x > ta(\xi)$,

$$f_\varepsilon(t,x,\xi) = e^{-t/\varepsilon} f^0(x-ta(\xi),\xi) + (1-e^{-t/\varepsilon}) \frac{\int_0^t e^{-s/\varepsilon} \chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi)ds}{\int_0^t e^{-s/\varepsilon}ds}.$$

Nous avons donc, pour toute fonction convexe $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$U(f_\varepsilon) \leq e^{-t/\varepsilon} U(f^0(x-ta(\xi),\xi)) + (1-e^{-t/\varepsilon}) U\left(\frac{\int_0^t e^{-s/\varepsilon} \chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi)ds}{\int_0^t e^{-s/\varepsilon}ds} \right).$$

Or, par la formule de Jensen,

$$U\left(\frac{\int_0^t e^{-s/\varepsilon} \chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi)ds}{\int_0^t e^{-s/\varepsilon}ds} \right) \leq \frac{\int_0^t e^{-s/\varepsilon} U(\chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi))ds}{\int_0^t e^{-s/\varepsilon}ds}.$$

Donc si $x > ta(\xi)$:

$$U(f_\varepsilon(t,x,\xi)) \leq e^{-t/\varepsilon} U(f^0(x-ta(\xi),\xi)) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-s/\varepsilon} U(\chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi))ds.$$

Si $a(\xi) > 0$ et $x < ta(\xi)$, on obtient de même :

$$U(f_\varepsilon(t,x,\xi)) \leq e^{-x/\varepsilon a(\xi)} U(f^b(t-x/a(\xi),\xi)) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{x/a(\xi)} e^{-s/\varepsilon} U(\chi_{\rho_\varepsilon(t-s,x-sa(\xi))}(\xi))ds.$$

Choisissons maintenant $U(f) = |f|^p$ où $p \in [1,+\infty[$ et prenons le sup en $x \in [0,r]$ où $r > 0$:

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon(t,.,\xi)\|^p_{L^\infty([0,r])} &\leq max\left(e^{-t/\varepsilon} \|f^0(.,\xi)\|^p_{L^\infty([0,r-ta(\xi)])}, \|f^b(.,\xi)\|^p_{L^\infty([0,t])} \right) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-s/\varepsilon} \|\chi_{\rho_\varepsilon(t-s,.)}(\xi)\|_{L^\infty([0,r-sa(\xi)])} ds. \end{aligned}$$

On intègre ensuite l'inéquation en ξ, mais pour cela, on est obligé de majorer grossièrement le max par la somme :

$$\begin{aligned} \int_\xi \|f_\varepsilon(t,.,\xi)\|^p_{L^\infty([0,r])} d\xi &\leq e^{-t/\varepsilon} \int_\xi \|f^0(.,\xi)\|^p_{L^\infty([0,r-ta(\xi)])} d\xi \\ &+ \int_\xi \|f^b(.,\xi)\|^p_{L^\infty([0,t])} d\xi \\ &+ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{-s/\varepsilon} \left(\int_\xi \|\chi_{\rho_\varepsilon(t-s,.)}(\xi)\|_{L^\infty([0,r-sa(\xi)])} d\xi \right) ds. \end{aligned}$$

Or, $\|\chi_{\rho_\varepsilon(t-s,.)}(\xi)\|_{L^\infty([0,r-sa(\xi)])} \leq \chi_{\|\rho_\varepsilon(t-s,.)\|_{L^\infty([0,r-sa(\xi)])}}(\xi)$, donc

$$\begin{aligned}
\int_\xi \|\chi_{\rho_\varepsilon(t-s,.)}(\xi)\|_{L^\infty([0,r-sa(\xi)])} d\xi &\leq \int_\xi \chi_{\|\rho_\varepsilon(t-s,.)\|_{L^\infty([0,r-sa(\xi)])}}(\xi) d\xi \\
&\leq \int_\xi \chi_{\|\rho_\varepsilon(t-s,.)\|_{L^\infty([0,r+sa_\infty(t-s)])}}(\xi) d\xi \\
&= \|\rho_\varepsilon(t-s,.)\|_{L^\infty([0,r+sa_\infty(t-s)])} \\
&\leq \int_\xi \|f_\varepsilon(t-s,.,\xi))\|_{L^\infty([0,r+sa_\infty(t-s)])} \\
&\leq \max_{0\leq s\leq t}\left(\int_\xi \|f_\varepsilon(t-s,.,\xi))\|_{L^\infty([0,r+sa_\infty(t-s)])}\right),
\end{aligned}$$

où $a_\infty(t) = sup\,\{|a(\xi)|, \xi \in \ supp_\xi(f_\varepsilon(t))\}$.

Remarque 2.3 *Ainsi définie, $a_\infty(t)$, qui est la vitesse maximale de propagation, dépend à priori de t, de ε, et peut prendre la valeur $+\infty$. Nous verrons cependant en (ii) que cette vitesse est finie et qu'elle ne dépend pas de $t \in [0,T]$, puis à la proposition suivante qu'elle ne dépend pas non plus de ε.*

D'où

$$\begin{aligned}
\int_\xi \|f_\varepsilon(t,.,\xi)\|^p_{L^\infty([0,r])} d\xi &\leq e^{-t/\varepsilon}\int_\xi \|f^0(.,\xi)\|^p_{L^\infty([0,r+ta_\infty(0)])} d\xi \\
&+ \int_\xi \|f^b(.,\xi)\|^p_{L^\infty([0,t])} d\xi \\
&+ (1-e^{-t/\varepsilon})\max_{0\leq s\leq t}\left(\int_\xi \|f_\varepsilon(s,.,\xi)\|_{L^\infty([0,r+(t-s)a_\infty(s)])} d\xi\right).
\end{aligned}$$

En prenant la racine p^e et en faisant tendre $p \to +\infty$, nous obtenons

$$\|f_\varepsilon(t)\|_{L^\infty([0,r]_x\times\mathbb{R}_\xi)} \leq \max\left(\|f^0\|_{L^\infty([0,r+ta_\infty(0)]_x\times\mathbb{R}_\xi)}, \|f^b\|_{L^\infty([0,t]\times\mathbb{R}_\xi)}, 1\right).$$

Remarque 2.4 *Nous avons en particulier retrouvé que si les données f^0 et f^b sont bornées, alors $f_\varepsilon(t)$ est uniformément bornée (en ε et t) dans $L^\infty(]0,+\infty[_x\times\mathbb{R}_\xi)$:*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \forall t \in [0,T] \qquad \|f_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(]0,+\infty[_x\times\mathbb{R}_\xi)} \leq C \tag{2.6}$$

où $C = \max(\|f^0\|_{L^\infty(]0,+\infty[_x\times\mathbb{R}_\xi)}, \|f^b\|_{L^\infty(]0,T[_t\times\mathbb{R}_\xi)}, 1)$.

