Séminaire P.LELONG
(Analyse)
10e année, 1969/70 29 Avril 1970

UNE NOTION DE RÉSIDU EN GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

par A. B E A U V I L L E

Introduction

Le but de cet exposé est de donner la définition et les propriétés élémentaires du "résidu" défini par A.GROTHENDIECK en géométrie algébrique. On se place ici dans le cadre de la géométrie analytique de [1] , c'est-à-dire que les espaces analytiques considérés sont de dimension finie sur $\mathbb{C}$.

1. - Préliminaires : catégories dérivées

Rappelons brièvement les propriétés des catégories dérivées ([2] , [3]). Soit A une catégorie abélienne ; on désigne par K(A) la catégorie dont les objets sont les complexes d'objets de A et les flèches les classes d'homomorphismes de complexes pour la relation d'homotopie (les complexes considérés sont toujours des complexes de cochaînes, i.e. à différentielle de degré + 1).

On dit qu'un morphisme de K(A) est un quasi-isomorphisme s'il induit un isomorphisme sur l'homologie. La "catégorie dérivée" D(A) est caractérisée par la propriété suivante : il existe un foncteur Q : $K(A) \longrightarrow D(A)$, transformant quasi-isomorphismes en isomorphismes, et tel que tout foncteur de K(A) dans une catégorie quelconque transformant quasi-isomorphismes en isomorphismes se factorise par Q. Le foncteur Q est essentiellement surjectif, de sorte qu'on peut encore considérer les objets de D(A) comme des complexes d'objets de A.

Lorsqu'on ne considère que les complexes bornés inférieurement (resp. bornés supérieurement, resp. bornés), on obtient des sous-catégories pleines de K(A) et D(A), notées $K^+(A)$ et $D^+(A)$ (resp. $K^-(A)$ et $D^-(A)$, resp. $K^b(A)$ et $D^b(A)$).

Si $F : A \to B$ est un foncteur additif de catégories abéliennes, on peut sous certaines conditions définir un "foncteur dérivé" $\underline{\underline{R}}F : D(A) \to D(B)$, caractérisé par une propriété universelle. Signalons seulement un cas important d'existence du foncteur dérivé :

THÉORÈME 1

Soient $F : A \to B$ un foncteur (covariant) additif de catégories abéliennes, L une sous-catégorie pleine de A, possèdant les propriétés suivantes :

(i) L est stable par extension et conoyau (resp. noyau)

(ii) Tout objet de A se plonge dans un objet de L (resp. est quotient d'un objet de L).

(iii) F transforme toute suite exacte courte d'objets de L en suite exacte.

Alors :

a) Pour tout objet $X^\cdot$ de $K^+(A)$ (resp. $K^-(A)$), il existe un quasi-isomorphisme $X^\cdot \to P^\cdot$, avec $P^\cdot \in \mathrm{Ob}\ K^+(L)$ (resp. $P^\cdot \to X^\cdot$, avec $P^\cdot \in \mathrm{Ob}\ K^-(L)$).

b) Il existe un "foncteur dérivé" $\underline{\underline{R}}F : D^+(A) \to D^+(B)$ (resp. $\underline{\underline{L}}F : D^-(A) \to D^-(B)$); avec les notations de a. , on a : $\underline{\underline{R}}F(X^\cdot) = F(P^\cdot)$ (resp. $\underline{\underline{L}}F(X^\cdot) = F(P^\cdot)$).

Remarques

Les conditions (i) à (iii) sont remplies notamment par la catégorie des objets injectifs (resp. projectifs) de A, lorsque A possède assez d'injectifs (resp. de projectifs). Lorsque X est un complexe réduit à un seul objet en degré zéro, les objets de cohomologie de $\underline{\underline{R}}F(X)$ sont alors les foncteurs dérivés classiques $R^i\,F(X)$ de CARTAN-EILENBERG.

Le théorème 1 s'étend facilement au cas d'un foncteur contravariant ou d'un bifoncteur.

Exemples.

Soient (X, O_X) un espace annelé, Mod(X) la catégorie des O_X-Modules ; dans la suite, on écrira simplement $D(X)$, $D^+(X)$, $D^-(X)$ pour $D(\mathrm{Mod}\,(X))$, $D^+(\mathrm{Mod}(X))$, $D^-(\mathrm{Mod}(X))$.

La catégorie Mod(X) a assez d'injectifs (CARTAN-EILENBERG) ; si $\underline{Ab}$ désigne la catégorie des groupes abéliens, on peut donc définir les foncteurs :

$$\underline{\underline{R}}\,\Gamma \quad : D^+(X) \longrightarrow D^+(\underline{Ab})$$

$$\underline{\underline{R}}\,\mathrm{Hom} \quad : D(X) \times D^+(X) \longrightarrow D(\underline{Ab}) \qquad (\text{"Hom globaux"})$$

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{\mathrm{Hom}} \quad : D(X) \times D^+(X) \longrightarrow D(X) \qquad (\text{"}\underline{\mathrm{Hom}}\text{ locaux"})$$

avec $H^i(\underline{\underline{R}}\,\Gamma(F)) = H^i(X, F)$; $H^i(\underline{\underline{R}}\,\mathrm{Hom}(F, G)) = \mathrm{Ext}^i(F, G)$ (Ext globaux)

$$H^i(\underline{\underline{R}}\,\underline{\mathrm{Hom}}\,(F, G)) = \underline{\mathrm{Ext}}^i\,(F, G) \qquad (\underline{\mathrm{Ext}}\text{ locaux}).$$

Si $f : (X, O_X) \longrightarrow (Y, O_Y)$ est un morphisme d'espaces annelés, on définit de même $\underline{\underline{R}}f_* : D^+(X) \longrightarrow D^+(Y)$; on aura $H^i(\underline{\underline{R}}f_*(F)) = R^i\,f_*(F)$.

