LE GROUPE DE MONODROMIE DES FAMILLES UNIVERSELLES D'HYPERSURFACES ET D'INTERSECTIONS COMPLETES

Arnaud BEAUVILLE

Le but de cet exposé est d'illustrer deux beaux théorèmes de Janssen [J] et Ebeling [E]. Ces résultats, de nature purement algébrique, permettent à leurs auteurs de calculer, dans un grand nombre de cas, la monodromie des singularités isolées. Je voudrais montrer sur un exemple qu'ils s'appliquent également très bien au calcul de la monodromie des familles de variétés lisses.

Le problème précis que je veux traiter est le suivant. Les hypersurfaces de degré d dans $\mathbb{P}^{n+1}$ sont paramétrées par un espace projectif $\mathbb{P}^{N(n,d)}$ (avec $N(n,d) = \binom{n+d+1}{d}-1$), dans lequel les hypersurfaces lisses forment un ouvert $U_{n,d}$. Soient u un point de $U_{n,d}$, et X l'hypersurface correspondante. Le groupe $\pi_1(U_{n,d},u)$ opère sur $H^n(X,\mathbb{Z})$, et l'image $\Gamma_{n,d}$ de l'homomorphisme $\rho : \pi_1(U_{n,d},u) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^n(X,\mathbb{Z}))$ est appelée le <u>groupe de monodromie</u> de la famille universelle des hypersurfaces de dimension n et de degré d; c'est ce groupe que nous allons déterminer. Après quelques préliminaires (n° 1), le résultat est obtenu au n° 2 (n pair) et au n° 3 (n impair). Quelques applications sont données au n° 4; on condidère au n° 5 la situation plus générale des intersections complètes.

1. Réseaux évanescents.

Soit L un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini, muni d'une forme bilinéaire symétrique ou alternée, notée $(a,b) \longmapsto a.b$. Soit Δ un ensemble d'éléments de L ; si la forme est symétrique, nous supposons $\delta^2 = \pm 2$ pour tout $\delta \in \Delta$. Soit s_δ l'automorphisme de L défini par $s_\delta(x) = x + (\delta.x)\delta$ si $\delta^2 = 0$ ou -2, $s_\delta(x) = x - (\delta.x)\delta$ si $\delta^2 = 2$; il respecte la forme bilinéaire. On note Γ_Δ le groupe d'automorphismes de L engendré par les s_δ pour $\delta \in \Delta$.

DEFINITION.- <u>On dit que le couple</u> (L,Δ) <u>est un réseau évanescent si</u> Δ <u>engendre</u> L, <u>et si</u> Δ <u>est une orbite de</u> Γ_Δ <u>dans</u> L.

Indiquons deux exemples de réseaux évanescents, en renvoyant pour les détails aux articles [E] et [J].

Soit F la fibre de Milnor d'une singularité isolée de dimension n ; le <u>module des cycles évanescents</u> $H_n(F,\mathbb{Z})$, muni de la forme d'intersection et de l'ensemble Δ_F des cycles évanescents, est un réseau évanescent : c'est ce qui explique à la fois la terminologie et l'intérêt de cette notion pour l'étude des singularités.

Voici un autre exemple, fondamental pour ce qui suit. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$ un pinceau de Lefschetz d'hypersurfaces de degré d dans $\mathbb{P}^{n+1}$; notons S l'ensemble (fini) des points $s\in\mathbb{P}^1$ tels que X_s soit singulière. Fixons $t\in\mathbb{P}^1-S$, et posons $X=X_t$. Notons $H^n(X,\mathbb{Z})_o$ la cohomologie primitive (égale à $H^n(X,\mathbb{Z})$ si n est impair, et à l'orthogonal de $h^{n/2}$ dans $H^n(X,\mathbb{Z})$ si n est pair). Pour chaque $s\in S$, le choix d'un chemin dans $\mathbb{P}^1-S$ joignant t à un point voisin de s détermine un cycle évanescent $\delta\in H^n(X,\mathbb{Z})$; notons Δ_X l'ensemble de ces cycles évanescents. D'après la théorie de Lefschetz, le couple $(H^n(X,\mathbb{Z})_o,\Delta_X)$ est un réseau évanescent.

