J. reine angew. Math. 388 (1988), 149—157

Journal für die reine und
angewandte Mathematik

Annulation du H^1 et systèmes paracanoniques sur les surfaces

Par *Arnaud Beauville* à Paris

Introduction

Cet article est un commentaire sur le théorème d'annulation générique de Green-Lazarsfeld [G-L]. Pour une variété kählérienne compacte X, on note $\mathrm{Pic}^0(X)$ la variété de Picard de X (dont les points sont les classes d'isomorphisme de fibrés en droites topologiquement triviaux sur X), et $S^j(X)$ la sous-variété de $\mathrm{Pic}^0(X)$ formée des fibrés L pour lesquels $H^j(X,L) \neq 0$. Le résultat essentiel de [G-L] est une majoration de la dimension de $S^j(X)$. Dans le cas du H^1 nous obtenons un résultat plus précis (conjecturé dans *loc. cit.*):

Théorème 1. *Soit X une variété kählérienne compacte. Notons $(p_i\colon X \longrightarrow B_i)_{i\in I}$ la famille (finie) des morphismes surjectifs à fibres connexes de X dans une courbe de genre $\geqq 2$. Soit $S^1(X)$ l'ensemble des fibrés en droites $L \in \mathrm{Pic}^0(X)$ tels que $H^1(X,L) \neq 0$. Alors $S^1(X)$ est réunion des sous-variétés abéliennes $p_i^* \,\mathrm{Pic}^0(B_i)$ et d'un nombre fini de points.*

Nous verrons au § 1 que ce théorème découle facilement des résultats de [G-L] et d'une version "tordue" d'un lemme classique de Castelnuovo-De Franchis.

La motivation originale du théorème d'annulation générique était l'étude du système paracanonique sur les surfaces. Si X est une surface projective et lisse, le système paracanonique $\{K_X\}$ de X est la variété des diviseurs effectifs sur X algébriquement équivalents à un diviseur canonique. On étudie cette variété à l'aide de l'application d'Abel-Jacobi $\alpha\colon \{K_X\} \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X)$, définie par $\alpha(D) = \mathcal{O}(D) \otimes K_X^{-1}$. Le théorème 1 permet de décrire assez précisément les composantes de $\{K_X\}$:

Théorème 2. *Soit X une surface projective et lisse; on suppose que l'image de X dans sa variété d'Albanese est une surface, et qu'on a $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 1$. Le système paracanonique $\{K_X)$ de X admet alors les composantes irréductibles suivantes:*

1) *Une composante dominant* $\mathrm{Pic}^0(X)$, *de dimension* p_g.

2) *Un nombre fini de systèmes linéaires* $|K_X \otimes L|$ $(L \in \mathrm{Pic}^0(X))$, *de dimension* $\geqq p_g$ *si* $L \neq \mathcal{O}_X$.

3) *Eventuellement une composante exceptionnelle, qui apparait si et seulement si X admet un morphisme surjectif $p: X \to B$ sur une courbe B de genre $> \frac{q}{2}$. Cette composante domine $p^* \operatorname{Pic}^0(B)$, et sa dimension est $p_g + 2g(B) - q - 1$.*

Ce résultat, démontré au § 3, fournit une description satisfaisante du système $\{K_X\}$; seuls les systèmes linéaires "exorbitants" qui apparaissent en 2) restent quelque peu mystérieux. Nous étudions ces systèmes au § 4, en particulier la question de savoir si le système canonique $|K_X|$ lui-même est de ce type: la réponse dépend, assez curieusement, de la parité de q.

Je remercie H. Esnault et E. Viehweg de m'avoir indiqué la démonstration actuelle de la proposition 1, nettement plus simple que ma démonstration originale.

§ 1. Annulation du H^1

Nous commencerons par généraliser un résultat de Castelnuovo-De Franchis ([C], [DF]), qui correspond au cas $L = \mathcal{O}_X$ de l'énoncé suivant:

Proposition 1. *Soient X une variété kählérienne compacte, L un élément de* $\operatorname{Pic}^0(X)$. *On suppose qu'il existe des 1-formes non nulles $\alpha \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L)$ et $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$ telles que $\alpha \wedge \omega = 0$; si L est trivial, on suppose de plus que α et ω ne sont pas proportionnelles. Il existe alors un morphisme p de X sur une courbe B de genre $\geqq 2$, un élément $\bar{L}$ de* $\operatorname{Pic}^0(B)$ *et des 1-formes $\bar{\alpha} \in H^0(B, \Omega_B^1 \otimes \bar{L})$ et $\bar{\omega} \in H^0(B, \Omega_B^1)$ tels qu'on ait*

$$L = p^* \bar{L}, \quad \alpha = p^* \bar{\alpha}, \quad \omega = p^* \bar{\omega}.$$