D'autre part, il est facile de vérifier que la catégorie des O_Y-Modules plats possède les propriétés (i) à (iii) vis-à-vis du foncteur image réciproque f^*; on peut donc définir le foncteur dérivé $\underline{\underline{L}}\,f^* : D^-(Y) \longrightarrow D^-(X)$.
De même, le produit tensoriel sur X admet un foncteur dérivé $\underline{\underline{\otimes}} : D^-(X) \times D^-(X) \longrightarrow D^-(X)$. On remarquera que les faisceaux de cohomologie des complexes obtenus ne peuvent se calculer par la méthode de CARTAN-EILENBERG faute

de connaître les projectifs dans Mod(X).

THÉORÈME 2

Soient $F : A \to B$, $G : B \to C$ deux foncteurs covariants additifs de catégories abéliennes; supposons données des sous-catégories pleines $L \subset A$ et $K \subset B$ possèdant les propriétés (i) à (iii) du théorème 1 vis-à-vis de F et G (de sorte qu'on peut définir des foncteurs dérivés $\underline{\underline{R}}F$ et $\underline{\underline{R}}G$, resp. $\underline{\underline{L}}F$ et $\underline{\underline{L}}G$) ; supposons en outre que $F(L) \subset K$. Il existe alors un isomorphisme fonctoriel canonique:

$$\underline{\underline{R}}(G \circ F) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{R}}G \circ \underline{\underline{R}}F$$

$$(\text{resp. } \underline{\underline{L}}(G \circ F) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{L}}G \circ \underline{\underline{L}}F) .$$

Cet isomorphisme remplace avantageusement la classique suite spectrale de LERAY. Dans le cas d'un morphisme $f : X \to Y$ d'espaces annelés, on trouve par exemple les isomorphismes :

$$\underline{\underline{R}}\,\Gamma_Y \circ \underline{\underline{R}}\,f_* \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{R}}\,\Gamma_X$$

$$\underline{\underline{R}}\,\Gamma \circ \underline{\underline{R}}\,\underline{Hom} \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{R}}\,\mathrm{Hom} .$$

2. - Préliminaires : foncteur $f^!$

Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques. Le foncteur $\underline{\underline{R}}\,f_* : D^+(X) \to D^+(Y)$ a un adjoint à gauche, à savoir $\underline{\underline{L}}f^*$; la théorie de la dualité ([2] , [5]) montre qu'il a aussi un adjoint à droite $f^! : D^+(Y) \to D^+(X)$, lorsque f est propre. Ce foncteur satisfait les propriétés habituelles d'un adjoint vis-à-vis de la composition des morphismes. Lorsque f est fini, la formule d'adjonction donne une définition directe de $f^!$; une formule de changement de base donne alors une définition explicite de $f^!$ lorsque f est lisse ([4]) .

Pour éviter d'utiliser les résultats de la théorie de la dualité, on va procéder différemment et définir a priori le foncteur $f^!$ pour un morphisme lisse ou fini ; on vérifiera ensuite par le calcul les propriétés nécessaires à la suite.

Rappelons quelques définitions de géométrie analytique. Soit X un espace analytique ; une suite $(t_1 \dots t_n)$ d'éléments de $\Gamma(X, O_X)$ est dite O_X-régulière si pour tout $i (1 \leqslant i \leqslant n)$ t_i n'est pas diviseur de zéro dans le faisceau $O_X / (t_1 \dots t_{i-1}) O_X$. Une immersion fermée d'espaces analytiques $Y \to X$ (i.e. un isomorphisme de Y sur un sous-espace de X, défini par un idéal I de O_X) est régulière si I est engendré localement par une suite O_X-régulière. Ceci entraîne que le O_Y-Module I/I^2 ("Module conormal" de l'immersion) est localement libre ; son rang r est la "codimension" de l'immersion régulière. On pose $\omega_{Y/X} = \underline{\mathrm{Hom}}_{O_Y}(\Lambda^r I/I^2, O_Y)$; c'est un faisceau inversible sur Y.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme lisse de dimension n (c'est-à-dire un morphisme plat dont les fibres $f^{-1}(y)$ sont des variétés de dimension n), le faisceau des différentielles relatives $\Omega^1_{X/Y}$ est un O_X-Module localement libre de rang n (c'est le faisceau qui induit sur chaque fibre $f^{-1}(y)$ le faisceau des 1-formes différentielles régulières, au sens classique, sur cette variété ; cf. [1]) ; on pose $\omega_{X/Y} = \Lambda^n \Omega^1_{X/Y} = \Omega^n_{X/Y}$, avec en général $\Omega^p_{X/Y} = \Lambda^p \Omega^1_{X/Y}$. C'est encore un faisceau inversible sur X.

PROPOSITION 1

Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux morphismes d'espaces analytiques tels que f, g et gf soient des morphismes lisses ou des immersions fermées régulières. On a des isomorphismes :

$$\zeta_{f,g} : \omega_{X/Z} \xrightarrow{\sim} \omega_{X/Y} \otimes_X f^* \omega_{Y/Z} .$$

La démonstration se déduit facilement des deux suites exactes suivantes :

- Si f et g (donc gf) sont lisses :

$$0 \longrightarrow f^* \Omega^1_{Y/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0$$

- Si g et gf sont lisses, et si f est une immersion fermée régulière, définie par un idéal I :

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow f^* \Omega^1_{Y/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Z} \longrightarrow 0$$

Voir [2] pour les détails.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini (i.e. propre à fibres finies) ; on sait alors ([1]) que le foncteur f_* est exact et réalise une équivalence de la catégorie des O_X-Modules avec la catégorie des $f_*(O_X)$-Modules. On désignera par (f_*^{-1}) un foncteur quasi-inverse (défini à un isomorphisme canonique près).