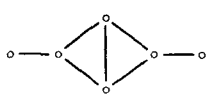
Si le pinceau choisi est assez général, un théorème de Zariski entraîne que l'inclusion $\mathbb{P}^1-S\subset U_{n,d}$ induit un homomorphisme surjectif sur les π_1; le groupe de monodromie $\Gamma_{n,d}$ coïncide donc avec le groupe Γ_Δ du réseau évanescent $(H^n(X,\mathbb{Z})_o,\Delta_X)$.

Indiquons maintenant une relation entre les deux constructions précédentes. Soit X_o une hypersurface de degré d dans $\mathbb{P}^{n+1}$, admettant une singularité isolée en un point p. La fibre de Milnor F de cette singularité est l'intersection d'une hypersurface X_ε lisse voisine de X_o avec une petite boule de centre p dans $\mathbb{P}^{n+1}$. Par transport de X_ε à X on en déduit un homomorphisme
$i : H_n(F,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(X,\mathbb{Z}) = H^n(X,\mathbb{Z})$, qui est compatible aux formes d'intersection et applique Δ_F dans Δ_X. Si la forme d'intersection sur $H_n(F,\mathbb{Z})$ est non dégénérée, i est nécessairement injective, et identifie donc $(H_n(F,\mathbb{Z}),\Delta_F)$ à un sous-réseau évanescent de $(H^n(X,\mathbb{Z})_o,\Delta_X)$.

2. Dimension paire.

Soit M un réseau orthogonal. Si $M_\mathbb{R}$ est non dégénéré, il existe pour $\varepsilon=\pm1$ un homomorphisme $\sigma_\varepsilon : O(M_\mathbb{R}) \longrightarrow \{\pm1\}$ caractérisé par la propriété suivante : si v est un vecteur non isotrope de $M_\mathbb{R}$ et si s_v désigne la réflection orthogonale par rapport à $v^\perp$, on a $\sigma_\varepsilon(s_v)=\varepsilon v^2/|v^2|$. Si $M_\mathbb{R}$ est dégénéré, de noyau K, on note encore σ_ε le composé $O(M_\mathbb{R}) \longrightarrow O(M_\mathbb{R}/K) \xrightarrow{\sigma_\varepsilon} \{\pm1\}$. D'autre part, on note $D(M)$ le conoyau de l'homomorphisme $M \longrightarrow M^*$ associé à la forme bilinéaire, et τ l'homomorphisme canonique $O(M) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(D(M))$.

Soit (L,Δ) un réseau évanescent orthogonal. On pose
$O^*(L)=O(L)\cap\mathrm{Ker}\,\sigma_\varepsilon\cap\mathrm{Ker}\,\tau$, avec $\varepsilon=\frac{1}{2}\delta^2$ pour $\delta\in\Delta$. Il est clair que Γ_Δ est contenu dans $O^*(L)$. Par ailleurs, on dit comme dans [E] que le réseau évanescent (L,Δ) est <u>complet</u> si Δ contient 6 éléments dont le diagramme d'intersection est



(comme d'habitude, les éléments correspondent aux sommets du diagramme, le produit de deux éléments étant égal au nombre de traits joignant les sommets correspondants).

THEOREME 1 [E].- Soit (L,Δ) un réseau évanescent orthogonal complet. On a $\Gamma_\Delta = O^*(L)$.

Nous allons en déduire le groupe $\Gamma_{n,d}$ pour n pair. Il est clair que $\Gamma_{n,d}$ est contenu dans le sous-groupe $O_h(H^n(X,\mathbb{Z}))$ de $O(H^n(X,\mathbb{Z}))$ formé des automorphismes qui préservent $h^{n/2}$ (on désigne par h la classe dans $H^2(X,\mathbb{Z})$ d'une section hyperplane). Posons $O_h^+(H^n(X,\mathbb{Z})) = O_h(H^n(X,\mathbb{Z})) \cap \operatorname{Ker}\sigma_\varepsilon$, avec $\varepsilon = (-1)^{n/2}$.

THEOREME 2.- Pour n pair, le groupe de monodromie $\Gamma_{n,d}$ est le groupe $O_h^+(H^n(X,\mathbb{Z}))$. Il est d'indice 2 dans $O_h(H^n(X,\mathbb{Z}))$ si $d \geq 4$ ou $d = 3$ et $n \neq 2$, d'indice 1 dans les autres cas.