Si maintenant on fixe $p = 1$ et que l'on pose

$$F(s) = \int_\xi \|f_\varepsilon(s,.,\xi)\|_{L^\infty([0,r+(t-s)a_\infty(s)])} d\xi,$$

on obtient

$$F(t) \leq e^{-t/\varepsilon} F(0) + (1 - e^{-t/\varepsilon}) \max_{0\leq s\leq t} F(s) + \int_\xi \|f^b(.,\xi)\|_{L^\infty([0,t])} d\xi$$

et donc

$$\begin{aligned} e^{t/\varepsilon} F(t) &\leq F(0) + (e^{t/\varepsilon} - 1) \max_{0\leq s\leq t} F(s) + e^{t/\varepsilon} \int_\xi \|f^b(.,\xi)\|_{L^\infty([0,t])} d\xi \\ &\leq F(0) + (e^{T/\varepsilon} - 1) \max_{0\leq s\leq T} F(s) + e^{T/\varepsilon} \int_\xi \|f^b(.,\xi)\|_{L^\infty([0,T])} d\xi. \end{aligned}$$

Ceci amène

$$\max_{0\leq s\leq T} (e^{s/\varepsilon} F(s)) \leq F(0) + \max_{0\leq s\leq T} (e^{T/\varepsilon} F(s) - F(s)) + e^{T/\varepsilon} \int_\xi \|f^b(.,\xi)\|_{L^\infty([0,T])} d\xi$$

d'où

$$F(T) \leq \max_{0\leq s\leq T} ((1 + e^{s/\varepsilon} - e^{T/\varepsilon}) F(s)) \leq F(0) + e^{T/\varepsilon} \int_\xi \|f^b(.,\xi)\|_{L^\infty([0,T])} d\xi.$$

Le réel positif T étant quelconque on a montré le résultat :

$$\forall t \in [0,T] \qquad F(t) \leq F(0) + e^{t/\varepsilon} \int_\xi \|f^b(.,\xi)\|_{L^\infty([0,t])} d\xi,$$

c'est-à-dire

$$\int_\xi \|f_\varepsilon(t,.,\xi)\|_{L^\infty([0,r])} d\xi \leq \int_\xi \|f^0(.,\xi)\|_{L^\infty([0,r+ta_\infty(0)])} d\xi + e^{T/\varepsilon} \int_\xi \|f^b(.,\xi)\|_{L^\infty([0,T])} d\xi.$$

En particulier, cela nous donne la borne L^∞ annoncée sur la densité $\rho_\varepsilon(t,x)$, d'où (i). Enfin, (ii) est évident en utilisant la formulation intégrale (2.2) et (i).

Remarque 2.5 *Comme annoncé à la remarque précédente, nous avons montré que l'information se propage à vitesse finie* $\leq a_\infty$*, où*

$$a_\infty = \max\left(|a(\xi)|, \quad \xi \in supp_\xi(f^0) \cup supp_\xi(f^b) \cup [-\rho_\infty^\varepsilon, \rho_\infty^\varepsilon]\right).$$

Montrons maintenant que $supp_\xi(f_\varepsilon(t))$ est borné indépendamment du paramètre de relaxation ε.

Proposition 2.4 (Uniformité en ε du support en ξ)
On suppose que les données f^0 et f^b vérifient :

$$\int_\xi \|f^0(.,\xi)\|_{L^\infty_x} d\xi < +\infty, \qquad \int_\xi \|f^b(.,\xi)\|_{L^\infty([0,T])} d\xi < +\infty$$

et sont à support compact en ξ. Alors, il existe un compact K tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0,T]$, $supp_\xi(f_\varepsilon(t)) \subset K$.

Ebauche de preuve :
Elle repose sur l'inégalité :

$$\forall M \in \mathbb{R} \qquad \partial_t \int_\xi |f_\varepsilon| S_M(\xi) d\xi + \partial_x \int_\xi a(\xi)|f_\varepsilon| S_M(\xi) d\xi \leq 0$$

où $S_M(\xi) = (\xi - M)_+^2$.
On "intègre" cette inégalité en x, puis en t, on obtient, pour tout $t \in [0,T]$:

$$\iint |f_\varepsilon(t,x,\xi)| S_M(\xi) dx d\xi \leq \iint |f^0(x,\xi)| S_M(\xi) dx d\xi + \iint a(\xi)|f^b(s,\xi)| S_M(\xi) ds d\xi.$$

Ainsi, si on choisit M tel que $supp_\xi(f^0) \subset [-M, M]$, on a :
$|f_\varepsilon(0,x,\xi)| S_M(\xi) = 0$, et donc $|f_\varepsilon(t,x,\xi)| S_M(\xi) = 0$. D'où : $f_\varepsilon(t,x,\xi) = 0$ si $\xi \geq M$.
En procédant de même avec la fonction $\tilde{S_M}(\xi) = (\xi - M)_-^2$, on obtient l'existence d'un $\tilde{M}$ tel que $\xi \leq \tilde{M}$ entraîne $f_\varepsilon(t,x,\xi) = 0$.

Corollaire 2.5 *La famille des densités macroscopiques $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(]0,T[_t \times]0,+\infty[_x)$.*

3 Convergence vers la solution entropique de la loi de conservation scalaire

Nous allons maintenant montrer que le modèle cinétique "approche" bien la loi de consevation scalaire, lorsque le paramètre de relaxation ε tend vers 0. Pour cela, on va utiliser des techniques de "compacité par compensation", qui seront valides grâce à des inégalités d'entropies cinétiques et aux bornes uniformes fournies par la section précédente.

3.1 Fonctions d'entropie cinétiques

Proposition 3.1 *Les fonctions $|f_\varepsilon - \chi_k|$, pour $k \in \mathbb{R}$, vérifient l'inégalité d'entropie suivante :*

$$\partial_t \int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi + \partial_x \int_\xi a(\xi)|f_\varepsilon - \chi_k| d\xi \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(|\rho_\varepsilon - k| - \int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi\right) \leq 0. \tag{3.1}$$

Preuve :
Elle s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 3.2 (Multiplication par la fonction signe)

$$\forall k \in \mathbb{R} \qquad \partial_t|f_\varepsilon - \chi_k| + a(\xi)\partial_x|f_\varepsilon - \chi_k| = sgn(f_\varepsilon - \chi_k)\frac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon} \qquad (dans\, \mathcal{D}'). \tag{3.2}$$

Preuve du lemme :
Notons $g = \dfrac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon} \in L^1_{tx\xi}$.

On a $f_\varepsilon \in C^0([0,T]_t; L^1(]0,+\infty[_x \times \mathbb{R}_\xi)) \subset L^1_{tx\xi}$. Approchons f_ε par une suite $(f_\varepsilon^n) \in \mathcal{D}(]0,T[_t \times]0,+\infty[_x \times \mathbb{R}_\xi)$. De plus, on va approcher la valeur absolue par une suite de fonctions C^1 :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall j \quad 0 \le \beta_j(x) \le |x|, \quad |\beta_j'(x)| \le 2, \quad \beta_j'(0) = 0,$$

$$\beta_j(x) \to |x|, \quad \beta_j'(x) \to sgn(x), \quad \text{lorsque} \quad j \to +\infty.$$

Nous avons

$$\partial_t(\beta_j(f_\varepsilon^n - \chi_k)) + a(\xi)\partial_x(\beta_j(f_\varepsilon^n - \chi_k)) = \beta_j'(f_\varepsilon^n - \chi_k)(g + R_n),$$

où $R_n = \partial_t(f_\varepsilon^n - f_\varepsilon) + a(\xi)\partial_x(f_\varepsilon^n - f_\varepsilon) \overset{\mathcal{D}'}{\to} 0$.

On remarque aussi que $R_n = \partial_t f_\varepsilon^n + a(\xi)\partial_x f_\varepsilon^n + g$, donc $R_n \in L^1_{tx\xi}$.

On fait maintenant tendre $n \to +\infty$.