Définition

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme, $F^\cdot \in D^+(Y)$. On pose :

- Si f est lisse de dimension n : $f^!(F^\cdot) = f^*(F^\cdot) \otimes \omega_{X/Y}[n]$ (où $G^\cdot[n]$ est le complexe $G^\cdot$ translaté de n degrés vers la gauche).

- Si f est fini : $f^!(F^\cdot) = (f_*^{-1})\ \underline{\underline{R}}\ \underline{Hom}_{O_Y}(f_* O_X, F^\cdot)$.

Conformément au § 1, ce dernier complexe se calcule à l'aide d'un complexe d'injectifs $I^\cdot$ quasi-isomorphe à $F^\cdot$: $f^!(F^\cdot) = (f_*^{-1})\ \underline{Hom}_{O_Y}(f_* O_X, I^\cdot)$,

le complexe $\underline{Hom}_{O_Y}(f_* O_X, I^\cdot)$ étant considéré comme complexe de $f_* O_X$-Modules de manière évidente.

THÉORÈME 3

a) Soient f, g deux morphismes lisses ou finis, tels que le composé gf soit lisse ou fini; il existe un isomorphisme fonctoriel $C_{f,g} : f^! g^! \xrightarrow{\sim} (gf)^!$.

b) Si u : $Y' \longrightarrow Y$ est un morphisme de changement de base plat, on a un isomorphisme fonctoriel :

$$\begin{tikzcd} X\times_Y Y' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

$$d_{f,u} : u'^{*} f^{!} \xrightarrow{\sim} f'^{!} u^{*} \quad .$$

c) Soit $i : Y \longrightarrow X$ une immersion fermée régulière de codimension n ; il existe un isomorphisme fonctoriel :

$$\eta_i : i^{!} (F^{\cdot}) \xrightarrow{\sim} \underline{\underline{L}}i^{*} (F^{\cdot}) \otimes \omega_{Y/X} [-n]$$

Les points fondamentaux de la démonstration (cf. [2]) sont les suivants :

b) la définition de l'isomorphisme $d_{f,u}$ est immédiate. Si u (donc u') est lisse, on a aussi un isomorphisme fonctoriel $d^{!}_{f,u} : u'^{!} f^{!} \xrightarrow{\sim} f'^{!} u^{!}$.

a) Le morphisme $c_{f,g}$ se construit facilement lorsque f et g sont lisses à partir de l'isomorphisme $\zeta_{f,g}$ de la Proposition 1, lorsque f et g sont finis à partir d'un isomorphisme classique pour les modules d'homomorphismes et du théorème 2 ; et aussi lorsque f est une immersion fermée régulière et g et gf sont lisses, grâce au c) et à l'isomorphisme $\zeta_{f,g}$. Le cas général se déduit de ces cas particuliers par la considération de certains graphes de morphismes.

Etudions par exemple le cas où f est fini, g lisse, gf fini : on forme le graphe $j : X \longrightarrow X \times_Z Y$ de f (défini par $p_1 \circ j = Id_X$, $p_2 \circ j = f$) et on définit $c_{f,g}$ par :

$$\begin{tikzcd} & X\times_Z Y \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[ur, "j"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

$$c_{f,g} : f^{!}\, g^{!} \xrightarrow{c^{-1}_{j,p_2}} j^{!}\, p_2^{!}\, g^{!} \xrightarrow{d^{-1}_{gf,g}} j^{!}\, p_1^{!} (gf)^{!} \xrightarrow{c_{j,p_1}} (gf)^{!}$$

c) Il reste à construire l'isomorphisme η_i ; en remplaçant $F^{\cdot}$ par un complexe quasi-isomorphe formé de Modules plats, on est ramené à construire $\eta_i : i^{!}(F) \xrightarrow{\sim} i^{*}(F) \otimes \omega_{Y/X}[-n]$ lorsque F est un O_X-Module plat. On utilise pour cela les "complexes de KOSZUL" : si $t_1, \ldots, t_n$ sont des sections de O_X, le "complexe de KOSZUL de O_X relatif aux (t_i)" est le complexe de O_X-Modules :

$$0 \longrightarrow \Lambda^n(O_X^n) \longrightarrow \Lambda^{n-1}(O_X^n) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Lambda^1(O_X^n) \longrightarrow O_X \longrightarrow 0$$

où la différentielle $d_p : \Lambda^p(O_X^n) \longrightarrow \Lambda^{p-1}(O_X^n)$ est définie sur la base canonique $(e_1 \ldots e_n)$ de O_X^n par :

$$d_p(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^k t_{i_k} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{i_k} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$$

Lorsque la suite $(t_1 \ldots t_n)$ est O_X-régulière, il est bien connu que ce complexe est acyclique en degré $\neq 0$ (cf. par exemple [EGA III 1.1.4]), donc fournit une résolution de $O_X / (t_1 \ldots t_n).O_X$.

Soit alors $i : Y \to X$ une immersion fermée régulière, définie localement par une suite O_X-régulière $(t_1 \ldots t_n)$.

Si $K^\cdot$ est le complexe de KOSZUL de O_X relatif aux (t_i), on a localement :

$$i_* i^!(F) = \underline{\underline{R}}\, \underline{\mathrm{Hom}}_{O_X}(O_Y, F) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{O_X}(K^\cdot, F) \xrightarrow{\sim} K^\cdot \otimes F[-n] .$$

Comme F est plat, ce complexe a tous ses objets de cohomologie nuls sauf en degré n, et $H^n(i^!(F))$ est isomorphe à $F/(t_1 \ldots t_n).F = i^*(F)$. Cet isomorphisme dépend du choix des (t_i) ; on voit sans peine que la tensorisation par $\omega_{Y/X}$ est "juste ce qu'il faut" pour qu'il en devienne indépendant. Les isomorphismes locaux ainsi obtenus sont alors compatibles, de sorte qu'ils se recollent et définissent un isomorphisme global : $\eta_i : i^!(F) \xrightarrow{\sim} i^*(F) \otimes \omega_{Y/X}[-n]$.