Démonstration. La relation $\alpha \wedge \omega = 0$ signifie qu'il existe une section méromorphe φ de L telle qu'on ait $\alpha = \omega \otimes \varphi$. Soit ∇ une connexion holomorphe sur L, considérée comme endomorphisme de degré 1 du complexe $\Omega_X^{\cdot} \otimes L$. La théorie de Hodge entraîne $\nabla \alpha = 0$ et $d\omega = 0$, d'où $\omega \wedge \nabla \varphi = 0$ dans $\Omega_X^2 \otimes L$. On en déduit qu'il existe une fonction méromorphe f sur X telle que $\varphi^{-1} \nabla \varphi = f \omega$. Observons que f n'est pas identiquement nulle (sans quoi φ serait constante, L trivial et α proportionnelle à ω). Appliquant de nouveau la connexion intégrable ∇, on obtient $df \wedge \omega = 0$.

Considérons f comme une application méromorphe de X dans $\mathbb{P}^1$; d'après le théorème de Hironaka, il existe un morphisme $\varepsilon: \hat{X} \to X$, composé d'un nombre fini d'éclatements, et un morphisme $\hat{f}: \hat{X} \to \mathbb{P}^1$ qui prolonge $f \circ \varepsilon$. Soit $\hat{f}: \hat{X} \xrightarrow{p} B \to \mathbb{P}^1$ la factorisation de Stein de $\hat{f}$. La relation $df \wedge \omega = 0$ entraîne que la restriction de $\varepsilon^* \omega$ à une fibre assez générale de p est nulle, donc que $\varepsilon^* \omega$ provient par image réciproque d'une forme holomorphe $\bar{\omega}$ sur B. On a alors $g(B) \geqq 1$, ce qui entraîne a posteriori que f était partout définie: on peut prendre $\hat{X} = X$ et $\varepsilon = \mathrm{Id}_X$.

Le même raisonnement appliqué à α montre que α provient de l'espace $H^0(X, p^* \Omega_B^1 \otimes L)$, isomorphe à $H^0(B, \Omega_B^1 \otimes p_* L)$. Or pour que le faisceau $p_* L$ soit non nul il faut que la restriction de L à une fibre générique de p soit triviale, donc que L soit l'image réciproque par p d'un faisceau $\bar{L}$ de $\operatorname{Pic}^0(B)$. Alors α provient d'une forme $\bar{\alpha} \in H^0(B, \Omega_B^1 \otimes \bar{L})$, d'où la proposition. ■

Démonstration du théorème 1. Soit L un élément non isolé de $S^1(X)$. En vertu du corollaire 1. 9 et du lemme 2. 6 de [G-L], il existe une 1-forme holomorphe non nulle ω sur X telle que la suite

$$H^0(X, L^{-1}) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L^{-1}) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega_X^2 \otimes L^{-1})$$

ne soit pas exacte. Cela signifie que X et L vérifient les hypothèses de la proposition 1, donc que L appartient à l'une des sous-variétés $p_i^* \operatorname{Pic}^0(B_i)$. Inversement on déduit aussitôt de la suite spectrale de Leray pour p_i que $p_i^* \operatorname{Pic}^0(B_i)$ est contenue dans $S^1(X)$, d'où le théorème 1. ■

Exemple. Il est facile de construire des exemples de variétés X pour lesquelles $S^1(X)$ admet des points isolés. Soient n un entier $\geqq 2$, A et B deux tores complexes, α un élément d'ordre n de A, u un automorphisme d'ordre n de B n'ayant qu'un nombre fini de points fixes. Soit v l'automorphisme d'ordre n de $A \times B$ défini par $v(a,b) = (a+\alpha, u(b))$. Le groupe engendré par v opère librement sur $A \times B$; notons X la variété quotient, et $\pi\colon A \times B \to X$ l'application de passage au quotient. Soit ζ une racine primitive n-ième de l'unité; il existe un élément L de $\operatorname{Pic}^0(X)$ tel qu'on ait $\pi_* \mathcal{O}_{A\times B} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} L^i$, et que v opère sur L^i par multiplication par ζ^i. L'espace $H^1(X, L)$, qui s'identifie au sous-espace propre de v dans $H^1(B, \mathcal{O}_B)$ relatif à la valeur propre ζ, est alors non nul. Comme X n'admet aucun morphisme sur une courbe de genre $\geqq 2$, L est un point isolé de $S^1(X)$.