Les (β_j) étant lipschitziennes, on a

$$\beta_j(f_\varepsilon^n - \chi_k) \overset{L^1_{loc}}{\to} \beta_j(f_\varepsilon - \chi_k)$$

donc

$$\partial_t(\beta_j(f_\varepsilon^n - \chi_k)) + a(\xi)\partial_x(\beta_j(f_\varepsilon^n - \chi_k)) \overset{\mathcal{D}'}{\to} \partial_t(\beta_j(f_\varepsilon - \chi_k)) + a(\xi)\partial_x(\beta_j(f_\varepsilon - \chi_k)).$$

D'autre part, pour toute fonction test φ,

$$\iiint \beta_j'(f_\varepsilon^n - \chi_k)g\varphi \to \iiint \beta_j'(f_\varepsilon - \chi_k)g\varphi$$

par convergence dominée (quitte à extraire une sous suite $f_\varepsilon^{\sigma(n)} \overset{pp}{\to} f_\varepsilon$), donc

$$\beta_j'(f_\varepsilon^n - \chi_k)g \overset{\mathcal{D}'}{\to} \beta_j'(f_\varepsilon - \chi_k)g.$$

Enfin, $\beta_j'(f_\varepsilon^n - \chi_k)R_n \overset{\mathcal{D}'}{\to} 0$ donc

$$\partial_t(\beta_j(f_\varepsilon - \chi_k)) + a(\xi)\partial_x(\beta_j(f_\varepsilon - \chi_k)) = \beta_j'(f_\varepsilon - \chi_k)g.$$

Reste à faire tendre $j \to +\infty$. Le membre de gauche ne pose aucun problème, on obtient par convergence dominée :

$$\partial_t(\beta_j(f_\varepsilon - \chi_k)) + a(\xi)\partial_x(\beta_j(f_\varepsilon - \chi_k)) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \partial_t|f_\varepsilon - \chi_k| + a(\xi)\partial_x|f_\varepsilon - \chi_k|.$$

Pour le membre de droite, on contourne l'obstacle de la discontinuité de la fonction signe en 0 puisque pour tout j, $\beta_j'(0) = 0$. Donc par convergence dominée :

$$\beta_j'(f_\varepsilon - \chi_k)g \xrightarrow{\mathcal{D}'} sgn(f_\varepsilon - \chi_k)g.$$

Finalement,

$$\partial_t|f_\varepsilon - \chi_k| + a(\xi)\partial_x|f_\varepsilon - \chi_k| = sgn(f_\varepsilon - \chi_k)g.$$

D'où le lemme.

Nous pouvons maintenant montrer la proposition.

Pour cela, il suffit "d'intégrer l'équation (3.2) en ξ".
Soit $\phi(t,x) \in \mathcal{D}(]0,T[_t \times]0,+\infty[_x)$. Soit également $(\theta_n(\xi))_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi)$ qui converge presque partout vers la fonction constante égale à 1. Pour tout n, on définit $\varphi_n(t,x,\xi) := \phi(t,x)\theta_n(\xi) \in \mathcal{D}(]0,T[_t \times]0,+\infty[_x \times \mathbb{R}_\xi)$. D'après le lemme :

$$-\iiint |f_\varepsilon - \chi_k|(\partial_t\varphi_n + a(\xi)\partial_x\varphi_n)dtdxd\xi = \iiint sgn(f_\varepsilon - \chi_k)\frac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}\varphi_n dtdxd\xi$$

c'est-à-dire

$$-\iiint |f_\varepsilon - \chi_k|(\partial_t\phi + a(\xi)\partial_x\phi)\theta_n dtdxd\xi = \iiint sgn(f_\varepsilon - \chi_k)\frac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}\phi\theta_n dtdxd\xi.$$

On passe à la limite lorsque $n \to +\infty$ par convergence dominée. On obtient ainsi

$$-\iiint |f_\varepsilon - \chi_k|(\partial_t\phi + a(\xi)\partial_x\phi)dtdxd\xi = \iiint sgn(f_\varepsilon - \chi_k)\frac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}\phi dtdxd\xi,$$

c'est-à-dire

$$< \partial_t \int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k|d\xi + \partial_x \int_\xi a(\xi)|f_\varepsilon - \chi_k|d\xi, \phi > = < \int_\xi sgn(f_\varepsilon - \chi_k)\frac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}d\xi, \phi >,$$

et donc, dans $\mathcal{D}'(]0,T[_t \times]0,+\infty[_x)$:

$$\partial_t \int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k|d\xi + \partial_x \int_\xi a(\xi)|f_\varepsilon - \chi_k|d\xi = \int_\xi sgn(f_\varepsilon - \chi_k)\frac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}d\xi. \quad (3.3)$$

Or,

$$\begin{aligned}
& \int_\xi sgn(f_\varepsilon - \chi_k)\frac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon} d\xi \\
= \ & \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_\xi sgn(f_\varepsilon - \chi_k)(\chi_{\rho_\varepsilon} - \chi_k) d\xi + \int_\xi sgn(f_\varepsilon - \chi_k)(\chi_k - f_\varepsilon) d\xi\right) \\
\leq \ & \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_\xi |\chi_{\rho_\varepsilon} - \chi_k| d\xi + \int_\xi sgn(f_\varepsilon - \chi_k)(\chi_k - f_\varepsilon) d\xi)\right) \\
= \ & \frac{1}{\varepsilon}\left(|\rho_\varepsilon - k| - \int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi\right) \leq 0
\end{aligned}$$

car

$$|\rho_\varepsilon - k| = \left|\int_\xi f_\varepsilon d\xi - \int_\xi \chi_k d\xi\right| \leq \int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi.$$

Ceci termine la preuve de la proposition.

3.2 Convergence vers la solution entropique de Kružkov

Théorème 3.3 *On suppose que les données f^0 et f^b vérifient*

$$\int_\xi \|f^0(.,\xi)\|_{L^\infty_x} d\xi < +\infty, \qquad \int_\xi \|f^b(.,\xi)\|_{L^\infty([0,T])} d\xi < +\infty,$$

et sont à support compact en ξ. Alors il existe une sous-suite de la famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge dans $L^\infty(]0,T[_t \times]0,+\infty[_x)$ pour la topologie faible $\star$ vers une solution ρ de la loi de conservation scalaire.

Preuve :
On commence par intégrer l'équation en ξ. Ceci s'effectue comme à la proposition précédente, en approchant la fonction constante égale à 1. On obtient ainsi :

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \partial_x \int_\xi a(\xi) f_\varepsilon d\xi = 0. \tag{3.4}$$

En outre, l'inégalité d'entropie (3.1) nous montre que la distribution $T_\varepsilon := \partial_t \int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi + \partial_x \int_\xi a(\xi)|f_\varepsilon - \chi_k| d\xi$ est négative, donc c'est une mesure borélienne. D'autre part, cette distribution est bornée en ε dans $W^{-1,\infty}(]0,T[_t \times]0,+\infty[_x)$. En effet, d'après (2.6) :

$$\int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi \leq \|f_\varepsilon(t)\|_{L^\infty_{x\xi}} mes(K) + |k| \leq C\, mes(K) + |k|$$

et

$$\int_\xi a(\xi)|f_\varepsilon - \chi_k| d\xi \leq \left(\max_{\xi \in K \cup [-|k|,|k|]} |a(\xi)| \right) (C\, mes(K) + |k|).$$

D'après le lemme de Murat, on obtient ainsi que $(T_\varepsilon)_\varepsilon$ est relativement compacte dans $H^{-1}_{loc}(]0,T[_t \times]0,+\infty[_x)$. Ceci va nous permettre d'utiliser le résultat de "compacité par compensation" connu sous le nom de lemme "div-curl".
En notant donc

$$a_\varepsilon := \rho_\varepsilon \qquad b_\varepsilon := \int_\xi a(\xi) f_\varepsilon d\xi$$

$$c_\varepsilon := \int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi \qquad d_\varepsilon := \int_\xi a(\xi)|f_\varepsilon - \chi_k| d\xi,$$

on obtient, en notant par des barres les limites L^∞ faible $\star$ des quantités (quitte à extraire des sous-suites) :

$$\overline{a_\varepsilon d_\varepsilon} - \overline{b_\varepsilon c_\varepsilon} = \overline{a_\varepsilon}\,\overline{d_\varepsilon} - \overline{b_\varepsilon}\,\overline{c_\varepsilon}$$

ou encore

$$\overline{(a_\varepsilon - \overline{a_\varepsilon}) d_\varepsilon} = \overline{c_\varepsilon (b_\varepsilon - \overline{b_\varepsilon})}. \tag{3.5}$$

(Toutes ces limites faibles $\star$ existent car les quantités en jeu sont bornées en ε dans $L^\infty(]0,T[_t \times]0,+\infty[_x))$.