Remarque

Les isomorphismes $c_{f,g}$, $d_{f,u}$ et η_i possèdent évidemment toutes les propriétés de compatibilité qu'on peut imaginer vis-à-vis de la composition et du changement de base : cf. [2] pour un petit aperçu.

3. - Définition et propriétés élémentaires du résidu

Soient $f : X \to Y$ un morphisme lisse de dimension n d'espaces analytiques; supposons données n fonctions $t_1 \ldots t_n \in \Gamma(X, O_X)$ telles que le sous-espace analytique Z de X défini par l'idéal $I = (t_1 \ldots t_n)$ de O_X soit fini sur Y. Cette hypothèse entraîne les conséquences suivantes :

- la suite $(t_1 \ldots t_n)$ est O_X-régulière
- le morphisme $g : Z \to Y$ est plat.

(pour la démonstration, voir [EGA IV, 11])

Nous appellerons "cas absolu" le cas où Y est réduit à un point , avec le corps $\mathbb{C}$ comme faisceau structural. Dans ce cas X est simplement une variété analytique de dimension n, $t_1 \ldots t_n$ n fonctions holomorphes sur X, Z le sous-espace analytique de X défini par les équations $t_1 = \ldots = t_n = 0$; l'hypothèse sur $(t_1 \ldots t_n)$
(est que Z)
est un espace fini, c'est-à-dire que les n sous-espaces analytiques de X définis par $t_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ forment une "intersection complète" (on prendra garde qu'ils ne sont pas supposés se couper transversalement, c'est-à-dire que Z n'est pas nécessairement une sous-variété de X; on verra d'ailleurs que ce cas est trivial du point de vue adopté ici).

Le cas général, ou "cas relatif" , peut être considéré comme une "famille analytique de cas absolus" paramétrée par l'espace de base Y.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

D'après le § 2, il existe un isomorphisme canonique :

$$c_{i,f} : i^! f^!(O_Y) \to g^!(O_Y) .$$

Or comme l'immersion i est régulière

$i^! f^!(O_Y) = i^* \omega_{X/Y} \otimes_Z \omega_{Z/X}$; comme g est plat, $g_* g^!(O_Y) = \underline{\mathrm{Hom}}_{O_Y}(g_*(O_Z), O_Y)$.

L'homomorphisme naturel de O_Y dans $g_* O_Z$ définit un homomorphisme de $\underline{\mathrm{Hom}}_{O_Y}(g_*(O_Z), O_Y)$ dans O_Y, noté Ev_g ("évaluation" sur la section unité de $g_*(O_Z)$).
En composant, on trouve un morphisme :

$$\mathrm{Res}_{X/Y} : g_*(i^*\omega_{X/Y} \otimes_Z \omega_{Z/X}) \xrightarrow{c_{f,g}} g_* g^!(O_Y) \xrightarrow{Ev_g} O_Y$$

Comme la suite $(t_1 \dots t_n)$ est régulière, les classes $\bar{t}_1 \dots \bar{t}_n$ de $t_1 \dots t_n$ dans I/I^2 (avec $I = (t_1 \dots t_n)$) forment une base de cet O_Z-Module ; l'élément $\bar{t}_1 \wedge \dots \wedge \bar{t}_n$ est donc un générateur de $\Lambda^n I/I^2$; soit

$\tau \in \Gamma(Z, \omega_{Z/X}) = \mathrm{Hom}_{O_Z}(\Lambda^n I/I^2, O_Z)$ la section qui vaut 1 sur ce générateur.

<u>Définition</u>. Soit $\omega \in \Gamma(X, \omega_{X/Y})$. On pose :

$$\mathrm{Res}_{X/Y} \begin{bmatrix} \omega \\ t_1 \dots t_n \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{X/Y}(i^*\omega \otimes \tau)$$

C'est un élément de $\Gamma(Y, O_Y)$ ("résidu de ω par rapport à $t_1 \dots t_n$").

<u>Remarque</u>. Dans le cas absolu, ω est une n-forme analytique au sens classique, et le résidu est un nombre complexe.
Dans le cas relatif, ω définit sur les fibres une n-forme, "paramétrée analytiquement" par l'espace de base ; le résidu dépend alors analytiquement du paramètre.

Pour énoncer les propriétés du résidu, on supposera toujours que les conditions assurant son existence sont effectivement satisfaites.

<u>THÉORÈME 4</u>

Le résidu possède les propriétés suivantes :

a. $\mathrm{Res}_{X/Y} \begin{bmatrix} \omega \\ t_1 \dots t_n \end{bmatrix}$ est O_Y-linéaire en ω, et ne dépend que de la restriction de ω à Z.

b) Si $s_i = \sum_{j=1}^{j=n} c_{ij}\, t_j$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, avec $s_i,\ t_j,\ c_{ij} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$:

$$\mathrm{Res}_{X/Y}\begin{bmatrix} \omega \\ t_1 \ \ldots\ t_n \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{X/Y}\begin{bmatrix} \det(c_{ij}).\omega \\ s_1 \ \ldots\ s_n \end{bmatrix}$$

En particulier , le résidu est alterné par rapport aux t_i .

c) Localisation sur Z : soient $(Z_\lambda)_{\lambda \in L}$ les composantes connexes de Z, et pour chaque λ U_λ un voisinage ouvert de Z_λ dans X ne rencontrant pas les Z_μ pour $\mu \neq \lambda$; alors :

$$\mathrm{Res}_{X/Y}\begin{bmatrix} \omega \\ t_1 \ \ldots\ t_n \end{bmatrix} = \sum_{\lambda \in L} \mathrm{Res}_{U_\lambda/Y}\begin{bmatrix} \omega/U_\lambda \\ t_1/U_\lambda \ldots\ t_n/U_\lambda \end{bmatrix}$$

d) Changement de base :

$$\begin{array}{ccc} X' = X \times_Y Y' & \xrightarrow{v} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{u} & Y \end{array} \qquad \mathrm{Res}_{X'/Y'}\begin{bmatrix} v^*\omega \\ u^* t_1 \ \ldots\ u^* t_n \end{bmatrix} = u^* \mathrm{Res}_{X/Y}\begin{bmatrix} \omega \\ t_1 \ \ldots\ t_n \end{bmatrix}$$

e) Transitivité.