En prenant des produits de variétés du type précédent, on obtient des variétés X pour lesquelles $S^1(X)$ admet un nombre arbitrairement grand de points isolés. Ces points sont des points de torsion de $\operatorname{Pic}^0(X)$, d'ordre arbitraire; de plus, la dimension du H^1 est arbitrairement grande par rapport à celle de $\operatorname{Pic}^0(X)$. En choisissant des sections hyperplanes, on peut d'ailleurs prendre pour ces variétés X des surfaces.

Par contre je ne connais pas d'exemple de point isolé de $\operatorname{Pic}^0(X)$ qui ne soit pas un point de torsion.

Remarque. Notons $\operatorname{Pic}^\tau(X)$ le sous-groupe de $\operatorname{Pic}(X)$ formé des fibrés en droites L pour lesquels la classe de Chern $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{C})$ est nulle. O. Gabber m'a fait observer que la démonstration de la proposition 1, tout comme celles de [G-L], s'étend immédiatement à $\operatorname{Pic}^\tau(X)$. On en déduit que *pour tous les éléments L de $\operatorname{Pic}^\tau(X) - \operatorname{Pic}^0(X)$ sauf un nombre fini, on a* $H^1(X, L) = 0$. On construit facilement comme ci-dessus des exemples de variétés X admettant des éléments (de torsion) L dans $\operatorname{Pic}^\tau(X) - \operatorname{Pic}^0(X)$ pour lesquels $H^1(X, L)$ n'est pas nul.

§ 2. Généralités sur les systèmes continus

Soient X une variété projective intègre (ou kählérienne compacte), D un diviseur effectif sur X, $L = \mathcal{O}_X(D)$. A la suite des géomètres italiens, nous noterons $\{D\}$ ou $\{L\}$ le schéma de Hilbert des diviseurs effectifs sur X algébriquement équivalents à D. Il contient le système linéaire $|D|$ (ou $|L|$) des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D. En associant à $E \in \{D\}$ la classe dans $\operatorname{Pic}^0(X)$ du fibré $\mathcal{O}_X(E-D)$, on obtient un morphisme $\alpha_D : \{D\} \to \operatorname{Pic}^0(X)$ (*application d'Abel-Jacobi*). La fibre de α_D au point $\alpha_D(E)$

n'est autre que le système linéaire $|E|$. On réalise ainsi $\{D\}$ comme le "fibré projectif cohérent" (au sens de Grothendieck) $\mathbb{P}(\mathcal{Q}_D)$ associé à un faisceau cohérent $\mathcal{Q}_D$ sur $\mathrm{Pic}^0(X)$ [G]. Si X est de Cohen-Macaulay, on peut décrire $\mathcal{Q}_D$ comme suit. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau de Poincaré sur $X \times \mathrm{Pic}^0(X)$, et soient p, q les projections de $X \times \mathrm{Pic}^0(X)$ sur X et $\mathrm{Pic}^0(X)$ respectivement; on prend $\mathcal{Q}_D = R^n q_*(\mathcal{L}^{-1} \otimes p^* K_X(-D))$, où n désigne la dimension de X et K_X son faisceau dualisant.

Supposons α_D surjectif, c'est-à-dire $H^0(X, L(D)) \neq 0$ pour tout $L \in \mathrm{Pic}^0(X)$. Il existe alors un ouvert de Zariski de $\mathrm{Pic}^0(X)$ au-dessus duquel $\mathcal{Q}_D$ est localement libre; il y a donc une unique composante $\{D\}_{\mathrm{dom}}$ de $\{D\}$ telle que $\alpha_D \colon \{D\}_{\mathrm{dom}} \to \mathrm{Pic}^0(X)$ soit surjectif. Nous l'appellerons la *composante dominante* de $\{D\}$. Sa dimension est