Pour calculer ces limites, on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.4 *(i) Pour tout réel k,*

$$\int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi - |\rho_\varepsilon - k| \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad dans \quad L^1_{loc}(]0,T[_t \times]0,+\infty[_x). \tag{3.6}$$

(ii) Si $b \in L^\infty(\mathbb{R}_\xi)$, alors dans $L^1_{loc}(]0,T[_t \times]0,+\infty[_x)$:

$$\int_\xi b(\xi)|f_\varepsilon - \chi_k| d\xi - sgn(\rho_\varepsilon - k) \int_\xi b(\xi)(f_\varepsilon - \chi_k) d\xi \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.7}$$

Preuve :
Soit Γ un compact de $]0,T[_t \times]0,+\infty[_x$. Notons :

$$I_\varepsilon := \iint_\Gamma \left| \int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi - |\rho_\varepsilon - k| \right| dtdx = \iint_\Gamma \left(\int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi - |\rho_\varepsilon - k| \right) dtdx.$$

Or, d'après (3.1),

$$I_\varepsilon \leq -\varepsilon \iint_\Gamma \left(\partial_t \int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi + \partial_x \int_\xi a(\xi)|f_\varepsilon - \chi_k| d\xi \right) dtdx.$$

Ceci a un sens car la distribution :

$$T_\varepsilon := \partial_t \int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi + \partial_x \int_\xi a(\xi)|f_\varepsilon - \chi_k| d\xi \in L^1_{tx}$$

d'après (3.3). De plus, la fonction T_ε est négative par (3.1), donc si on choisit une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[_t \times]0, +\infty[_x)$ telle que : $\varphi \geq 0, \quad \varphi = 1 \quad \text{sur} \quad \Gamma$:

$$\left| \iint_\Gamma T_\varepsilon dtdx \right| = -\iint_\Gamma T_\varepsilon dtdx \leq -\iint T_\varepsilon \varphi dtdx = - < T_\varepsilon, \varphi > = | < T_\varepsilon, \varphi > |$$

et nous avons :

$$| < T_\varepsilon, \varphi > | \leq \iiint_{K_0} |f_\varepsilon - \chi_k||\partial_t \varphi + a(\xi)\partial_x \varphi| dtdxd\xi \leq C(k, \varphi),$$

où

$$\begin{cases} K_0 = supp(\varphi) \times (K \cup [-|k|, |k|]) \\ C(k,\varphi) = (C+1) \max\limits_{K_0}(|\partial_t \varphi + a(\xi)\partial_x \varphi|) mes(K_0) \end{cases}.$$

Finalement, $I_\varepsilon \leq -\varepsilon \iint_\Gamma T_\varepsilon dtdx \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$, d'où (i).

Pour montrer (ii), on réécrit (3.6) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi - |\rho_\varepsilon - k| \\ = & \int_\xi sgn(f_\varepsilon - \chi_k)(f_\varepsilon - \chi_k) d\xi - sgn(\rho_\varepsilon - k) \int_\xi (f_\varepsilon - \chi_k) d\xi \\ = & \int_\xi (f_\varepsilon - \chi_k) s(t,x,\xi) d\xi, \end{aligned}$$

où $s(t,x,\xi) = sgn(f_\varepsilon - \chi_k) - sgn(\rho_\varepsilon - k)$.

Pour t et x fixés, notons

$$V_{t,x} = \{\xi, \quad sgn(f_\varepsilon - \chi_k) \neq sgn(\rho_\varepsilon - k)\}.$$

Alors, pour tout $\xi \in V_{t,x}$, $s(t,x,\xi) = 2sgn(f_\varepsilon - \chi_k)$.

Donc

$$\forall (t,x) \quad \int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi - |\rho_\varepsilon - k| = 2 \int_{V_{t,x}} |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi.$$

Or, d'après (3.6),

$$\int_{V_{t,x}} |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi \overset{L^1_{loc}}{\longrightarrow} 0,$$

donc finalement :

$$\left|\int_\xi b(\xi)|f_\varepsilon-\chi_k|d\xi - sgn(\rho_\varepsilon-k)\int_\xi b(\xi)(f_\varepsilon-\chi_k)d\xi\right|$$

$$= \left|\int_\xi b(\xi)(f_\varepsilon-\chi_k)s(t,x,\xi)d\xi\right| = \left|2\int_{V_{t,x}} b(\xi)|f_\varepsilon-\chi_k|d\xi\right|$$

$$\leq 2\|b\|_\infty \int_{V_{t,x}} |f_\varepsilon-\chi_k|d\xi \xrightarrow{L^1_{loc}} 0.$$

Ceci montre le lemme.

Revenons à (3.5). La convergence L^1_{loc} et la convergence L^∞ faible $\star$ entraînent la convergence $\mathcal{D}'$ donc, par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'$, nous pouvons, en utilisant (3.6) et (3.7), réecrire (3.5) sous la forme :

$$\overline{(a_\varepsilon-\overline{a_\varepsilon})sgn(\rho_\varepsilon-k)\int_\xi a(\xi)(f_\varepsilon-\chi_k)d\xi} = \overline{|\rho_\varepsilon-k|(b_\varepsilon-\overline{b_\varepsilon})}$$

c'est-à-dire

$$\overline{(\rho_\varepsilon-\overline{\rho_\varepsilon})sgn(\rho_\varepsilon-k)\int_\xi a(\xi)(f_\varepsilon-\chi_k)d\xi} = \overline{|\rho_\varepsilon-k|\left(\int_\xi a(\xi)f_\varepsilon d\xi - \overline{\int_\xi a(\xi)f_\varepsilon d\xi}\right)}. \tag{3.8}$$

En faisant $k=\overline{\rho_\varepsilon(t,x)}$, où t et x sont fixés, nous obtenons

$$\overline{|\rho_\varepsilon-\overline{\rho_\varepsilon}|\left(\int_\xi a(\xi)\chi_k d\xi - \overline{\int_\xi a(\xi)f_\varepsilon d\xi}\right)} = 0. \tag{3.9}$$

Or, nous avons facilement

$$f_\varepsilon-\chi_{\rho_\varepsilon} = -\varepsilon(\partial_t f_\varepsilon - a(\xi)\partial_x f_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'. \tag{3.10}$$

Donc

$$\int_\xi a(\xi)f_\varepsilon d\xi - \int_\xi a(\xi)\chi_{\rho_\varepsilon}d\xi \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}',$$

ce qui entraîne

$$\overline{\int_\xi a(\xi)f_\varepsilon d\xi} = \overline{\int_\xi a(\xi)\chi_{\rho_\varepsilon}d\xi} = \overline{A(\rho_\varepsilon)}. \tag{3.11}$$

En outre,

$$\int_\xi a(\xi)\chi_k d\xi = A(k) = A(\overline{\rho_\varepsilon}).$$

Donc (3.9) devient

$$\overline{|\rho_\varepsilon - \overline{\rho_\varepsilon}| \Big(A(\overline{\rho_\varepsilon}) - \overline{A(\rho_\varepsilon)} \Big)} = 0.$$

Comme cela est fait dans [5], et rappelé dans [1], ceci implique

$$\overline{A(\rho_\varepsilon)} = A(\overline{\rho_\varepsilon}). \tag{3.12}$$

Prenons enfin la limite dans $\mathcal{D}'$ de (3.4). Il vient :

$$\partial_t \rho + \partial_x A(\rho) = 0,$$

où l'on a noté $\rho = \overline{\rho_\varepsilon}$. Ceci termine la preuve du théorème.