Soient $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ deux morphismes lisses de dimensions respectives n et p, $\omega \in \Gamma(X, \Omega^n_{X/Y})$, $t_1 \ldots t_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$; $\omega_1 \in \Gamma(Y, \Omega^p_{Y/Z})$, $s_1 \ldots s_p \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$.Alors :

$$\mathrm{Res}_{X/Z}\begin{bmatrix} \omega \otimes f^*\omega_1 \\ t_1 .. t_n ;\ f^* s_1 \ \ldots f^* s_p \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{Y/Z}\begin{bmatrix} \omega_1 . \mathrm{Res}_{X/Y}\begin{bmatrix} \omega \\ t_1 \ldots t_n \end{bmatrix} \\ s_1 \ \ldots\ s_p \end{bmatrix}$$

(où $\omega \otimes f^* \omega_1$ désigne en fait l'image de $\omega \otimes f^* \omega_1$ par l'isomorphisme $\omega_{X/Y} \otimes_X f^* \omega_{Y/Z} \xrightarrow{\sim} \omega_{X/Z}$ de la proposition 1).

f) Restriction.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ X' \arrow[ur, "i"] \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Soient $f : X \to Y$ un morphisme lisse de dimension n, $t_1 \dots t_n$ n sections de $\Gamma(X, O_X)$.

Supposons que le sous-espace analytique X' de X défini par $t_{p+1} \dots t_n$ soit lisse sur Y ; soit $\omega \in \Gamma(X, \Omega^{n-p}_{X/Y})$. Alors :

$$\operatorname{Res}_{X/Y}\begin{bmatrix} \omega \wedge dt_{p+1} \wedge \dots \wedge dt_n \\ t_1 \dots t_n \end{bmatrix} = \operatorname{Res}_{X'/Y}\begin{bmatrix} i^* \omega \\ i^* t_1 \dots i^* t_p \end{bmatrix}$$

Les démonstrations sont de nature essentiellement triviales, et résultent des propriétés de compatibilité du foncteur $f^!$. Indiquons par exemple celle du d. On pose $X' = X \times_Y Y'$, $Z' = Z \times_Y Y'$; on considère le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[rr, "v"] \arrow[dd, "f'"] & & X \arrow[dd, "f"] \\ Z' \arrow[ur, "i'"] \arrow[rr, "w"] \arrow[dr, "g'"] & & Z \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "g"] & \\ & Y' \arrow[rr, "u"] & & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} u^* g_* i^! f^!(O_Y) \arrow[r, "c_{i,f}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & u^* g_* g^!(O_Y) \arrow[r, "Ev_g"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & u^*(O_Y) \arrow[dd] \\ g'_* w^* i^! f^!(O_Y) \arrow[r, "c_{i,f}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & g'_* w^* g^!(O_Y) \arrow[d] & \\ g'_* i'^! f'^!(O_Y) \arrow[r, "c_{i',f'}"] & g'_* g'^!(O_{Y'}) \arrow[r] & O_{Y'} \end{tikzcd}$$;

Le carré commutatif (1) est défini par l'isomorphisme fonctoriel $u^* g_* \xrightarrow{\sim} g'_* w^*$, le carré (2) à l'aide des isomorphismes de changement de base pour le foncteur $f^!$, ce qui entraîne sa commutativité ; de même pour le diagramme (3). L'ensemble du diagramme est donc commutatif. Partant de la section $i^* \omega \otimes t$ "en haut à gauche", on en déduit la formule d.

On va maintenant donner une expression plus explicite du résidu .

4. - Calculs explicites

Pour simplifier, on se place ici dans le cas absolu, la généralisation au cas relatif ne présentant d'ailleurs aucune difficulté.

On considère donc une variété analytique X de dimension n, n fonctions $t_1 \dots t_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, une n-forme $\omega \in \Gamma(X, \Omega^n_X)$. Le sous-espace Z de X défini par l'idéal $I = (t_1 \dots t_n)$ est alors fini; compte-tenu de la propriété c du théorème, on peut supposer Z réduit à un point z (le résidu global étant la somme des résidus en chaque point de Z).

Notations. $\mathcal{O}_x$ désignera l' anneau local de X au point z, $\mathcal{O}_z$ le "faisceau structural" de l'espace $\{z\}$ (c'est une $\mathbb{C}$-algèbre de rang fini sur $\mathbb{C}$), $\mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_x$ le produit tensoriel sur $\mathbb{C}$ de ces deux algèbres. Pour tout $f \in \mathcal{O}_x$, on notera $\bar{f}$ la classe de f dans $\mathcal{O}_z = \mathcal{O}_x/I_x$; si $\varphi : \mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_z$ est l'homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres défini par $\varphi(f \otimes g) = \bar{f}.\bar{g}$, on pose $K = \operatorname{Ker}(\varphi)$: c'est un idéal de $\mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_x$.

Soit $(dz_1 \dots dz_n)$ une base de $(\Omega^1_X)_x$ (module des germes de formes différentielles sur X au point z), avec $z_1 \dots z_n \in \mathcal{O}_x$; posons $V_i = 1 \otimes z_i - \bar{z}_i \otimes 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$: les V_i sont des éléments de K, puisque $\varphi(V_i) = 0$.

LEMME 1

Les (V_i) engendrent K et forment une suite $\mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_x$ réguliere.