$$\dim \mathrm{Pic}^0(X) + \mathrm{rg}\, \mathcal{Q}_D - 1.$$

Je ne sais rien dire de plus, en général, sur les systèmes continus $\{D\}$. Je vais donc me borner dans la suite au *système paracanonique* $\{K_X\}$ associé au fibré canonique d'une variété lisse X. On a dans ce cas, avec les notations précédentes, $\mathcal{Q}_K = R^n q_*(\mathcal{L}^{-1})$. Supposons que l'image de X dans sa variété d'Albanese soit de dimension n; pour L assez général dans $\mathrm{Pic}^0(X)$, on a [G-L]

$$H^i(X, L) = 0 \quad \text{pour} \quad i < n; \quad \dim H^n(X, L) = \chi(\mathcal{O}_X) \geqq 0.$$

Par suite *si $\chi(\mathcal{O}_X) \neq 0$, α_K est surjectif et la composante dominante de $\{K_X\}$ est de dimension $\chi(\mathcal{O}_X) + q - 1$*, en posant $q = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Pour $n = 2$, ce nombre est égal à $p_g = \dim H^0(X, K_X)$.

§ 3. Système paracanonique des surfaces

Nous supposons dans toute la suite de cet article que X est une *surface* projective et lisse. Nous utiliserons les notations traditionnelles

$$q = \dim H^0(X, \Omega_X^1), \qquad p_g = \dim H^0(X, K_X).$$

Nous appellerons *pinceau irrationnel* de genre g sur X un morphisme surjectif à fibres connexes de X dans une courbe lisse de genre g, en convenant que deux morphismes $p_1 \colon X \to B_1$ et $p_2 \colon X \to B_2$ définissent le même pinceau lorsqu'il existe un isomorphisme $u \colon B_1 \to B_2$ tel que $u \circ p_1 = p_2$.

Proposition 2. *Supposons que l'image de X dans sa variété d'Albanese soit une surface. Toute composante de $\{K_X\}$ distincte de $|K_X|$ est de dimension $\geqq p_g$.*

(On a un résultat plus fort lorsque l'image de X dans sa variété d'Albanese est une courbe, cf. proposition 3 ci-dessous.)

Démonstration. Posons $P=\mathrm{Pic}^0(X)$; notons p, q les projections de $X\times P$ sur X et P respectivement, et $\mathscr{L}$ un faisceau de Poincaré sur $X\times P$. Soit H une section hyperplane lisse de X. Considérons sur $X\times P$ la suite exacte

$$0\longrightarrow \mathscr{L}^{-1}(-p^*H)\longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\longrightarrow \mathscr{L}^{-1}_{|H\times P}\longrightarrow 0;$$

elle fournit sur P la suite exacte longue

$$0\longrightarrow R^1q_*(\mathscr{L}^{-1})\longrightarrow R^1q_*(\mathscr{L}^{-1}_{|H\times P})\longrightarrow R^2q_*(\mathscr{L}^{-1}(-p^*H))\longrightarrow R^2q_*(\mathscr{L}^{-1})\longrightarrow 0.$$

Par le théorème de Lefschetz, l'homorphisme de restriction $\mathrm{Pic}^0(X)\to\mathrm{Pic}^0(H)$ est injectif, donc $R^1q_*(\mathscr{L}^{-1}_{|H\times P})$ est localement libre (de rang $g(H)-1$) au-dessus de $P-\{0\}$. Comme le faisceau $R^1q_*(\mathscr{L}^{-1})$ est de torsion [G-L], il est nécessairement nul en dehors de 0 (cf. remarque ci-dessous). On en déduit que $R^2q_*(\mathscr{L}^{-1})$ admet sur $P-\{0\}$ une résolution localement libre de longueur 1

$$0\longrightarrow L_1\longrightarrow L_0\longrightarrow R^2q_*(\mathscr{L}^{-1})\longrightarrow 0.$$

Posons $r_0=\mathrm{rg}(L_0)$ et $r_1=\mathrm{rg}(L_1)$; la différence r_0-r_1 est égale au rang générique de $R^2q_*(\mathscr{L}^{-1})$, soit $\chi(\mathscr{O}_X)$. Localement sur $P-\{0\}$, le fibré $\mathbb{P}(R^2q_*(\mathscr{L}^{-1}))$ est défini par r_1 équations linéaires dans $P\times\mathbb{P}^{r_0-1}$; pour toute composante Z de $\{K_X\}$ non contenue dans $|K_X|$, on a donc $\dim Z\geqq q+(r_0-1)-r_1=p_g$. ■

Remarque. Il résulte de la démonstration précédente que le faisceau $R^1q_*(\mathscr{L}^{-1})$ est concentré en 0. En fait il est facile de voir que $R^1q_*(\mathscr{L}^{-1}_{|H\times P})$ est sans torsion si $q\geqq 2$, de sorte que *le faisceau $R^1q_*(\mathscr{L}^{-1})$ est nul lorsque $q\geqq 2$.* Il en est de même bien sûr de $R^1q_*(\mathscr{L})$.