Théorème 3.5
En fait, $(\rho_\varepsilon) \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \rho$ *dans* $L^1_{loc}(]0, T[_t \times]0, +\infty[_x)$ *(quitte à extraire une sous-suite), avec les hypothèses précédentes.*

Ebauche de preuve :
Notons μ la mesure de Young sur $]0, T[_t \times]0, +\infty[_x \times \mathbb{R}_\lambda$ associée à la suite $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$. Nous avons, par une nouvelle application du div-curl lemma :

$$\overline{\rho_\varepsilon sgn(\rho_\varepsilon - k)(A(\rho_\varepsilon) - A(k))} - \overline{|\rho_\varepsilon - k| A(\rho_\varepsilon)}$$

$$= \overline{\rho_\varepsilon} \quad \overline{sgn(\rho_\varepsilon - k)(A(\rho_\varepsilon) - A(k))} - \overline{|\rho_\varepsilon - k|} \quad \overline{A(\rho_\varepsilon)}.$$

Ceci se traduit par

$$< \mu, \lambda sgn(\lambda - k)(A(\lambda) - A(k)) - |\lambda - k| A(\lambda) >$$

$$=< \mu, \lambda >< \mu, sgn(\lambda - k)(A(\lambda) - A(k)) > - < \mu, |\lambda - k| >< \mu, A(\lambda) > .$$

Cette relation montre (en procédant comme dans [3]) que la mesure de Young est une mesure de Dirac. Plus précisément on a

$$\mu = \delta(\lambda - \rho(t, x)),$$

ce qui assure la convergence L^1_{loc} de ρ_ε vers ρ pour une sous-suite.

Proposition 3.6 *Avec les hypothèses précédentes, la limite* ρ *est en fait la solution entropique de la loi de conservation (1.2)*

Preuve :
En utilisant (3.6) et la convergence dominée, nous avons

$$\overline{\int_\xi |f_\varepsilon - \chi_k| d\xi} = \overline{|\rho_\varepsilon - k|} = |\rho - k|. \tag{3.13}$$

(En effet, le théorème précédent implique qu'il existe une sous-suite $(\rho_{\varepsilon_n})_n$ qui converge presque partout vers ρ.)

En outre, par (3.7) :

$$\overline{\int_\xi a(\xi)|f_\varepsilon - \chi_k| d\xi} = \overline{sgn(\rho_\varepsilon - k) \int_\xi a(\xi)(f_\varepsilon - \chi_k) d\xi}.$$

Pour poursuivre ce calcul de limite, nous avons besoin du lemme :

Lemme 3.7 *Soit $\rho : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, où Ω est une partie mesurable de $\mathbb{R}^N$. Alors, il existe un ensemble dénombrable E tel que pour $k \in \mathbb{R} \backslash E$, l'ensemble $\{\rho = k\}$ est négligeable.*

<u>Preuve du lemme :</u>
Pour n entier, notons B_n la boule ouverte de rayon n.
Les ensembles mesurables $(\{\rho = k\} \cap B_n)_{k \in \mathbb{R}}$ sont disjoints, donc, pour toute famille finie de réels $\{k_1, ..., k_I\}$:

$$\sum_{i=1}^{I} mes(\{\rho = k_i\} \cap B_n) = mes\left(B_n \cap \bigcup_{i=1}^{I} \{\rho = k_i\}\right) \leq mes(B_n),$$

si bien que pour tout n, la famille $(mes(\{\rho = k\} \cap B_n))_{k \in \mathbb{R}}$ est sommable. Donc tous ses termes sont nuls, à l'exception d'un ensemble dénombrable E_n. Nous avons donc, en posant $E = \bigcup_n E_n$:

$$\forall k \in \mathbb{R} \backslash E \quad mes(\{\rho = k\}) = \sum_n (mes(\{\rho = k\} \cap B_n) = 0.$$

Revenons à la preuve de la proposition : le lemme entraîne que pour une sous-suite,

$$pp\, k \in \mathbb{R} \quad sgn(\rho_\varepsilon - k) \overset{pp\,(t,x)}{\longrightarrow} sgn(\rho - k).$$

Donc, par convergence dominée :

$$\begin{aligned} \overline{sgn(\rho_\varepsilon - k) \int_\xi a(\xi)(f_\varepsilon - \chi_k) d\xi} &= sgn(\rho - k) \left(\overline{\int_\xi a(\xi) f_\varepsilon d\xi} - \int_\xi a(\xi) \chi_k d\xi \right) \\ &= sgn(\rho - k)(A(\rho) - A(k)), \end{aligned}$$

d'après (3.11) et (3.12).

On a montré :

$$pp\, k \in \mathbb{R} \qquad \overline{\int_\xi a(\xi)|f_\varepsilon - \chi_k| d\xi} = sgn(\rho - k)(A(\rho) - A(k)). \tag{3.14}$$

Reste à passer à la limite dans $\mathcal{D}'$ dans l'inéquation (3.1), à l'aide de (3.13) et (3.14) :

$$pp\, k \in \mathbb{R} \qquad \partial_t|\rho - k| + \partial_x \left(sgn(\rho - k)(A(\rho) - A(k))\right) \leq 0. \tag{3.15}$$

Remarque 3.1 *A ce stade, la preuve de la proposition n'est pas tout à fait terminée car il reste à établir l'inégalité entropique (3.15) pour* **tout** $k \in \mathbb{R}$.

Lemme 3.8 *L'inégalité (3.15) a en fait lieu pour tout* $k \in \mathbb{R}$.

Preuve du lemme :
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[_t \times]0, +\infty[_x)$, $\varphi \geq 0$. Nous avons, pour presque tout $k \in \mathbb{R}$:

$$-\iint |\rho - k|\partial_t\varphi dtdx - \iint sgn(\rho - k)(A(\rho) - A(k))\partial_x\varphi dtdx \leq 0.$$

Le membre de gauche de cette inégalité, noté $F(k)$, est une fonction continue de la variable k. Nous allons convoler cette fonction avec une suite régularisante. Soit donc

$$\eta^\alpha(k) = \frac{1}{\alpha}\eta(\frac{k}{\alpha}),\ \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+),\ \int_{\mathbb{R}} \eta(k)dk = 1.$$

Le produit de convolution $F \star \eta^\alpha$ est une fonction C^∞, donc

$$\forall k \in \mathbb{R} \qquad F \star \eta^\alpha(k) \leq 0.$$

De plus, lorsque $\alpha \to 0$, $F \star \eta^\alpha(k) \to F(k)$ pour tout $k \in \mathbb{R}$, donc

$$\forall k \in \mathbb{R} \qquad F(k) \leq 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. Ceci termine donc la preuve du lemme et de la proposition.

4 Conditions de bord entropiques faibles

Dans cette section, on suppose que la donnée de bord du problème cinétique est "à l'équilibre", c'est-à-dire :

$$f^b(t, \xi) = \chi_{\rho^b(t)}(\xi), \quad 0 < t < T, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Ceci se fait de la façon suivante : on choisit $\rho^b \in L^\infty(]0, T[_t)$ et on pose :

$$f^b(t, \xi) = \chi_{\rho^b(t)}(\xi) \in L^1_\mu(]0, T[_t \times \mathbb{R}_\xi).$$

On a alors $\rho^b(t) = \displaystyle\int_\xi f^b(t, \xi)d\xi$ et f^b est à support compact en ξ :

$$supp_\xi(f^b) \subset [-\|\rho^b\|_{L^\infty}, \|\rho^b\|_{L^\infty}].$$

On rappelle les conditions de bord pour les vitesses "rentrantes" dans le modèle cinétique :

$$f_\varepsilon(t,0,\xi) = f^b(t,\xi), \quad 0 < t < T, \quad a(\xi) > 0.$$

Nous avons établi à la section précédente que, sous des hypothèses de données à support compact en ξ, la suite $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge dans $L^1_{loc}(]0,T[_t\times]0,+\infty[_x)$ vers la solution entropique ρ de (1.2). Notons, pour $k \in \mathbb{R}$: $\eta_k(\rho) = |\rho - k|$ et $G_k(\rho) = sgn(\rho - k)(A(\rho) - A(k))$ les entropies de Kružkov. L'inégalité (1.4) se réecrit donc

$$\forall k \in \mathbb{R} \qquad \partial_t \eta_k(\rho) + \partial_x G_k(\rho) \leq 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(]0,T[_t\times]0,+\infty[_x). \tag{4.1}$$

Le problème est maintenant de savoir quelles conditions de bord vont être vérifiées par ρ. On a en fait le théorème suivant :

Théorème 4.1 (Conditions de bord entropiques faibles)
Pour tout réel k, nous avons :

$$\overline{G_k(\rho)} - G_k(\rho^b) - sgn(\rho^b - k)\left(\overline{A(\rho)} - A(\rho^b)\right) \leq 0 \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(]0,T[_t). \tag{4.2}$$

où la notation $\overline{u}$ désigne la trace faible de u (cf. annexe).