Pour vérifier que les V_i engendrent K, il suffit par le lemme de NAKAYAMA de vérifier que leurs classes $\dot{V}_i$ dans K/K^2 engendrent cet $\mathcal{O}_z$-module ; ceci résulte de l'isomorphisme bien connu $K/K^2 \xrightarrow{\sim} (\Omega^1_X)_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \mathcal{O}_z$, qui envoie $\dot{V}_i$ sur $dz_i \otimes 1$. Le fait que la suite soit $\mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_x$-régulière est une propriété classique des morphismes lisses ([EGA IV, 17.12]).

Les complexes de KOSZUL de $\mathcal{O}_x$ relativement aux (t_i) et de $\mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_x$ relativement aux (V_i) fournissent donc deux résolutions de $\mathcal{O}_z$ par des $\mathcal{O}_x$-modules libres de type fini. L'application identique de $\mathcal{O}_z$ se prolonge (CARTAN-EILENBERG) en un morphisme de complexes $W^{\cdot}$, unique à équivalence d'homotopie près :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Lambda^n(\mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_x)^n & \longrightarrow & \overset{(v_i)}{\cdots} & \longrightarrow & \Lambda^1(\mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_x)^n & \longrightarrow & \mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_x & \longrightarrow & \mathcal{O}_z & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle w_n} & & & & \downarrow{\scriptstyle w_1} & & \downarrow{\scriptstyle w_o} & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \\
0 & \longrightarrow & \Lambda^n(\mathcal{O}_x^n) & \longrightarrow & \overset{(t_i)}{\cdots} & \longrightarrow & \Lambda^1(\mathcal{O}_x^n) & \longrightarrow & \mathcal{O}_x & \longrightarrow & \mathcal{O}_z & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On déduit de w_n un $\mathbb{C}$-endomorphisme $\tilde{w}_n$ de $\mathcal{O}_z$:

$$\tilde{w}_n \ : \ \mathcal{O}_z \xrightarrow{f \to f \otimes 1} \mathcal{O}_z \otimes \mathcal{O}_x \xrightarrow{w_n} \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_z \ .$$

<u>THÉORÈME 5</u>

Soit $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Alors : $\operatorname{Res}_X \begin{bmatrix} f\, dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ t_1 \quad \dots \quad t_n \end{bmatrix} = \operatorname{Tr}(\overline{f}_z \circ \check{w}_n)$

où $\overline{f}_z$ désigne l'image de f dans $\mathcal{O}_z$, considérée comme $\mathbb{C}$-endomorphisme de $\mathcal{O}_z$, et où "Tr" est la trace ordinaire d'un endomorphisme d'espace vectoriel.

La démonstration, un peu fastidieuse, consiste simplement à expliciter la définition de l'homomorphisme $c_{i,f}$ donnée au § 2 ; elle est laissée au lecteur.

<u>Remarques</u>

Le théorème donne une définition explicite du résidu : les fonctions $t_1, \dots, t_n$ étant données sur X, on peut calculer effectivement un homomorphisme de complexes $w^{\cdot}$, en relevant pas à pas les vecteurs de base. Par contre, je ne connais pas de formule générale donnant le morphisme de complexes $w^{\cdot}$ en fonction des (t_i), sauf dans certains cas particuliers : le cas où les fonctions t_i sont des puissances de coordonnées locales sera examiné plus loin ; signalons aussi le cas de la dimension 1 ([6]) .

Dans le cas général, on peut expliciter un "inverse" (à homotopie près) de $w^{\cdot}$. En effet, comme les éléments $1 \otimes t_i$ de $\theta_z \otimes \theta_x$ appartiennent à K , il existe d'après le lemme 1 n^2 éléments d_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ de $\theta_z \otimes \theta_x$ tels que :

$$(1) \qquad 1 \otimes t_i = \sum_{j=1}^{j=n} d_{ij} v_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \quad .$$

La matrice des (d_{ij}) définit une application θ_x-linéaire de θ_x^n dans $(\theta_z \otimes \theta_x)^n$; on vérifie sans peine que ses puissances extérieures définissent un morphisme de complexes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Lambda^n \theta_x^n \arrow[r, "(t_i)"] \arrow[d, "\Lambda^n(d_{ij})"] & \cdots \arrow[r] & \Lambda^1 \theta_x^n \arrow[r] \arrow[d, "(d_{ij})"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \theta_x \arrow[r] \arrow[d] & \theta_z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Lambda^n(\theta_x \otimes \theta_z)^n \arrow[r, "(v_j)"] & \cdots \arrow[r] & \Lambda^1(\theta_z \otimes \theta_x)^n \arrow[r] & \theta_z \otimes \theta_x \arrow[r] & \theta_z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(pour vérifier la commutativité, on est ramené par une propriété d'algèbre extérieure à vérifier celle du carré (*) ; celle-ci résulte de la formule (1)) .

Le composé de ce morphisme avec $w^{\cdot}$ est homotope à l'identité ; ceci se traduit en degré $-n$ par l'existence de n applications θ_x-linéaires h_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de $\theta_z \otimes \theta_x$ dans lui-même, telles que :

$$\det(d_{ij}) . \, w_n(a) - a = \sum_{i=1}^{n} h_i(v_i \, a) \quad \text{pour tout } a \in \theta_z \otimes \theta_x \ .$$

Désignons par $\tilde{h}_i$ le morphisme $\theta_z \longrightarrow \theta_z \otimes \theta_x \xrightarrow{h_i} \theta_z \otimes \theta_x \xrightarrow{\varphi} \theta_z$; en faisant $a = \alpha \otimes 1$ $(\alpha \in \theta_z)$ dans l'égalité précédente et en prenant les classes dans θ_z, on trouve :

$$\det(\varphi(d_{ij})).\,\tilde{w}_n(\alpha) - \alpha = \sum_{i=1}^{n}\left[\bar{z}_i\,\tilde{h}_i(\alpha) - \tilde{h}_i(\bar{z}_i\alpha)\right]$$

soit, en multipliant par un élément $\bar{f}$ de θ_z, et en identifiant un élément de θ_z au $\mathbb{C}$-endomorphisme de θ_z qu'il définit par multiplication :

$$\bar{f}.\det\left[\varphi(d_{ij})\right]\tilde{w}_n - \bar{f} = \sum_{i=1}^{n}(\bar{z}_i\,.\,\bar{f}\,.\,\tilde{h}_i - \bar{f}.\tilde{h}_i\circ\bar{z}_i)$$

L'endomorphisme à droite du signe égal est de trace nulle, donc :

$\mathrm{Tr}(\bar{f}.\det(\varphi(d_{ij})).\,\tilde{w}_n) = \mathrm{Tr}(\bar{f})$ (2) .