Lemme 1. *Soient B une courbe lisse et $p\colon X\to B$ un morphisme surjectif à fibres connexes. L'ensemble des fibrés $L\in\mathrm{Pic}^0(B)$ pour lesquels $\dim H^1(X,p^*L)>\dim H^1(B,L)$ est fini.*

Démonstration. Pour $L\in\mathrm{Pic}^0(B)$, la suite spectrale de Leray fournit une suite exacte

$$0\longrightarrow H^1(B,L)\longrightarrow H^1(X,p^*L)\longrightarrow H^0(B,L\otimes R^1p_*\mathscr{O}_X)\longrightarrow 0.$$

D'après [F], le fibré $R^1p_*\mathscr{O}_X$ admet une décomposition en somme directe

$$R^1p_*\mathscr{O}_X=\bigoplus_{i=0}^{r}F_i,$$

où le dual de F_0 est ample, et où F_i pour $i\geqq 1$ est stable de degré 0. On en déduit que $L\otimes R^1p_*\mathscr{O}_X$ admet une section non nulle si et seulement si L est le dual de l'un des F_i, d'où le lemme. ■

Démonstration du théorème 2. Notons $\alpha\colon\{K_X\}\to\mathrm{Pic}^0(X)$ l'application d'Abel-Jacobi. Le système paracanonique $\{K_X\}$ admet une composante dominante de dimension p_g (§ 2), ainsi qu'éventuellement des composantes verticales de la forme $\alpha^{-1}(L)$ avec $L\in\mathrm{Pic}^0(X)$; ces composantes sont de dimension $\geqq p_g$ pour $L\neq\mathscr{O}_X$ en vertu de la proposition 2. Soit Z une composante irréductible de $\{K_X\}$ qui n'est pas de l'un des deux types précédents. Alors $\alpha(Z)$ est contenue dans une composante non isolée de $S^1(X)$; il résulte du théorème 1 qu'il existe un pinceau irrationnel $p\colon X \to B$ tel que Z soit contenue dans $\alpha^{-1}(p^* \operatorname{Pic}^0(B))$. D'après le lemme 1, cette variété est réunion d'un nombre fini de composantes verticales et d'une composante dominante $p^* \operatorname{Pic}^0(B)$; cette dernière doit être égale à Z. Pour L générique dans $\operatorname{Pic}^0(B)$, on a

$$\dim H^0(X, K_X \otimes p^* L) = \chi(\mathcal{O}_X) + \dim H^1(B, L^{-1}) = \chi(\mathcal{O}_X) + g(B) - 1,$$

d'où $\dim(Z) = \chi(\mathcal{O}_X) + 2\, g(B) - 2$. Compte tenu de la proposition 2, on voit que Z est une composante de $\{K_X\}$ si et seulement si $\dim(Z) \geqq p_g$, c'est-à-dire $g(B) > \frac{q}{2}$.

Observons enfin que la surface X admet au plus un pinceau irrationnel de genre $> \frac{q}{2}$. Soient en effet $p_1\colon X \to B_1$ et $p_2\colon X \to B_2$ des morphismes surjectifs à fibres connexes sur des courbes de genre $> \frac{q}{2}$. Le morphisme $(p_1, p_2)\colon X \to B_1 \times B_2$ ne peut être surjectif puisqu'on a $q(X) < q(B_1 \times B_2)$; son image est donc une courbe $\Gamma \subset B_1 \times B_2$. Puisque les fibres de p_1 et p_2 sont connexes, les projections $\pi_1\colon \Gamma \to B_1$ et $\pi_2\colon \Gamma \to B_2$ sont des isomorphismes, et on obtient un isomorphisme $u = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ de B_1 sur B_2 tel que $u \circ p_1 = p_2$. Cela achève la démonstration du théorème 2. ■