Pour montrer ce théorème, commençons par un lemme :

Lemme 4.2 *Pour tout réel k fixé, il y a équivalence entre (4.1)+(4.2) et le problème :*

$$\begin{aligned} &\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[_t\times[0,+\infty[_x), \quad \varphi \geq 0 : \\ &-\iint \eta_k(\rho)\partial_t\varphi dtdx - \iint G_k(\rho)\partial_x\varphi dtdx \\ &-\int_0^T \left[G_k(\rho^b) + sgn(\rho^b - k)\left(\overline{A(\rho)} - A(\rho^b)\right)\right]\varphi(t,0)dt \quad \leq \quad 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

<u>Preuve du lemme :</u>
Notons le champ de vecteurs $V = (\eta_k(\rho), G_k(\rho)) \in L^\infty(]0,T[_t\times]0,+\infty[_x)$.
Si (4.1) et (4.2) sont vérifiées, donnons-nous une fonction
$\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[_t\times[0,+\infty[_x), \varphi \geq 0$. Par définition de la trace faible, nous avons

$$-\iint \varphi\, div\, V - \iint \eta_k(\rho)\partial_t\varphi dtdx - \iint G_k(\rho)\partial_x\varphi dtdx - \int \overline{G_k(\rho)}\varphi(t,0)dt = 0$$

car $div\, V \leq 0$ est une mesure borélienne. D'où

$$-\iint \eta_k(\rho)\partial_t\varphi dtdx - \iint G_k(\rho)\partial_x\varphi dtdx \leq \int \overline{G_k(\rho)}\varphi(t,0)dt.$$

Or, d'après (4.2) :

$$\overline{G_k(\rho)} \leq G_k(\rho^b) + sgn(\rho^b - k)\left(\overline{A(\rho)} - A(\rho^b)\right) \leq 0,$$

ce qui conduit à (4.3).

Réciproquement, si (4.3) est vraie, alors en l'appliquant à une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[_t \times]0, +\infty[_x)$, $\varphi \geq 0$, on obtient (4.1). D'où $div\, V$ est une mesure borélienne. En outre, appliquons (4.3) avec

$$\varphi(t, x) = \psi(t)\varphi_\delta(x),$$

où $\psi \in \mathcal{D}(]0, T[_t)$, $\psi \geq 0$, et φ_δ la fonction utilisée dans la preuve de l'existence de la trace faible (cf. annexe). On obtient

$$\begin{aligned} &-\iint \eta_k(\rho)\psi'(t)\varphi_\delta(x)dtdx - \iint G_k(\rho)\psi(t)\varphi'_\delta(x)dtdx \\ &-\int_0^T \left[G_k(\rho^b) + sgn(\rho^b - k)\left(\overline{A(\rho)} - A(\rho^b)\right)\right]\psi(t)dt \leq 0. \end{aligned}$$

Mais par définition de la trace faible, nous avons

$$\begin{aligned} &-\iint \eta_k(\rho)\psi'(t)\varphi_\delta(x)dtdx - \iint G_k(\rho)\psi(t)\varphi'_\delta(x)dtdx \\ = &\iint \psi(t)\varphi_\delta(x)\, div\, V + \int \overline{G_k(\rho)}\psi(t)dt. \end{aligned}$$

D'où

$$\iint \psi\varphi_\delta\, div\, V + \int \left[\overline{G_k(\rho)} - G_k(\rho^b) - sgn(\rho^b - k)\left(\overline{A(\rho)} - A(\rho^b)\right)\right]\psi(t)dt \leq 0.$$

Enfin, en faisant tendre $\delta \to 0$, on obtient $\displaystyle\iint \psi(t)\varphi_\delta(x)\, div\, V \to 0$ par le théorème de convergence dominée appliqué à la mesure $div\, V$. D'où l'inégalité (4.2).

Le théorème consiste donc à prouver (4.3). Pour cela, utilisons la formulation faible du problème (2.1) :

$$\begin{aligned} &\forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T[_t \times [0, +\infty[_x \times \mathbb{R}_\xi) \\ &-\iiint f_\varepsilon(\partial_t\varphi + a(\xi)\partial_x\varphi)dtdxd\xi - \iint f^0(x, \xi)\varphi(0, x, \xi)dxd\xi \\ &-\iint a(\xi)f_\varepsilon(t, 0, \xi)\varphi(t, 0, \xi)dtd\xi = \iiint \frac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}\varphi dtdxd\xi. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Remarque 4.1 *On a $f_\varepsilon(t,0,\xi) = f^b(t,\xi)$ seulement si $a(\xi) > 0$, alors que dans l'égalité précédente, on intègre sur $\{\xi \in \mathbb{R}\}$.*

Utilisons (4.4) avec $\varphi(t,x,\xi) = \phi(t,x)\theta_n(\xi)$, où $\phi \in \mathcal{D}(]0,T[_t \times [0,+\infty[_x)$ et $(\theta_n)_n$ une suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}_\xi)$ qui converge *pp* vers la fonction constante égale à 1. On a

$$\begin{aligned} -\iiint f_\varepsilon(\partial_t\phi + a(\xi)\partial_x\phi)\theta_n(\xi)dtdxd\xi \quad &- \iint a(\xi) f_\varepsilon(t,0,\xi)\phi(t,0)\theta_n(\xi)dtd\xi \\ &= \iiint \frac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}\phi(t,x)\theta_n(\xi)dtdxd\xi. \end{aligned}$$

Grâce au support compact en ξ (uniforme en t) de $f_\varepsilon(t)$, on peut passer à la limite lorsque $n \to +\infty$ par convergence dominée. On obtient

$$-\iiint f_\varepsilon(\partial_t\phi + a(\xi)\partial_x\phi)dtdxd\xi - \iint a(\xi) f_\varepsilon(t,0,\xi)\phi(t,0)dtd\xi = 0$$

car

$$\iiint \frac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}\phi(t,x)dtdxd\xi = \iint \underbrace{\left(\int \frac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}d\xi\right)}_{=0}\phi(t,x)dtdx = 0.$$

Nous avons montré :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(]0,T[_t \times [0,+\infty[_x)$$

$$-\quad \iiint f_\varepsilon(\partial_t\phi + a(\xi)\partial_x\phi)dtdxd\xi - \iint a(\xi) f_\varepsilon(t,0,\xi)\phi(t,0)dtd\xi = 0. \tag{4.5}$$

En outre, nous avons l'inégalité suivante, analogue à (3.1) :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(]0,T[_t \times [0,+\infty[_x) \quad \phi \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$-\iiint |f_\varepsilon - \chi_k|(\partial_t\phi + a(\xi)\partial_x\phi)dtdxd\xi - \iint a(\xi)|f_\varepsilon(t,0,\xi) - \chi_k|\phi(t,0)dtd\xi \leq 0. \tag{4.6}$$

Cette inégalité (4.6) se démontre à partir de (3.2). En effet, il suffit d'écrire la formulation faible du problème vérifié par les fonctions $|f_\varepsilon - \chi_k|$, avec condition de bord $|f_\varepsilon(x=0) - \chi_k|$, c'est-à-dire :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[_t \times [0,+\infty[_x \times \mathbb{R}_\xi) \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$-\iiint |f_\varepsilon - \chi_k|(\partial_t\varphi + a(\xi)\partial_x\varphi)dtdxd\xi - \iint a(\xi)|f_\varepsilon(t,0,\xi) - \chi_k|\varphi(t,0,\xi)dtd\xi$$

$$= -\iiint sgn(f_\varepsilon - \chi_k)\frac{\chi_{\rho_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}\varphi dtdxd\xi.$$

Ensuite, on choisit encore $\varphi(t,x,\xi) = \phi(t,x)\theta_n(\xi)$, et on fait tendre $n \to +\infty$, comme auparavant, ce qui donne (4.6).

