SUR LES FONCTIONS THETA DU SECOND ORDRE

Arnaud Beauville et Olivier Debarre

Mathématique , Université Paris-Sud

F-91 405 Orsay Cedex (France)

Introduction

Nous discutons dans cet exposé deux conjectures liées au problème de Schottky, dues à Van Geemen et Van der Geer [7] et précisées par Donagi [6]. Ces auteurs proposent de caractériser les jacobiennes (parmi toutes les variétés abéliennes) en termes de l'espace des fonctions thêta d'ordre 2. Nous énonçons ces conjectures au §1; dans le §2 (inspiré de [6]), nous discutons leur relation avec d'autres approches du problème de Schottky. Au §3, nous traitons, dans le style de [4], quelques exemples où les calculs peuvent être faits explicitement. Enfin au §4, nous prouvons la conjecture 2 et une version affaiblie de la conjecture 1 pour une variété abélienne principalement polarisée *générique.*

1. Enoncé des conjectures

Soit A une variété abélienne complexe, et ϑ une polarisation principale sur A. Par définition, ϑ est la classe dans $H^2(A,\mathbb{Z})$ d'un diviseur ample Θ, vérifiant $\dim \Gamma(A,\mathcal{O}_A(\Theta)) = 1$. Le diviseur Θ est uniquement déterminé à translation près. On peut de plus lui imposer d'être symétrique (c'est-à-dire stable par l'involution $a \mapsto -a$), ce que nous ferons systématiquement dans la suite; il est dès lors bien déterminé à translation près par un point d'ordre 2 de A. En vertu du théorème du carré, le faisceau $\mathcal{O}_A(2\Theta)$ est alors indépendant du choix de Θ : il est canoniquement associé à la variété abélienne principalement polarisée (A,ϑ). Il en est de même de l'espace $\Gamma = \Gamma(A,\mathcal{O}_A(2\Theta))$ de ses sections globales, ainsi que du système linéaire $|2\Theta|$. Nous identifierons Γ à l'espace des fonctions thêta du second ordre sur le revêtement universel de A.

Les éléments de Γ sont symétriques; cela entraîne que la multiplicité en

0 d'un tel élément est paire. Nous noterons Γ_0 l'hyperplan de Γ formé des sections s'annulant avec multiplicité $\geqslant 2$, et Γ_{00} le sous-espace des sections qui s'annulent avec multiplicité $\geqslant 4$. Nous désignerons par $|\Theta|_0$ et $|\Theta|_{00}$ les sous-espaces projectifs correspondants de $|\Theta|$. Enfin, soit $V(\Gamma_{00})$ le lieu de base du système linéaire $|2\Theta|_{00}$, c'est-à-dire l'ensemble des points de A où toutes les sections de Γ_{00} s'annulent. Pour éviter des complications sans intérêt, nous supposerons toujours que la variété abélienne principalement polarisée (A,ϑ) est *indécomposable,* c'est-à-dire qu'elle ne peut s'écrire comme produit de deux variétés abéliennes principalement polarisées non nulles.

Conjecture 1.- *Si* (A,ϑ) *n'est pas une jacobienne, l'ensemble* $V(\Gamma_{00})$ *est réduit à* 0.

La conjecture 2 est une version infinitésimale de la conjecture 1. Soit $T = T_0(A)$ l'espace tangent à l'origine de A; en associant à chaque élément de Γ_{00} le terme de degré 4 de son développement de Taylor, on obtient un homomorphisme α de Γ_{00} dans l'espace $H^0(\mathbb{P}(T), \mathcal{O}(4))$ des polynômes homogènes de degré 4 sur T, bien défini à un scalaire près. En particulier, $\alpha(\Gamma_{00})$ est un système linéaire de quartiques dans $\mathbb{P}(T)$; on désigne par $V_{inf}(\Gamma_{00})$ l'ensemble des points de base de ce système linéaire.