La démonstration ci-dessus s'applique, avec des modifications très mineures, au cas où l'image de X dans sa variété d'Albanese est une courbe. On obtient le résultat suivant:

Proposition 3. *On suppose que l'image de X dans sa variété d'Albanese est une courbe, et qu'on a $p_g \geqq 1$. Alors $\{K_X\}$ est réunion d'une composante dominante, de dimension $p_g + q - 1$, et éventuellement d'un nombre fini de systèmes linéaires, de dimension $\geqq p_g + q - 1$.* ■

§ 4. Systèmes linéaires exorbitants

Conservons les notations du § 3. Soit $L \in \operatorname{Pic}^0(X)$; nous dirons avec Enriques que le système linéaire $|K_X \otimes L|$ est *exorbitant* s'il constitue une composante de $\{K_X\}$. Supposons que X n'admette pas de pinceau irrationnel de genre $> \frac{q}{2}$. En vertu du théorème 2, lorsque $L \neq \mathcal{O}_X$, le système $|K_X \otimes L|$ est exorbitant si et seulement si sa dimension (projective) est $\geqq p_g$, c'est-à-dire encore si et seulement si $\dim H^1(X, L^{-1}) \geqq q$. On peut construire un grand choix de tels systèmes à partir de l'exemple du § 1 – avec la restriction que L est toujours un point de torsion de $\operatorname{Pic}^0(X)$.

Le cas du système canonique est plus subtil, puisqu'alors le critère de dimension est inopérant. Il se trouve curieusement que le résultat dépend de la parité de q:

Proposition 4. *Supposons que q soit pair, et que X n'admette pas de pinceau irrationnel de genre $> \frac{q}{2}$. Alors $|K_X|$ est une composante irréductible de $\{K_X\}$.*

Nous utiliserons un lemme d'algèbre linéaire:

Lemme 2. *Soient V, W des espaces vectoriels complexes de dimension finie, et $b\colon V\times V\to W$ une application bilinéaire alternée. On suppose que* $\dim(V)$ *est paire et qu'il existe une sous-variété N de V, stable par $\mathbb{C}^*$, de dimension $\leqq \frac{1}{2}\dim(V)$, de façon que les conditions $b(x,y)=0$, $x\wedge y\neq 0$ impliquent que x et y appartiennent à N. Alors pour toute forme linéaire l sur W assez générale, la forme bilinéaire $l\circ b$ est séparante.*

Démonstration. Soit Z la sous-variété de $\mathbb{P}(V)\times\mathbb{P}(W^*)$ formée des couples (D,H), où D est une droite de V et H un hyperplan de W contenant $b(D\times V)$; notons π_1 et π_2 les projections de Z sur $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(W^*)$ respectivement. Il s'agit de prouver que l'image $\pi_2(Z)$ est distincte de $\mathbb{P}(W^*)$.

Posons $q=\dim(V)$, $p=\dim(W)$; notons $\mathbb{P}(N)$ l'image de N dans $\mathbb{P}(V)$, et posons $U=\mathbb{P}(V)-\mathbb{P}(N)$. Pour $D\in U$, le sous-espace $b(D\times V)$ de W est de dimension $q-1$, donc la fibre $\pi_1^{-1}(D)$ est un espace projectif de dimension $p-q$. Ainsi $\overline{\pi_1^{-1}(U)}$ est une composante irréductible Z_0 de Z, de dimension $p-1$. D'autre part les fibres de $\pi_2\colon Z_0\to\mathbb{P}(W^*)$ sont vides ou de dimension $\geqq 1$: soit en effet $H\in\pi_2(Z_0)$, et soit $l\in W^*$ une équation de H. Puisque $\dim(V)$ est paire, le noyau de la forme alternée $l\circ b$ est de dimension $\geqq 2$; il existe donc une droite Δ dans $\mathbb{P}(V)$, rencontrant U, telle qu'on ait $(D,H)\in Z_0$ pour tout $D\in\Delta$, d'où notre assertion. On en conclut qu'on a $\dim\pi_2(Z_0)\leqq p-2$.