Pour mettre à profit (4.6), nous allons maintenant majorer l'intégrale :

$$I_\varepsilon(t) = \int_\xi a(\xi)|f_\varepsilon(t,0,\xi) - \chi_k|d\xi.$$

Pour cela, on utilise l'inégalité :

$$\forall t, x, \xi \quad |f_\varepsilon(t,0,\xi) - \chi_k| \geq sgn(\rho^b(t) - k)\,(f_\varepsilon(t,0,\xi) - \chi_k)$$

avec égalité si $a(\xi) > 0$, car on a alors :

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(t,0,\xi) - \chi_k(\xi)| &= \left|f^b(t,\xi) - \chi_k(\xi)\right| = \left|\chi_{\rho^b(t)}(\xi) - \chi_k(\xi)\right| \\ &= sgn(\rho^b(t) - k)\left(\chi_{\rho^b(t)}(\xi) - \chi_k(\xi)\right), \end{aligned}$$

en utilisant la croissance de χ. Cela donne :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(t) &= \int_{a(\xi)>0} a(\xi)|f_\varepsilon(t,0,\xi) - \chi_k|d\xi + \int_{a(\xi)\leq 0} a(\xi)|f_\varepsilon(t,0,\xi) - \chi_k|d\xi \\ &\leq \int_{a(\xi)>0} a(\xi)sgn(\rho^b - k)\,(f_\varepsilon(x=0) - \chi_k)\,d\xi \\ &+ \int_{a(\xi)\leq 0} a(\xi)sgn(\rho^b - k)\,(f_\varepsilon(x=0) - \chi_k)\,d\xi. \end{aligned}$$

Donc :

$$I_\varepsilon(t) \leq sgn(\rho^b(t) - k)\,(\psi_\varepsilon(t) - A(k))\,, \tag{4.7}$$

où $\psi_\varepsilon(t) = \int_\xi a(\xi)f_\varepsilon(x=0)d\xi$.

On obtient donc, en utilisant (4.6) et (4.7) :

$$\begin{aligned} &\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[_t \times [0,+\infty[_x) \quad \varphi \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} \\ &-\iiint |f_\varepsilon - \chi_k|(\partial_t\varphi + a(\xi)\partial_x\varphi)dtdxd\xi \\ &-\int sgn(\rho^b - k)\,(\psi_\varepsilon(t) - A(k))\,\varphi(t,0)dt \leq 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Le tout est maintenant de faire passer (4.8) à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$. Par (3.13) et (3.14), nous avons déjà, pour presque tout k :

$$-\iiint |f_\varepsilon - \chi_k|(\partial_t\varphi + a(\xi)\partial_x\varphi)dtdxd\xi \to -\iint \eta_k(\rho)\partial_t\varphi dtdx - \iint G_k(\rho)\partial_x\varphi dtdx.$$

Pour le dernier terme, on utilise le fait que la famille $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(]0,T[_t)$, et ceci grâce au support compact en ξ (uniforme en t et ε) de $f_\varepsilon(t)$ et à la continuité en $x=0$ de $x \mapsto \|f_\varepsilon(.,x,.)\|_{L^1_\mu(]0,T[_t\times\mathbb{R}_\xi)}$. Ainsi il existe une fonction $\psi(t) \in L^\infty(]0,T[_t)$ telle que ψ_ε converge faible $\star$ vers ψ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Faisons tendre $\varepsilon \to 0$ dans (4.5). D'après (3.11) et (3.12), il vient

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(]0,T[_t\times[0,+\infty[_x)$$

$$-\iint \rho\partial_t\phi dtdx - \iint A(\rho)\partial_x\phi dtdx - \int \psi(t)\phi(t,0)dt = 0.$$

Ceci montre que ψ vérifie la définition de la trace faible de $A(\rho)$,
car $div\,(\rho, A(\rho)) = 0$. Par unicité de la trace faible, nous avons donc

$$\psi = \overline{A(\rho)}\ dans\ L^\infty(]0,T[_t),$$

si bien que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[_t\times[0,+\infty[_x) \quad \varphi \geq 0 \quad pp\ k \in \mathbb{R}$:

$$\int sgn(\rho^b{-}k)\left(\psi_\varepsilon(t) - A(k)\right)\varphi(t,0)dt \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int sgn(\rho^b{-}k)\left(\overline{A(\rho)} - A(k)\right)\varphi(t,0)dt.$$

Finalement, la limite de l'inégalité (4.8) donne

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[_t\times[0,+\infty[_x) \quad \varphi \geq 0 \quad pp\ k \in \mathbb{R}$$

$$-\iint \eta_k(\rho)\partial_t\varphi dtdx - \iint G_k(\rho)\partial_x\varphi dtdx - \int sgn(\rho^b{-}k)\left(\overline{A(\rho)} - A(k)\right)\varphi(t,0)dt \leq 0,$$

qui n'est autre que (4.3).

A ce stade, nous avons prouvé que (4.3) est vraie pour presque tout $k \in \mathbb{R}$. Pour étendre cette inégalité à tous les réels k, nous procédons comme à la fin de la section 3. On convole (4.3) suivant la variable k. La seule difficulté supplémentaire vient du terme :

$$\int_t sgn^\alpha(\rho^b - k)\left(\overline{A(\rho)} - A(\rho^b)\right)\varphi(t,0)dt,$$

où $sgn^\alpha = sgn \star \eta^\alpha$.

Mais si on choisit une fonction $\eta(k)$ paire, on a $sgn^\alpha(0) = 0$ pour tout $\alpha > 0$,
et donc :

$$\int_t sgn^\alpha(\rho^b{-}k)\left(\overline{A(\rho)} - A(\rho^b)\right)\varphi(t,0)dt \overset{\alpha\to 0}{\longrightarrow} \int_t sgn(\rho^b{-}k)\left(\overline{A(\rho)} - A(\rho^b)\right)\varphi(t,0)dt,$$

ce qui règle la question. Ceci termine la démonstration du théorème.

5 Annexe

5.1 Compacité par compensation

Nous nous contenterons de citer les résultats sans en donner de démonstration.