Conjecture 2.- *Si* (A,ϑ) *n'est pas une jacobienne, l'ensemble* $V_{inf}(\Gamma_{00})$ *est vide.*

Dans le cas des jacobiennes, la situation est très différente :

Théorème 1.- *Soit* (JC,ϑ) *la jacobienne d'une courbe* C. *On a alors :*

a) $V(\Gamma_{00})$ *est l'image* $C-C$ *de l'application* $\delta : C\times C \longrightarrow JC$ *définie par* $\delta(x,y)=\mathcal{O}_C(x-y)$,

b) $V_{inf}(\Gamma_{00})$ *est l'image de l'application canonique* $\kappa : C \longrightarrow \mathbb{P}(T)$ (*en identifiant* T *à* $H^0(C,K_C)^*$),

sauf dans les deux cas suivants :

a') C *est une courbe de genre 4, non hyperelliptique, avec deux* g^1_3 *distincts; on a alors* $V(\Gamma_{00}) = (C-C)\cup\{\pm t\}$, *où* t *est la différence dans* JC *des deux* g^1_3 *sur* C.

b') C *est une courbe de genre 4 avec un seul* g^1_3 ; *on a alors* $V_{inf}(\Gamma_{00}) = \kappa(C)\cup\{s\}$, *où* s *est le sommet du cône quadratique contenant* $\kappa(C)$.

Les énoncés a) et a') ont été démontrés par Welters [8]. Les énoncés b) et b') résultent essentiellement du théorème de Green (sous une forme légèrement raffinée due au premier auteur), selon lequel $\kappa(C)$ est l'intersection dans $\mathbb{P}(T)$ des *cônes osculateurs* aux points doubles du diviseur Θ.

2. Relation avec d'autres approches

a) Trisécantes

Le système linéaire Γ est sans point base, donc définit un morphisme ψ de A dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\Gamma^*)$ (que nous noterons simplement $\mathbb{P}^N$, avec $N = 2^g - 1$). L'image de ce morphisme est par définition la *variété de Kummer* K de (A,Θ); sous l'hypothèse (A,Θ) indécomposable, elle s'identifie au quotient de A par l'involution $a \mapsto -a$. Elle a 2^{2g} points singuliers, image par ψ des points d'ordre 2 de A.

Notons en particulier s le point $\psi(0)$. Le système $|2\Theta|_0$ est l'image réciproque par ψ du système des hyperplans de $\mathbb{P}^N$ passant par s; de même, les éléments de $|2\Theta|_{00}$ sont les images réciproques par ψ des hyperplans de $\mathbb{P}^N$ qui contiennent l'espace tangent $T_s(K)$ à K en s (c'est-à-dire le sous-espace projectif de $\mathbb{P}^N$ engendré par le cône tangent à K en s). Le lieu de base de $|2\Theta|_{00}$ est donc l'image réciproque par ψ de $T_s(K) \cap K$. Par suite la conjecture 1 signifie que *l'intersection* $T_s(K) \cap K$ *est réduite à* $\{s\}$, ou encore qu'il n'existe pas de droite passant par s et un autre point de K qui soit contenue dans $T_s(K)$. Appelons une telle droite une *fausse trisécante* (elle rencontre K avec multiplicité ≥ 3). La conjecture 1 dit que K n'admet pas de fausse trisécante si (A,ϑ) n'est pas une jacobienne. Cette formulation est bien sûr à rapprocher de l'énoncé analogue pour les trisécantes usuelles (conjecture de la trisécante), qui est l'analogue discret de la conjecture de Novikov (cf. par exemple [3]). Mise à part la similitude de leurs énoncés, la relation entre ces deux conjectures n'est pas claire.

Remarquons au passage que la dimension de $T_s(K)$ est celle de l'espace tangent (de Zariski) de $\mathbb{C}^g/\{\pm 1\}$ à l'origine, soit $\frac{1}{2}g(g+1)$; la dimension de Γ_{00} est donc $2^g - \frac{1}{2}g(g+1) - 1$.

b) "Big Schottky"

La forme classique du problème de Schottky (caractérisation des jacobiennes par les équations de Schottky-Jung) a été reformulée géométriquement par Mumford; Donagi en a donné une généralisation audacieuse, la "big Schottky conjecture" (conj. 2.11 de [6]). *Cette conjecture implique la conjecture* 1 (loc. cit.); Donagi le démontre en interprétant $V(\Gamma_{00})$ en termes du cône tangent à la variété de Schottky-Jung en un point du bord de l'espace des modules $\mathfrak{a}_g$. Plus précisément, la conjecture de Donagi en dimension g entraîne la conjecture 1 en dimension g-1. Donagi annonce dans [6] les grandes lignes d'une démonstration de sa conjecture en dimension 5; ce résultat impliquerait la conjecture 1 pour $g=4$.