D'autre part, pour $D\in\mathbb{P}(N)$, le sous-espace $b(D\times V)$ est de dimension $\geqq\frac{q}{2}$, et l'espace des hyperplans le contenant est de dimension $\leqq p-\frac{q}{2}-1$. On a donc $\dim\pi_1^{-1}(\mathbb{P}(N))\leqq p-2$ et par suite $\dim\pi_2(Z)\leqq p-2$, d'où le lemme. ■

Démonstration de la proposition 4. Considérons l'application bilinéaire

$$b\colon H^1(X,\mathcal{O}_X)\times H^1(X,\mathcal{O}_X)\to H^2(X,\mathcal{O}_X)$$

définie par le cup-produit. A l'aide des isomorphismes anti-$\mathbb{C}$-linéaires

$$H^1(X,\mathcal{O}_X)\to H^0(X,\Omega_X^1)\quad\text{et}\quad H^2(X,\mathcal{O}_X)\to H^0(X,K_X)$$

fournis par la théorie de Hodge, elle s'identifie au produit extérieur

$$H^0(X,\Omega_X^1)\times H^0(X,\Omega_X^1)\to H^0(X,K_X).$$

Si deux formes α, β non proportionnelles satisfont à $\alpha\wedge\beta=0$, elles proviennent d'après le lemme de Castelnuovo-De Franchis (proposition 1) d'un pinceau irrationnel; les hypothèses du lemme sont donc satisfaites en prenant pour N la réunion des sous-espaces $p_i^*H^0(X,\Omega_{B_i}^1)$, pour les différents pinceaux irrationnels $p_i\colon X\to B_i$. On conclut que pour ω assez générale dans $H^0(X,\Omega_X^1)$, l'homomorphisme

$$H^1(X,\mathcal{O}_X)\xrightarrow{\cup\omega}H^1(X,K_X)$$

est bijectif.

Notons C le diviseur de ω, et $N_{C/X}$ le fibré normal de C dans X. Considérons la suite exacte de cohomologie

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X, K_X) \longrightarrow H^0(C, N_{C/X}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\cup\omega} H^1(X, K_X);$$

vu l'hypothèse sur ω, on en déduit qu'on a $\dim H^0(C, N_{C/X}) = p_g - 1$. Cela entraîne que le schéma de Hilbert $\{K_X\}$ coïncide au voisinage du point C avec $|K_X|$, autrement dit que $|K_X|$ est une composante de $\{K_X\}$. ■

Remarques. 1) Sans hypothèse sur q, supposons que X admette un pinceau irrationnel $p: X \to B$ de genre $> \frac{q}{2}$. Une démonstration analogue à celle de la proposition 2 montre que toute composante de $\alpha^{-1}(p^* \operatorname{Pic}^0(B))$ est de dimension $\geqq p_g + 2g(B) - q - 1$. On conclut donc dans ce cas que *le système linéaire $|K_X|$ est contenu dans la composante exceptionnelle de $\{K_X\}$ associée à p*, et n'est donc pas exorbitant.

2) Supposons maintenant que q soit impair, et que X n'admette pas de pinceau irrationnel de genre $> \frac{q}{2}$. On prouve comme dans la proposition 4 qu'on a $\dim H^0(C, N_{C/X}) = p_g$ pour C assez générale dans $|K_X|$. Cela laisse a priori deux possibilités:

a) $|K_X|$ est une sous-variété de la composante dominante $\{K_X\}_{\mathrm{dom}}$; celle-ci est génériquement lisse le long de $|K_X|$.

b) $|K_X|$ est une composante non réduite de $\{K_X\}$.

Il semble que b) puisse être éliminé sous des hypothèses assez générales sur X. Je vais me contenter ici d'illustrer la situation sur un exemple.

Exemple. Soit C une courbe de genre g, et soit σ l'involution de $C \times C$ qui permute les deux facteurs. Prenons pour X le carré symétrique $S^2 C = (C \times C)/\sigma$; notons $\pi: C \times C \to X$ l'application de passage au quotient. On a un isomorphisme $\iota: \operatorname{Pic}^0(C) \to \operatorname{Pic}^0(X)$, satisfaisant à $\pi^* \iota L = \mathrm{pr}_1^* L \otimes \mathrm{pr}_2^* L$ pour $L \in \operatorname{Pic}^0(C)$. L'espace $H^0(X, K_X)$ s'identifie au sous-espace invariant par σ de

$$H^0(C \times C, K_{C \times C}) = H^0(C, K_C) \otimes H^0(C, K_C);$$

comme on a $\sigma^*(\mathrm{pr}_1^* \alpha \wedge \mathrm{pr}_2^* \beta) = -\mathrm{pr}_1^* \beta \wedge \mathrm{pr}_2^* \alpha$ pour α, β dans $H^0(C, K_C)$, on voit que $H^0(X, K_X)$ s'identifie à $\Lambda^2 H^0(C, K_C)$. On obtient de même, pour tout $L \in \operatorname{Pic}^0(C)$, un isomorphisme canonique

$$\Lambda^2 H^0(C, K_C \otimes L) \xrightarrow{\sim} H^0(X, K_X \otimes \iota L).$$

