

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.

Fax : (33) (0)1 69 33 30 19

Tél. : (33) (0)1 69 33 40 91

F-91128 PALAISEAU Cedex

FRANÇOIS GOLSE

Professeur

Palaiseau, le 11 octobre 2009

**Rapport sur le mémoire d'habilitation à diriger des recherches
présenté par Florent Berthelin**

Florent Berthelin présente, pour obtenir le diplôme d'habilitation à diriger des recherches, un mémoire scientifique portant sur l'étude des équations hyperboliques et des modèles cinétiques.

Ses travaux s'articulent essentiellement autour de trois thèmes distincts :

A) les limites hydrodynamiques de modèles cinétiques,

B) l'étude de modèles avec contraintes,

C) l'étude de méthodes de splitting en analyse numérique.

L'étude des limites hydrodynamiques est de loin la partie la plus significative de ce mémoire. Elle comporte plusieurs résultats relatifs à la convergence des solutions d'équations cinétiques vers des fonctions de distribution d'équilibre locales, dont les paramètres sont solutions de lois de conservation, ou de systèmes de lois de conservation hyperboliques. Tous ces résultats reposent essentiellement sur deux types de méthodes : l'une utilise la compacité de solutions approchées dans une topologie convenable, l'autre est basée sur un contrôle de l'entropie relative de la solution à la fonction de distribution d'équilibre locale pilotée par l'équation hydrodynamique limite.

Pour ce qui est de la méthode de compacité, un premier résultat porte sur la dérivation du système d'Euler de la dynamique des gaz isentropique à partir d'un modèle cinétique de type BGK possédant une seule entropie. Autrement dit, la famille infinie d'entropies intervenant dans la méthode de compacité de Tartar-DiPerna ne se relève pas en une famille infinie de fonctionnelles d'entropie au niveau cinétique — excepté pour une seule, qui

correspond à l’analogie pour le modèle de BGK de la fonction H de Boltzmann. La méthode utilisée ici évoque le travail de Chen-Levermore-Liu pour la convergence d’un système de relaxation vers une loi de conservation scalaire. L’idée clef consiste à utiliser la production d’entropie et un lemme de moyenne pour arriver à une estimation sur le gradient de la solution hydrodynamique à partir de laquelle on peut adapter la méthode de DiPerna. Ce résultat repose sur l’hypothèse de bornes a priori uniformes sur la variable de vitesse cinétique, ainsi que d’une borne inférieure uniforme sur la densité, hypothèse dont la vérification demeure un problème ouvert.

Un autre résultat fort intéressant obtenu par Florent Berthelin porte sur la limite hydrodynamique à champ fort pour un modèle de type BGK conduisant à une loi de conservation scalaire. Dans cette limite l’accélération par le champ externe et le terme de collision sont les termes dominants, et sont précisément du même ordre. Cette circonstance modifie la nature de la solution d’équilibre, qui n’est plus la “Maxwellienne”, mais s’obtient à partir de la Maxwellienne par une sorte d’opérateur de convolution.

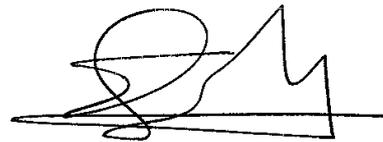
Enfin Florent Berthelin propose de nouveaux résultats de régularité sur les moyennes en vitesse des équations cinétiques, qui sont un prolongement naturel des lemmes de moyenne classiques. L’apport du travail de Florent Berthelin est un traitement original des termes de force qui évite de les considérer comme des termes sources avec perte d’une dérivée en ξ . L’idée est de se ramener au cas sans force par des changements locaux de coordonnées consistant à résoudre uniquement la partie en ξ de l’équation des caractéristiques. On obtient ainsi une régularité optimale généralisant un résultat de P. Gérard et du rapporteur dans le cas transversal. Il faut noter également plusieurs résultats originaux dans le cas d’un champ de force constant — résultats obtenus par une méthode d’intégrales oscillantes et d’interpolation, spécifique à ce cas. La condition de non-dégénérescence du symbole est d’ailleurs, dans le cas d’une force constante, différente de la condition usuelle.

Florent Berthelin a d’autre part adapté la méthode d’entropie relative à différents exemples de limites hydrodynamiques. Son travail s’appuie sur une analyse exhaustive du principe qui sous-tend cette méthode. Cette exploration méthodique des limites de l’estimation d’entropie relative lui permet d’aborder des cas restés jusqu’ici réfractaires à l’usage de ce type d’argument, à savoir la limite vers la dynamique des gaz isentropique, ainsi que les limites hyperboliques des modèles cinétiques à vitesses discrètes. Comme à chaque utilisation de cette méthode, la limite n’est établie que sur l’intervalle de temps pour lequel la solution de l’équation limite reste régulière.

La deuxième partie du mémoire porte sur les équations hyperboliques avec contraintes — égalités ou inégalités — vérifiées par une ou plusieurs inconnues. Ce type de problème survient en hydraulique dans des situations “très modélisées” (dynamique de bouchons dans des écoulements mul-

tiphasiques, par exemple), ou encore pour les modèles de trafic routier. Ces contraintes sont gérées par l'introduction d'inconnues supplémentaires jouant le rôle de multiplicateurs de Lagrange associés à ces contraintes. Une difficulté essentielle dans ce type de modèle est l'apparition de certains produits en général mal définis dans le cadre des solutions faibles, avec les informations dont on dispose naturellement sur la régularité des solutions. L'analyse numérique de ces systèmes hyperboliques avec contraintes fait l'objet de la troisième partie du mémoire : la méthode suivie est un algorithme de splitting, avec une phase de dynamique conservative, et une phase de relaxation sur les contraintes.

Les travaux de Florent Berthelin correspondent à 14 articles publiés dans d'excellentes revues d'audience internationale (Archive for Rational Mechanics and Analysis, Journal of Differential Equations, Numerische Mathematik...). Sur le problème extrêmement difficile que sont les limites hydrodynamiques vers les systèmes hyperboliques, il a apporté des contributions vraiment novatrices et tout à fait éclairantes. Il ne fait aucun doute que l'ensemble des travaux présentés par Florent Berthelin correspond à une habilitation à diriger des recherches d'un niveau remarquable.

A handwritten signature in black ink, consisting of a series of loops and a sharp peak, positioned above a horizontal line.