c) Equation K-P

Passons à la conjecture 2. Soient D un vecteur non nul de T, et $\bar{D}$ son image dans $\mathbb{P}(T)$. Soit φ un élément de Γ_{00}, considéré comme une fonction thêta du second ordre sur T; par la formule de Taylor, la valeur de $\alpha(\varphi)$ en D est à une constante près $D^4\varphi(0)$, où D est vu comme un champ de vecteurs constant sur T. Dire que $\bar{D}$ est un point base du système $\alpha(\Gamma_{00})$ signifie donc que la forme linéaire $\varphi \mapsto D^4\varphi(0)$ sur Γ s'annule sur Γ_{00}; si $(D_1, \dots, D_g)$ est une base de T, cela revient à dire qu'il existe des constantes a_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq g)$ et b telles qu'on ait

(1) $$D^4\varphi(0) = \sum a_{ij} D_iD_j\varphi(0) + b\,\varphi(0) \qquad \text{pour tout } \varphi \in \Gamma.$$

Ainsi, la conjecture 2 signifie que si (A,ϑ) n'est pas une jacobienne, il n'existe aucun opérateur différentiel P de la forme $P = [D^4 + \text{termes de degré plus bas}]$ satisfaisant à $P\varphi(0)=0$ pour tout $\varphi \in \Gamma$. Il est maintenant classique qu'un énoncé de ce type se traduit en termes d'équation aux dérivées partielles, de la manière suivante. Il existe une base (φ_α) de Γ satisfaisant à la formule d'addition de Riemann

$$\theta(z+u)\,\theta(z-u) = \sum \varphi_\alpha(z)\,\varphi_\alpha(u)$$

L'équation $P\varphi(0)=0$ pour tout $\varphi \in \Gamma$ équivaut donc à l'équation aux dérivées partielles $P_u[\theta(z+u)\,\theta(z-u)]_{u=0} = 0$. L'équation (1) devient ainsi

(2) $$\theta\, D^4\theta - 4\, D\theta\, D^3\theta + 3\,(D^2\theta)^2 = \sum a_{ij}\,(\theta\, D_iD_j\theta - D_i\theta\, D_j\theta) + \tfrac{b}{2}\theta^2 .$$

En divisant par θ^2 et différentiant deux fois, cela signifie que la fonction méromorphe périodique $u = D^2 \log \theta$ vérifie l'équation non linéaire

(3) $$D\,[D^3u + 12u\,Du] = \sum a_{ij}\, D_iD_ju \quad .$$

Supposons que (A,ϑ) soit la jacobienne d'une courbe algébrique C. Le th. 1 (§1) nous assure que la fonction θ satisfait à une équation du type (1) (ou (2), ou (3)), et ce pour chaque point $\overline{D}$ de la courbe canonique. On sait qu'on obtient ainsi l'équation de Kadomtsev-Petviashvili (K-P), de la forme

$$D\,[D^3u + 12u\,Du] = DD_1u + D_2^2u \quad .$$

La conjecture de Novikov, démontrée par Shiota, affirme que cette équation caractérise les jacobiennes. La conjecture 2 est donc une généralisation de la conjecture de Novikov, peut-être plus naturelle géométriquement.

3. Exemples

Nous allons étudier les ensembles $V(\Gamma_{00})$ et $V_{inf}(\Gamma_{00})$ dans quelques cas simples. Cette étude est basée sur la remarque suivante. Pour tout $a \in A$, la fonction $\theta(z+a)\,\theta(z-a)$ est une fonction thêta du second ordre. Si $a \in \Theta$, elle appartient à Γ_0; si en outre $a \in \mathrm{Sing}\,\Theta$, elle appartient à Γ_{00}. Soit de plus D un champ de vecteurs constant sur T; toujours pour $a \in \mathrm{Sing}\,\Theta$, la fonction thêta du second ordre

$$D_a\,[\theta(z+a)\,\theta(z-a)] = \theta(z-a)\,D\theta(z+a) - \theta(z+a)\,D\theta(z-a)$$

s'annule en 0 avec multiplicité $\geqslant 3$, donc appartient à Γ_{00}. Ce moyen est essentiellement le seul que nous possédions pour fabriquer explicitement des diviseurs de $|2\Theta|_{00}$; nous allons voir qu'il permet dans certains cas de tester les conjectures 1 et 2. Il ne s'applique bien sûr qu'aux variétés abéliennes principalement polarisées dont le diviseur Θ possède suffisamment de singularités.

Rappelons d'autre part (§2,a) que la dimension de Γ_{00} est

(4) $$\dim \Gamma_{00} = 2^g - \tfrac{1}{2}g(g+1) - 1 \; .$$

a) <u>$g = 3$</u>

Dans ce cas la formule (4) montre que $|2\Theta|_{00}$ est formé d'un seul diviseur. Si C n'est pas hyperelliptique, il est facile de voir que le diviseur (réduit) C-C appartient à $|2\Theta|$, et a multiplicité 4 à l'origine : c'est donc le diviseur cherché.