Or (1) donne, en prenant les classes modulo K^2 et en utilisant l'isomorphisme $K/K^2 \xrightarrow{\sim} (\Omega^1_X)_x \otimes_{\theta_x} \theta_z$:

$$dt_i \otimes 1 = \sum_{j=1}^{n} dz_j \otimes \varphi(d_{ij}) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

d'où $\det(\varphi(d_{ij})) = \overline{\det\left(\frac{\partial t_i}{\partial z_j}\right)}$. Le théorème 5 et la formule (2) donnent alors :

THÉORÈME 6

Avec les notations habituelles, soit $t_1, \ldots, t_n$, $f \in \Gamma(X, O_X)$.

Alors : $\mathrm{Res}_X \begin{bmatrix} f\ dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n \\ t_1 \ \ldots \ t_n \end{bmatrix} = \mathrm{Tr}(\bar{f}_z)$

Cette formule montre entre autres que la notion de résidu introduite ici est triviale pour des "points simples", c'est-à-dire dans le cas où Z est une sous-variété analytique (de dimension 0) de X. Dans ce cas, en effet, $t_1 \ldots t_n$ forment un système de coordonnées locales au voisinage de chaque point z de Z ; une forme ω quelconque s'écrit $f\ dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n$ au voisinage de z, et le théorème 6 montre que le résidu en z de ω par rapport à $t_1, \ldots, t_n$ est $f(z)$.

THÉORÈME 7

Soit $(z_1, \ldots, z_n)$ un système de coordonnées dans un ouvert U de X,

$f \in \Gamma(U, O_U)$. Alors $\mathrm{Res}_U \begin{bmatrix} f \; dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \end{bmatrix}$ est égal au coefficient de $z_1^{k_1-1} \dots z_n^{k_n-1}$ dans le développement en série entière de f.

COROLLAIRE 1.

$$\mathrm{Res}_U \begin{bmatrix} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \end{bmatrix} = 0 \text{ dès qu'un des } k_i \text{ est} > 1.$$

Si $\omega \in \Gamma(U, \Omega_U^{n-1})$:

$$\mathrm{Res}_U \begin{bmatrix} d\omega \\ z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} k_i \; \mathrm{Res}_U \begin{bmatrix} dz_i \wedge \omega \\ z_1^{k_1} \dots z_i^{k_i+1} \dots z_n^{k_n} \end{bmatrix}$$

Le corollaire se déduit immédiatement du théorème (pour la seconde partie , écrire par exemple $\omega = f \; dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n$) .

Démonstration du théorème: les notations sont toujours celles du théorème 5; on a $\theta_x = \mathbb{C}\{\{z_1 \dots z_n\}\}$, $\theta_z = \mathbb{C}[\zeta_1 \dots \zeta_n]$ avec $\zeta_i^{k_i} = 0 \; (1 \leqslant i \leqslant n)$,

$v_i = 1 \otimes z_i - \zeta_i \otimes 1$; soit $(e_1 \dots e_n)$(resp. $(f_1 \dots f_n)$) la base canonique de $(\theta_z \otimes \theta_x)^n$ (resp. θ_x^n). Une base du θ_x-module $\Lambda^p(\theta_z \otimes \theta_x)^n$ est donnée par les

$$\zeta_1^{\alpha_1} \dots \zeta_n^{\alpha_n} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \quad (0 \leqslant \alpha_1 < k_1, \; \dots, \; 0 \leqslant \alpha_n < k_n \; ; \; i_1 < \dots < i_p) .$$

On va définir explicitement le morphisme de complexes w' :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \longrightarrow & \Lambda^p(\theta_z \otimes \theta_x)^n & \xrightarrow{(v_i)} & \Lambda^{p-1}(\theta_z \otimes \theta_x)^n & \longrightarrow \dots \\ & \downarrow w_p & (*) & \downarrow w_{p-1} & \\ \dots \longrightarrow & \Lambda^p(\theta_x^n) & \xrightarrow{(t_i)} & \Lambda^{p-1}(\theta_x)^n & \longrightarrow \dots \end{array}$$

en posant :

- Si $\alpha_{i_1} = k_{i_1} - 1$, ..., $\alpha_{i_p} = k_{i_p} - 1$:

$$W_p(\zeta_1^{\alpha_1}\dots\ \zeta_n^{\alpha_n} e_{i_1}\wedge\dots\wedge\ e_{i_p}) = z_{j_1}^{\alpha_{j_1}}\ \dots\ z_{j_{n-p}}^{\alpha_{j_{n-p}}} f_{i_1}\wedge\dots\wedge f_{i_p}$$

(avec $\left\{j_1\ \dots\ j_{n-p}\right\} = [1,\ n] - \left\{i_1\ \dots\ i_p\right\}$)

- Sinon (i.e. s'il existe λ tel que $\alpha_{i_\lambda} < k_{i_\lambda} - 1$) :

$$W_p(\zeta_1^{\alpha_1}\dots.\ \zeta_n^{\alpha_n}\ e_{i_1}\ \wedge\dots\wedge e_{i_p}) = 0\ .$$

La vérification de la commutativité de (*) pour $1 \leqslant p \leqslant n$ et du fait que $w^{\cdot}$ induit sur la cohomologie l'application identique de Θ_z est un simple exercice de calcul.