Notons J la jacobienne $\operatorname{Pic}^0(C)$ de C, et identifions $\operatorname{Pic}^0(X)$ à J par l'isomorphisme ι. Soient $\mathscr{L}_C$ et $\mathscr{L}_X$ des faisceaux de Poincaré sur $C \times J$ et $X \times J$ respectivement, normalisés de façon que $\mathrm{pr}_1^* \mathscr{L}_C \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathscr{L}_C \cong (\pi \times 1_J)^* \mathscr{L}_X$. Notons q et r les projections de $C \times J$ et $X \times J$ respectivement sur J; on déduit de ce qui précède un isomorphisme $\Lambda^2 R^1 q_*(\mathscr{L}_C^{-1}) \to R^2 r_*(\mathscr{L}_X^{-1})$, de sorte que $\{K_X\}$ s'identifie au fibré $\mathbb{P}(\Lambda^2 R^1 q_*(\mathscr{L}_C^{-1}))$ sur J.

Le faisceau $R^1 q_*(\mathscr{L}_C^{-1})$ est localement libre de rang $g-1$ en dehors de l'origine; dans un voisinage U de l'origine, il admet une présentation

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_U \xrightarrow{u} \mathcal{O}_U^g \longrightarrow R^1 q_*(\mathscr{L}_C^{-1}) \longrightarrow 0,$$

où $u(1) = \sum_{i=1}^{g} x_i e_i$, les x_i formant un système de coordonnées en 0 dans U. Par conséquent $R^2 r_*(\mathscr{L}_X^{-1})$ est localement libre en dehors de 0; au-dessus de U il admet une présentation

$$\mathcal{O}^g{}_U \xrightarrow{u(1)} \Lambda^2 \mathcal{O}^g{}_U \longrightarrow R^2 r_*(\mathscr{L}_X{}^{-1}) \longrightarrow 0.$$

Il en résulte que la variété $\{K_X\}$ s'identifie, localement sur J, au fibré projectif cohérent T sur $\mathbb{C}^g$ défini comme suit: si $\mathscr{A}$ est l'espace des matrices carrées d'ordre g antisymétriques, T est la sous-variété de $\mathbb{C}^g \times \mathbb{P}(\mathscr{A})$ formé des couples (v, A) tels que $Av = 0$ (on convient de noter un élément de $\mathbb{P}(\mathscr{A})$ par un de ses représentants dans $\mathscr{A}$). La restriction T^* de T au-dessus de $\mathbb{C}^g - \{0\}$ est irréductible (en tant que "vrai" fibré projectif sur $\mathbb{C}^g - \{0\}$). Si g est pair, l'adhérence de T^* dans T est formée des couples (v, A) tel que $Av = 0$ et $\det A = 0$; elle ne contient pas la fibre T_0, qui est donc une composante de T. Si g est impair, tout élément $(0, A)$ de T_0 est adhérent au sous-ensemble de T^* formé des couples (v, A) pour lesquels $v \in \operatorname{Ker} A - \{0\}$, donc à T^*, et T est irréductible.

Bibliographie

[C] *G. Castelnuovo*, Sulle superficie aventi il genero aritmetico negativo, Rendic. Circ. Mat. Palermo **20** (1905), 55.

[DF] *M. De Franchis*, Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve, Rendic. Circ. Mat. Palermo **20** (1905), 49—54.

[F] *T. Fujita*, The sheaf of relative canonical forms of a Kähler fibre space over a curve, Proc. Japan Acad. **54**, ser. A (1978), 183—184.

[G] *A. Grothendieck*, Les schémas de Picard: théorèmes d'existence, Exposé **232** du Sém. Bourbaki (fév. 1962), New York 1966.

[G-L] *M. Green*, *R. Lazarsfeld*, Deformation theory, generic vanishing theorems, and some conjectures of Enriques, Catanese and Beauville, Invent. math. **90** (1987), 389—407.

Mathématiques-Bât. 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex

Eingegangen 28. August 1987