Si C est hyperelliptique, le diviseur Θ a un unique point singulier, qui est d'ordre 2 et que l'on peut donc prendre comme origine de A; le diviseur 2Θ appartient alors à $|2\Theta|_{00}$. On en déduit aisément le th. 1 dans ce cas.

b) Jacobiennes de genre 4

Soit C une courbe de genre 4, que nous supposerons non hyperelliptique (le cas hyperelliptique est facile, et laissé en exercice). Le modèle canonique de C est intersection d'une quadrique Q et d'une cubique de $\mathbb{P}^3$. Supposons d'abord Q lisse. Alors C a deux g_3^1 distincts, qui définissent deux points singuliers $\pm a$ de Θ. Soit $(D_1, \dots, D_4)$ une base de T; la méthode ci-dessus fournit les éléments suivants de Γ_{00} :

$\varphi_0(z) = \theta(z+a)\,\theta(z-a)$; $\quad \varphi_i(z) = \theta(z-a)\, D_i\theta(z+a) - \theta(z+a)\, D_i\theta(z-a) \qquad (i = 1,\dots,4).$

Ces éléments sont linéairement indépendants : cela résulte du fait bien connu que les fonctions $D_1\theta, \dots, D_4\theta$ forment une base de $\Gamma(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(\Theta))$. Comme Γ_{00} est de dimension 5 (formule (4)), $\varphi_0, \dots, \varphi_4$ forment une *base* de Γ_{00}.

Soit $z \in V(\Gamma_{00})$. On a alors $\theta(z+a)=0$ ou $\theta(z-a)=0$. Si par exemple on a $\theta(z-a)=0$ mais $\theta(z+a)\neq 0$, on trouve $D_i\theta(z-a)=0$ pour tout i, c'est-à-dire $z \in \operatorname{Sing}\Theta_a = \{0, 2a\}$; si de même on a $\theta(z+a)=0$ mais $\theta(z-a)\neq 0$, on trouve $z=0$ ou $z=-2a$. On conclut que $V(\Gamma_{00})$ est réunion de $\Theta_a \cap \Theta_{-a}$ et des points $2a$, $-2a$. La surface $\Theta_a \cap \Theta_{-a}$ contient C−C, et ces deux surfaces ont même classe de cohomologie ϑ^2; elles sont donc égales. D'autre part, il existe un diviseur κ sur C tel qu'on ait $2\kappa \equiv K_C$ et que Θ soit l'ensemble des classes de diviseurs de la forme $E-\kappa$, avec E effectif de degré 3; si l'on désigne par $|D|$, $|D'|$ les deux g_3^1 sur C, on a $a \equiv D-\kappa$, d'où $2a \equiv D-D'$. On a ainsi prouvé l'assertion a') du th. 1.

Considérons maintenant $V_{inf}(\Gamma_{00})$. Au voisinage de l'origine, la fonction $\theta(z+a)$ admet un développement de Taylor

$$\theta(z+a) = q(z) + f(z) + \text{ termes de degré } \geq 4 \ ,$$

où q et f sont des polynômes homogènes sur T, de degré 2 et 3 respectivement. La quadrique $q=0$ dans $\mathbb{P}(T)$ est le cône tangent à Θ en a, qui s'identifie à l'unique quadrique Q contenant la courbe canonique. De même le cône osculateur $q=f=0$ dans $\mathbb{P}(T)$ s'identifie à la courbe canonique.

Comme θ est paire, le développement de Taylor de $\theta(z-a)$ en $z=0$ s'écrit

$$\theta(z-a) = q(z) - f(z) + \text{ termes de degré } \geq 4 \ .$$

Les fonctions $\varphi_0, \dots, \varphi_4$ ont donc respectivement comme terme initial à l'origine les polynômes de degré 4

$$q^2 \quad ; \qquad q\, D_i f - f\, D_i q\,.$$

Ces polynômes sont linéairement indépendants, sans quoi q diviserait f (cela donne une autre démonstration du fait que $\varphi_0, \dots, \varphi_4$ sont linéairement indépendantes dans Γ_{00}). Il est clair que l'ensemble de leurs zéros communs est la courbe $q = f = 0$. Cela prouve le th. 1,b) dans ce cas.