En particulier, l'endomorphisme $\tilde{w}_n$ est défini sur la base $\zeta_1^{\alpha_1}\ \dots\ \zeta_n^{\alpha_n}$ $(0 \leqslant \alpha_1 < k_1,\ \dots,\ 0 \leqslant \alpha_n < k_n)$ de Θ_z par $\tilde{w}_n(\zeta_1^{k_1-1}\ \dots\ \zeta_n^{k_n-1}) = 1$ et $\tilde{w}_n = 0$ sur les autres vecteurs de base ; ainsi Tr $(\bar{f}_z\ \tilde{w}_n)$ est simplement la composante de $\bar{f}_z$ suivant le vecteur $\zeta_1^{k_1-1}\ \dots\ \zeta_n^{k_n-1}$, d'où le résultat.

Remarques

1) Le corollaire 1 est vrai sans supposer que les (z_i) sont des coordonnées locales ; la démonstration, plus délicate, se déduit de la forme donnée ici en utilisant les propriétés des "traces" de forme différentielles (définies dans [2]).

2) Sur une surface de RIEMANN $(n = 1)$, où toute fonction est localement une puissance de coordonnée locale, le théorème 7 s'écrit :

$\mathrm{Res}_X \begin{bmatrix} \omega \\ t \end{bmatrix} = \sum_{\alpha \in Z} \mathrm{Res}_\alpha \left(\frac{\omega}{t} \right)$ le résidu à droite étant pris au sens classique. On notera que dans ce cas, l'homomorphisme w_1 du théorème 5 peut se calculer explicitement ; on retrouve ainsi l'expression du résidu donnée dans [6] .

Calcul du résidu

Le théorème 7 donne un moyen de calcul effectif du résidu en un point. Soient en effet $(t_1, \dots, t_n)$ n fonctions de $\Gamma(X, O_X)$, tel que le sous-espace défini par $(t_1 \dots t_n)$ soit réduit à un point $\{z\}$, d'image x dans X ; l'idéal $(t_1 \dots t_n)$ est donc un idéal de définition de θ_x, c'est dire qu'il contient une puissance de l'idéal maximal.

Autrement dit, si $(z_1 \dots z_n)$ est un système de coordonnées locales en x, il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que : $(z_1 \dots z_n)^r \subset (t_1 \dots t_n)$

il existe donc n^2 sections a_{ij} de O_X, définies dans un voisinage U de x

telles que : $z_i^r = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \; t_j \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$

d'après le théorème 4, b, on a :

$$\mathrm{Res}_x \begin{bmatrix} \omega \\ t_1 \dots t_n \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_U \begin{bmatrix} \det(a_{ij}).\omega \\ z_1^r \dots z_n^r \end{bmatrix}$$

et on peut alors appliquer le théorème 7. Ceci permet d'énoncer une propriété d'unicité:

COROLLAIRE 2. Le résidu dans le cas absolu est caractérisé par les propriétés a, b, c du théorème 4 ($\mathbb{C}$-linéarité, formule du déterminant, localisation sur Z) et par la formule de normalisation suivante (pour un système de coordonnées locales $z_1 \dots z_n$) :

$$\mathrm{Res}_X \begin{bmatrix} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \\ z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \end{bmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } k_1 = \dots = k_n = 1 \\ 0 & \text{s'il existe } i,\ k_i > 1 . \end{cases}$$

Dans le cas général, on voit facilement que le résidu est caractérisé par les propriétés précédentes et la formule de changement de base.

Exemple de calcul: $X = \mathbb{C}^2$, coordonnées U, V; résidu à l'origine de

$\omega = \sum_{i,j} a_{ij} U^i V^j \, dU \wedge dV$ par rapport à $F = U^3 + V^2$, $G = UV - 2V^3$.

On remarque que $2VF + G = UV(1 + 2U^2)$, d'où :

$$U^4 = UF - V \cdot \frac{2VF + G}{1 + 2U^2} = F \cdot \frac{U + 2U^3 - 2V^2}{1 + 2U^2} - G \cdot \frac{V}{1 + 2U^2}$$

$$V^3 = 1/2 \left[\frac{2VF + G}{1 + 2U^2} - G\right] = F \cdot \frac{V}{1 + 2U^2} - G \cdot \frac{U^2}{1 + 2U^2}$$

On calcule le déterminant de ce système modulo (U^4, V^3) (à cause du théorème 4, a) ; on trouve :

$$\mathrm{Res}_{(o,o)} \begin{bmatrix} \omega \\ F , G \end{bmatrix} = \mathrm{Res}_{(o,o)} \begin{bmatrix} [-U^3 + V^2 - 2U^2V^2]\omega \\ U^4, V^3 \end{bmatrix} = - a_{o,2} + a_{3,o} - 2a_{1,o}$$

B I B L I O G R A P H I E

[1] Séminaire CARTAN 1960-61.

[2] HARTSHORNE (R.). - Residues and Duality . Springer-Verlag, n° 20, 1966.

[3] VERDIER (J.-L.). - Catégories dérivées des catégories abéliennes (à paraître)

[4] VERDIER (J.-L.). - Base change for twisted inverse image of coherent sheaves. Proceedings of the Bombay colloquium on Algebraic Geometry , 1968.

[5] RAMIS, RUGET, VERDIER. - Théorème de dualité en Géométrie analytique (à paraître).

[6] TATE (J.). - Residues of differentials on curves. Annales scientifiques de l'E.N.S., 4e série, t. 1, fasc. 1, 1968.

[EGA] Éléments de Géométrie algébrique (Publ. Math. I.H.E.S.).