Lemme 5.1 (Murat) *Soit $(d_\varepsilon)_\varepsilon$ une famille bornée dans $W^{-1,\infty}$. On suppose que pour tout ε, $d_\varepsilon \in B+C$, où B est un compact dans H^{-1}_{loc}, et C un ensemble borné de mesures boréliennes. Alors la famille $(d_\varepsilon)_\varepsilon$ est relativement compacte dans H^{-1}_{loc}.*

Lemme 5.2 (Div-curl lemma) *Soient $1 < p, p' < +\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'} = 1$ et soient $(a_\varepsilon), (b_\varepsilon)$ des familles bornées dans $L^p_{loc} \cap L^\infty$, $(c_\varepsilon), (d_\varepsilon)$ des familles bornées dans $L^{p'}_{loc} \cap L^\infty$. On note respectivement a, b, c, d les limites faibles $\star$. On suppose que $(\partial_t a_\varepsilon + \partial_x b_\varepsilon)_\varepsilon$ est relativement compacte dans $W^{-1,p}_{loc}$ et que $(\partial_t c_\varepsilon + \partial_x d_\varepsilon)_\varepsilon$ est relativement compacte dans $W^{-1,p'}_{loc}$. Alors,*

(i) une sous-suite de $(a_\varepsilon d_\varepsilon)_\varepsilon$ converge dans $\mathcal{D}'$ lorsque ε tend vers 0, ainsi qu'une sous-suite de $(b_\varepsilon c_\varepsilon)_\varepsilon$.

(ii) pour une sous-suite, $a_\varepsilon d_\varepsilon - b_\varepsilon c_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} ad - bc$ dans $\mathcal{D}'$.

Définition 5.3 (Mesure de Young) *Soit Ω une partie mesurable de $\mathbb{R}^N$, et $(u_n)_n$ une suite bornée dans $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$. Alors, il existe une unique mesure de Radon μ sur $\Omega \times \mathbb{R}^p$ et une sous-suite de $(u_n)_n$ telle que :*

$$\forall \varphi \in C^0_c(\Omega, \mathbb{R}^p) \qquad \int \varphi(x, u_n(x))dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \iint \varphi(x, \lambda)\mu(dx, d\lambda).$$

Théorème 5.4 *Soit $u \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^p)$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $u_n \to u$ dans $L^1_{loc}(\Omega, \mathbb{R}^p)$

(ii) $\mu = \delta(\lambda - u(x))$, i.e la mesure de Young associée à $(u_n)_n$ est une masse de Dirac.

5.2 Trace faible

Théorème 5.5 (Trace faible) *Soit $V = (V_0, V_1) \in L^\infty(]0, +\infty[^2_{tx})$ un champ de vecteurs tel que $div\, V = \partial_t V_0 + \partial_x V_1$ soit une mesure borélienne. Alors, il existe une unique solution $\overline{V_1} \in L^\infty(]0, +\infty[_t)$ au problème :*

$$-\iint \varphi\, div\, V - \iint V_0 \partial_t \varphi dt dx - \iint V_1 \partial_x \varphi dt dx - \int \overline{V_1}\varphi(t, 0)dt = 0$$

pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(]0, +\infty[_t \times [0, +\infty[_x)$. En fait, $\overline{V_1}$ dépend seulement de V_1 et on a :

$$\|\overline{V_1}\|_{L^\infty_t} \leq \|V_1\|_{L^\infty_{tx}}.$$

Preuve :
Soit $\delta > 0$ et $\varphi_\delta \in C^\infty([0,+\infty[)$ telle que : φ_δ est décroissante, $\varphi_\delta(x) = 1$ pour $x \leq \delta/2$, $\varphi_\delta(x) = 0$ pour $x \geq \delta$ et $\|\varphi'_\delta\|_\infty = O(1/\delta)$ lorsque $\delta \to 0$. Posons : $\phi(t,x) = \varphi(t,x)(1-\varphi_\delta(x))$. On a $\phi \in \mathcal{D}(]0,+\infty[^2)$ et :

$$\begin{aligned}
& -\iint \varphi \, div\, V - \iint V_0 \partial_t \varphi dtdx - \iint V_1 \partial_x \varphi dtdx \\
= & -\iint \varphi\varphi_\delta \, div\, V - \iint V_0 (\partial_t \varphi)\varphi_\delta dtdx \\
& -\iint V_1(\partial_x\varphi)\varphi_\delta dtdx - \iint V_1 \varphi(\varphi'_\delta) dtdx - \underbrace{\iint (\phi \, div\, V + V_0 \partial_t \phi + V_1 \partial_x \phi) dtdx}_{=0 \; car \; div\, V = \partial_t V_0 + \partial_x V_1 \; dans \; \mathcal{D}'(]0,+\infty[^2_{tx})} \\
= & -\iint \varphi\varphi_\delta \, div\, V - \iint V_0(\partial_t\varphi)\varphi_\delta dtdx - \iint V_1(\partial_x \varphi)\varphi_\delta dtdx - \iint V_1 \varphi(\varphi'_\delta) dtdx.
\end{aligned}$$

Maintenant, faisons tendre $\delta \to 0$. Par convergence dominée on a

$$\iint V_0(\partial_t\varphi)\varphi_\delta dtdx \to 0, \qquad \iint V_1(\partial_x\varphi)\varphi_\delta dtdx \to 0.$$

Appliquant à nouveau la convergence dominée avec la mesure borélienne $div\, V$, on a également

$$\iint \varphi\varphi_\delta \, div\, V \to 0.$$

Pour le dernier terme, on utilise que la famille $(\int_0^{+\infty} V_1(t,x)\varphi'_\delta(x)dx)_{\delta>0}$ est bornée dans $L^\infty(]0,+\infty[_t)$ par $\|V_1\|_{L^\infty_{tx}}$ donc on peut extraire une sous-suite qui converge faible $\star$ vers une fonction $\overline{V_1} \in L^\infty(]0,+\infty[_t)$. Ensuite, on écrit :

$$\begin{aligned}
\iint V_1(t,x)\varphi(t,x)\varphi'_\delta(x) dtdx &= \iint V_1(t,x)\varphi'_\delta(x)(\varphi(t,x)-\varphi(t,0))dtdx \\
&+ \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} V_1(t,x)\varphi'_\delta(x)dx \right) \varphi(t,0)dt.
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
& \left| \iint V_1(t,x)\varphi'_\delta(x)(\varphi(t,x)-\varphi(t,0))dtdx \right| \\
\leq & \int_{supp_t \varphi} \int_0^\delta |V_1(t,x)| \frac{C}{\delta} x \|D\varphi\|_\infty dtdx \\
\leq & \; mes(supp_t \varphi) \|V_1\|_{L^\infty_{tx}} \|D\varphi\|_\infty \frac{C}{\delta} \left(\int_0^\delta x dx \right) \; \leq \; C'\delta \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

et
$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} V_1(t,x)\varphi'_\delta(x)dx\right)\varphi(t,0)dt \to \int_0^{+\infty}\overline{V_1}(t)\varphi(t,0)dt$$
pour une sous-suite. Donc,
$$\iint V_1(t,x)\varphi(t,x)\varphi'_\delta(x)dtdx \to \int_0^{+\infty}\overline{V_1}(t)\varphi(t,0)dt.$$

Ceci prouve l'existence de la trace faible $\overline{V_1}$. De par sa définition, elle ne dépend que de V_1. Enfin, son unicité est evidente, ainsi que la borne annoncée.

References

[1] B. Perthame, E. Tadmor : *A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws.*
Communications in Mathematical Physics 136 (1991), 501-517.

[2] F. Berthelin, F. Bouchut : *Weak entropy boundary conditions for isentropics gas dynamics via kinetic relaxation.*
Journal of Differential Equations 185 (2002), 251-270.

[3] F. Berthelin, N.J Mauser, F. Poupaud : *High-field limit from a kinetic equation to multidimensional scalar conservation laws.*
Journal of Hyperbolic Differential Equations Vol. 4, N°1 (2007), 123-145.

[4] D. Serre : *Systèmes de lois de conservation II.*
Diderot editeur, Arts et Sciences (1996).

[5] L. Tartar : *Compensated compactness and applications to partial differential equations.*
Nonlinear Analysis and Mechanics : Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, Research Notes in Mathematics, Vol. 39 (Pitman, Boston, London, MA, 1979), pp. 136-212.

[6] L. C. Evans : *Partial differential equations.* AMS (1998).