Considérons maintenant le cas où la quadrique Q est singulière. Le diviseur Θ a alors un point double unique, que l'on peut prendre comme origine. Avec les notations ci-dessus, il existe un champ de vecteurs constant non nul D sur T tel que $Dq = 0$. Posons $\varphi_0 = \theta^2$ et, pour $1 \leqslant i \leqslant 4$,

$$\varphi_i = \frac{1}{2} DD_i [\theta(z+u)\, \theta(z-u)]_{u=0} = \theta\, DD_i\theta - D\theta\, D_i\theta\,.$$

On vérifie comme ci-dessus que ces fonctions forment une *base* de Γ_{00}. On en déduit que $V(\Gamma_{00})$ est la surface définie par les équations $\theta = D\theta = 0$, et l'on voit comme précédemment que cette surface coïncide avec C-C. Le développement à l'origine de θ s'écrit cette fois

$$\theta(z) = q(z) + g(z) + \text{termes de degré} \geqslant 6,$$

où q et g sont des polynômes homogènes de degré 2 et 4 respectivement. Posons $f = Dg$; on vérifie facilement que la surface $f = 0$ dans $\mathbb{P}(T)$ est une cubique irréductible contenant la courbe. Les termes initiaux des fonctions $\varphi_0, \dots, \varphi_4$ sont les polynômes q^2 et $q\, D_i f - f\, D_i q$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$. L'ensemble de leurs zéros communs est formé de la courbe canonique et du sommet s du cône Q (d'où le th. 1 b')). Ceci est l'unique cas où la fonction θ d'une jacobienne vérifie une équation du type (3) distincte de l'équation K-P.

Remarque. - Soit (A, ϑ) une variété abélienne principalement polarisée (indécomposable) de dimension 4, qui ne soit pas une jacobienne, et soit a un point singulier de Θ. On sait alors [1] que a est un point d'ordre 2 de A, tel que la thêta-constante correspondante s'annule. Si a n'est pas un point double ordinaire de Θ, on peut appliquer le raisonnement précédent pour obtenir que $V(\Gamma_{00})$ est une surface. La conjecture 1 pour $g = 4$ entraîne donc que les seules singularités de Θ sont des points doubles ordinaires.

c) La jacobienne intermédiaire d'une hypersurface cubique dans $\mathbb{P}^4$

Soit X une hypersurface cubique lisse dans $\mathbb{P}^4$. La jacobienne intermédiaire (A,ϑ) de X est une variété abélienne principalement polarisée de dimension 5, dont le diviseur Θ admet comme seule singularité un *point triple,* que l'on peut prendre comme origine [2]. Soit $(D_1, \dots, D_5)$ une base de T; les fonctions θ^2 et $\theta\, D_iD_j\theta - D_i\theta\, D_j\theta$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 5)$ appartiennent à Γ_{00}. On en déduit aussitôt $V(\Gamma_{00}) \subset \operatorname{Sing}\Theta$, c'est-à-dire $V(\Gamma_{00}) = \{0\}$.

Notons f le terme initial du développement de f à l'origine; l'hypersurface $f=0$ dans $\mathbb{P}(T)$ s'identifie à X (*loc. cit.*). Les termes initiaux des éléments de Γ_{00} ci-dessus sont alors f^2 et les polynômes quartiques $f_{ij} = f\, D_iD_jf - D_if\, D_jf$. Soit $(X_1, \dots, X_5)$ la base de T^* duale de $(D_1, \dots, D_5)$; on a $\sum X_iX_j\, f_{ij} = -3\, f^2$. Il en résulte que $V_{inf}(\Gamma_{00})$ est contenu dans le lieu singulier de X, donc est vide. On a donc prouvé les conjectures 1 et 2 dans cet exemple.

On montre facilement que les fonctions θ^2 et $\theta\, D_iD_j\theta - D_i\theta\, D_j\theta$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 5)$ forment une base de Γ_{00} ; les polynômes f_{ij} forment une base de $\alpha(\Gamma_{00})$, tandis que θ^2 est (à un scalaire près) l'unique élément de Γ s'annulant avec multiplicité $\geqslant 6$ à l'origine.

On peut traiter de la même manière l'exemple de la jacobienne d'une courbe hyperelliptique C de genre 5. Le g_4^2 de C fournit un point triple de Θ à l'origine; le cône tangent est l'hypersurface des bisécantes à $\kappa(C)$, qui est une quartique rationnelle normale dans $\mathbb{P}^4$. On en déduit facilement le th.1 dans ce cas.

d) Variété de Prym des courbes planes

En dimension plus grande il n'est plus possible d'expliciter une base de Γ_{00} comme nous l'avons fait dans les exemples ci-dessus. On peut dans quelques cas démontrer les conjectures 1 ou 2 à l'aide des remarques suivantes. Soit x un point de $V(\Gamma_{00})$, et a un point de $\operatorname{Sing}\Theta$. Comme la fonction $\theta(z+a)\,\theta(z-a)$ appartient à Γ_{00}, on a $a \in \Theta_x \cup \Theta_{-x}$. Soit maintenant Z une sous-variété irréductible de $\operatorname{Sing}\Theta$. On a alors $Z \subset \Theta_x$ ou $Z \subset \Theta_{-x}$; si de plus Z est *symétrique,* chacune de ces inclusions est vérifiée. On a donc $V(\Gamma_{00}) \subset \{\, x \in A \mid Z \subset \Theta_x \,\}$. D'autre part $V_{inf}(\Gamma_{00})$ est contenu dans l'intersection (dans $\mathbb{P}(T)$) des cônes tangents à Θ en ses points doubles.

Nous utilisons dans [4] la première remarque pour prouver la conjecture 1 pour les *variétés de Prym associées à des courbes planes* , grâce à la description explicite de Sing Θ donnée dans ce cas par Mumford.

§4. Variétés abéliennes principalement polarisées génériques

Nous arrivons maintenant au résultat principal de cet exposé:

Théorème 2.- *Pour tout entier* $g \geqslant 4$, *il existe une variété abélienne principalement polarisée de dimension* g *pour laquelle* $V(\Gamma_{00})$ *est réduit à* $\{0\}$ *et* $V_{inf}(\Gamma_{00})$ *est vide.*

Par semi-continuité, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire.- *Soit* (A,ϑ) *une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension* $\geqslant 4$. *Alors* $V(\Gamma_{00})$ *est fini et* $V_{inf}(\Gamma_{00})$ *est vide.*

Nous commencerons par quelques préliminaires sur les variétés abéliennes. Fixons d'abord quelques notations. Soient A une variété abélienne, L un fibré en droites sur A, s un élément de $H^0(A,L)$, a un point de A. Nous poserons $L_a = (T_a)_* L$ et $s_a = (T_a)_* s \in H^0(A, L_a)$, où T_a désigne la translation $z \mapsto z+a$ dans A. Nous noterons comme d'habitude H(L) le sous-groupe de A formé des éléments a tels que L soit isomorphe à L_a; il est fini lorsque L est ample. Soient Z une sous-variété de A, définie par un idéal $\mathcal{I}_Z$ de $\mathcal{O}_A$. Tout champ de vecteurs D sur A définit des applications $\mathcal{O}_A$-linéaires $D : \mathcal{I}_Z \to \mathcal{O}_Z$ et $D \otimes 1_L : \mathcal{I}_Z L \to L_{|Z}$. Si toutes les sections de L s'annulent sur Z on en déduit un homomorphisme $D_L : H^0(A,L) \to H^0(Z,L_{|Z})$.

Lemme 1.- *Soient* X *une variété abélienne de dimension* $\geqslant 2$ *et* M *un fibré en droites ample sur* X; *on suppose qu'on a* $h^0(M)=2$ *et que le pinceau* $|M|$ *n'a pas de composante fixe. Notons* B *l'intersection des éléments de* $|M|$.

a) *Soit* x *un élément de* X *qui n'est pas dans* H(M). *Alors l'homomorphisme de restriction* $H^0(X,M_x) \to H^0(B,M_x)$ *est injectif.*

b) *L'homomorphisme* $(D,s) \mapsto D_L s$ *de* $H^0(X,T_X) \otimes H^0(X,M)$ *dans* $H^0(B,M)$ *est injectif.*

L'assertion a) est une conséquence facile de la suite exacte

$$0 \to M_x \otimes M^{-2} \to (M_x \otimes M^{-1}) \oplus (M_x \otimes M^{-1}) \to M_x \to M_x|_B \to 0,$$

et de l'annulation des espaces de cohomologie $H^0(X, M_x \otimes M^{-1})$ (pour $x \notin H(M)$) et $H^1(X, M_x \otimes M^{-2})$. L'assertion b) est démontrée par exemple dans [5, lemme 12.3]. ∎

Considérons maintenant deux variétés abéliennes X_1 et X_2 de dimension $\geqslant 2$, munies de fibrés en droites amples M_1 et M_2, satisfaisant à $h^0(M_1)=h^0(M_2)=2$. Soient α_1 et β_1 (resp. α_2 et β_2) des générateurs de $H(M_1)$ (resp. $H(M_2)$). Il existe alors une variété abélienne principalement polarisée (A,ϑ) et une isogénie $\pi : X_1 \times X_2 \longrightarrow A$ dont le noyau est engendré par (α_1,α_2) et (β_1,β_2). On peut trouver pour $i=1,2$ une base (s_i,t_i) de $H^0(X_i,M_i)$ de façon que le diviseur $\pi^*\Theta$ sur $X_1 \times X_2$ ait pour équation $s_1s_2+t_1t_2 = 0$. On supposera que l'intersection B_i des diviseurs du pinceau $|M_i|$ est *réduite* et de codimension 2. La sous-variété $B=\pi(B_1\times B_2)$ est contenue dans $\operatorname{Sing}\Theta$.

Lemme 2.- a) *On a*

$$\{\, a\in A \mid B \subset \Theta_a \,\} = \pi(X_1) \cup \pi(X_2)\, .$$

b) *L'intersection dans* $T_0(A)$ *des cônes tangents à* Θ *en les points de* B *est la réunion des espaces tangents à* X_1 *et* X_2 *en* 0.

Prouvons a). L'inclusion $B\subset\Theta_{\pi(x)}$ pour $x\in X_i$ est immédiate. Inversement, soit $a=\pi(a_1,a_2)$ un point de A satisfaisant à $B \subset \Theta_a$. Pour tout élément b_1 de B_1, la restriction à B_2 de l'élément $s_{1,a_1}(b_1)\, s_{2,a_2} + t_{1,a_1}(b_1)\, t_{2,a_2}$ de $H^0(X_2, M_{2,a_2})$ est alors nulle. Si $a_2\in H(M_2)$, on a $a\in\pi(X_1)$; dans le cas contraire, on déduit du lemme 1 qu'on a $s_{1,a_1}(b_1) = t_{1,a_1}(b_1) = 0$, et ce pour tout $b_1\in B_1$. Comme B_1 est réduit, une nouvelle application du lemme 1 entraîne alors $a_1\in H(M_1)$, d'où $a\in\pi(X_2)$.

Prouvons b). Pour $i=1,2$, soit D_i un vecteur tangent à X_i en 0, que nous considérerons aussi comme un champ de vecteurs sur X_i. Pour que le vecteur (D_1,D_2) soit dans l'intersection des cônes tangents à $\pi^*\Theta$ aux points de $B_1\times B_2$, il faut et il suffit qu'on ait, pour tout $(b_1,b_2)\in B_1\times B_2$,

$$D_1s_1(b_1)\, D_2s_2(b_2) + D_1t_1(b_1)\, D_2t_2(b_2) = 0\, ,$$

ce qui signifie que pour tout $b_1\in B_1$ la section $D_1s_1(b_1)\, s_2 + D_1t_1(b_1)\, t_2$ de $H^0(X_2, M_2)$ est annulée par D_2. Compte tenu du lemme 1, cela entraîne $D_2=0$ ou $D_1s_1(b_1)=D_1t_1(b_1)=0$ pour tout $b_1\in B_1$. Comme B_1 est réduit, la seconde condition implique $D_1=0$ (lemme 1), d'où le lemme. ∎

Nous allons maintenant démontrer le théorème en considérant un cas particulier de la construction précédente. Pour $1\leqslant i\leqslant g$, soit E_i une courbe elliptique; notons o_i son origine et M_i le fibré en droites $\mathcal{O}(2o_i)$. Choisissons deux générateurs α_i et β_i du groupe des points d'ordre 2 de E_i. Il existe alors une variété abélienne principalement polarisée (A,ϑ) et une isogénie $\rho : E_1\times \ldots \times E_g \longrightarrow A$ dont le noyau est engendré par les éléments $(\beta_1, \ldots ,\beta_g)$, et $\alpha_{ij} = (0,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_j,\ldots,0)$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant g$. On peut trouver pour $1 \leqslant i \leqslant g$ une base (s_i,t_i) de $H^0(E_i, M_i)$ de façon que le diviseur $\rho^*\Theta$ ait pour équation $s_1s_2\ldots s_g + t_1t_2\ldots t_g = 0$.

Pour tout sous-ensemble I de $\{1, \ldots ,g\}$, notons X_I le quotient de $\prod_{i\in I} E_i$ par le sous-groupe engendré par les α_{ij} pour i et j dans I. L'image dans X_I de $(0,\ldots,\alpha_i,\ldots,0)$ est indépendante de $i \in I$; on la notera α_I. Notons β_I l'image dans X_I de $(\beta_i)_{i\in I}$.

Si J désigne le complémentaire de I dans $\{1, \ldots ,g\}$, l'isogénie $\pi: X_I\times X_J \longrightarrow A$ est du type étudié précédemment; son noyau est engendré par (α_I,α_J) et (β_I,β_J). Supposons que I *et* J *aient au moins deux éléments.* On vérifie facilement que les lieux de base B_I et B_J sont réduits et de codimension 2; la sous-variété $\pi(B_I\times B_J)$ de $\operatorname{Sing}\Theta$ est réunion de translatés de sous-variétés abéliennes de codimension 4 de A par des points d'ordre 2, de sorte que ses composantes irréductibles sont symétriques. On en déduit (cf. §3,d)) que pour $x \in V(\Gamma_{00})$ on a $\pi(B_I\times B_J) \subset \Theta_x$, d'où d'après le lemme 2

$$V(\Gamma_{00}) \subset \pi(X_I) \cup \pi(X_J) \qquad \text{pour } 2 \leqslant \operatorname{Card}(I) \leqslant g-2 .$$

Ceci entraîne aussitôt

$$V(\Gamma_{00}) \subset \pi(E_1) \cup \ldots \cup \pi(E_g) \quad .$$

On prouve de la même manière la version infinitésimale de cette inclusion:

$$V_{inf}(\Gamma_{00}) \subset \mathbb{P}T_0(E_1) \cup \ldots \cup \mathbb{P}T_0(E_g) \quad .$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant g$, notons $\varphi_i : E_i \longrightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme défini par la base (s_i,t_i) de $H^0(E_i, M_i)$. Posons $\mu_i = \varphi_i(o_i)$; c'est un nombre complexe (différentde 0, ± 1 et $\pm\sqrt{-1}$). Nous allons imposer entre les modules μ_i des courbes elliptiques E_i la relation $\mu_1\mu_2 \ldots \mu_g + 1 = 0$. L'origine de A est alors sur le diviseur Θ, ce qui entraîne

$$V(\Gamma_{00}) \subset \Theta \cap \bigcup_{i=1}^{g} \pi(E_i) = \{0\} ,$$

puisqu'on a $\varphi_i^{-1}(\mu_i) = \{o_i\}$. D'autre part, il existe une coordonnée locale z_i sur E_i

au voisinage de o_i telle qu'on ait $\varphi_i = \mu_i + z_i^2$; le diviseur Θ admet donc comme équation au voisinage de l'origine

$$1 + \prod_{i=1}^{g} (\mu_i + z_i^2) = 0 .$$

Son cône tangent en 0 est la quadrique d'équation $\sum_i \mu_i^{-1} z_i^2 = 0$ dans $\mathbb{P}(T)$. Il ne rencontre aucun des points $\mathbb{P}T_0(E_i)$, donc $V_{inf}(\Gamma_{oo})$ est vide. Cela achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BEAUVILLE : *Prym varieties and the Schottky problem.* Invent. math. 41 (1977), 149-196.

[2] A. BEAUVILLE : *Les singularités du diviseur Θ de la jacobienne intermédiaire de l'hypersurface cubique dans* $\mathbb{P}^4$. Algebraic threefolds (Proc. Varenna 1981), 190-208; Lecture Notes 947, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1982).

[3] A. BEAUVILLE : *Le problème de Schottky et la conjecture de Novikov.* Exp. 675 du sém. Bourbaki, Astérisque 152-153 (1988), 101-112.

[4] A. BEAUVILLE, O. DEBARRE, R. DONAGI, G. VAN DER GEER : *Sur les fonctions thêta d'ordre 2 et les singularités du diviseur thêta.* C. R. Acad. Sci. Paris t. 307, sér.I (1988), 481-484.

[5] O. DEBARRE: *Sur les variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier en codimension 3.* Duke math. J. 57 (1988), 221-273.

[6] R. DONAGI: *The Schottky problem.* Theory of moduli (Montecatini Terme 1985), 84-137; Lecture Notes 1337, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1988).

[7] B. VAN GEEMEN, G. VAN DER GEER: *Kummer varieties and the moduli spaces of abelian varieties.* Amer. J. of Math. 108 (1986), 615-642.

[8] G. WELTERS: *The surface* C-C *on Jacobi varieties and 2nd order theta functions.* Acta math. 157 (1986), 1-22.