Le cas des quadriques est laissé au lecteur en exercice. Le cas des surfaces cubiques est bien connu : le groupe de monodromie $\Gamma_{2,3}$ est le groupe de Weyl $W(E_6)$, égal à $O_h(H^2(X,\mathbb{Z}))$. Supposons désormais $d \geq 3$, et $n \geq 4$ si $d = 3$. Nous allons montrer que le réseau évanescent $(H^n(X,\mathbb{Z})_o, \Delta_X)$ est complet. Nous utiliserons pour cela une des singularités exceptionnelles d'Arnold [A], la singularité U_{12} : pour une surface, elle est donnée analytiquement dans $\mathbb{C}^3$ par l'équation $x^3 + y^3 + z^4 = 0$. D'après [E], 5.3, le réseau évanescent de cette singularité est complet. Il en est donc de même de tout réseau évanescent le contenant; compte tenu des remarques du n° 1, il suffit donc de prouver qu'il existe une hypersurface de degré d dans $\mathbb{P}^{n+1}$ admettant une singularité de type U_{12}. Pour $d \geq 4$, il suffit de prendre l'hypersurface d'équation affine

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^4 + x_3^d + \sum_{i=4}^{n+1} x_i^2 = 0 .$$

Pour $d = 3$, on remarque qu'il existe une surface cubique, d'équation affine $f(x_1,x_2,x_3) = 0$ dans $\mathbb{C}^3$, admettant à l'origine une singularité de type E_6 (c'est-à-dire d'équation analytique $z^2 + x^3 + y^4 = 0$; c'est un résultat classique, cf. par exemple [D]). L'hypersurface d'équation affine

$$f(x_1,x_2,x_3) + x_4^3 + \sum_{i=5}^{n+1} x_i^2 = 0$$

fait l'affaire, d'où notre assertion.

Considérons maintenant l'homomorphisme de restriction $r : O_h^+(H^n(X,\mathbb{Z})) \longrightarrow O(H^n(X,\mathbb{Z})_o)$; il est injectif, et son image est contenue dans O^*. Comme $r(\Gamma_{n,d}) = O^*$ d'après le Théorème 1, on a $\Gamma_{n,d} = O_h^+(H^n(X,\mathbb{Z}))$. Enfin le réseau complet $H^n(X,\mathbb{Z})_o$ contient un élément η de carré -2ε; on a $\sigma_\varepsilon(s_\eta) = -1$, de sorte que O_h^+ est d'indice 2 dans O_h.

3. Dimension impaire.

Soit (L,Δ) un réseau évanescent symplectique. Le groupe Γ_Δ est alors contenu dans le groupe symplectique $Sp(L)$. On appelle forme quadratique mod. 2 sur le réseau symplectique L une fonction $q : L \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ satisfaisant à $q(x+y) = q(x) + q(y) + (x.y)$. Si on a $q(\delta) = 1$ pour tout $\delta \in \Delta$, le groupe Γ_Δ est contenu dans le sous-groupe $SpO(L,q)$ de $Sp(L)$ formé des automorphismes symplectiques qui préservent q. Inversement, si la transvection s_δ préserve q et est distincte de l'identité, on a $q(\delta) = 1$.

La classification de Janssen est relativement compliquée; je vais me contenter d'énoncer un résultat beaucoup plus faible (que l'on déduit très facilement de [J]).

THEOREME 3.- Soit (L,Δ) un réseau évanescent symplectique unimodulaire. Supposons que Δ contienne 6 éléments dont le diagramme d'intersection mod. 2 est de type E_6. On a alors l'une des deux possibilités suivantes :

(i) $\Gamma_\Delta = Sp(L)$;

(ii) il existe une forme quadratique mod. 2 q sur L telle que $\Gamma_\Delta = SpO(L,q)$.

THEOREME 4.- Supposons n impair.

(i) Si d est pair, le groupe de monodromie $\Gamma_{n,d}$ est le groupe symplectique $Sp(H^n(X, \mathbb{Z}))$;

(ii) si d est impair, il existe sur $H^n(X,\mathbb{Z})$ une forme quadratique mod. 2 q_X invariante par monodromie, et on a $\Gamma_{n,d} = SpO(H^n(X,\mathbb{Z}),q_X)$.

On laisse de nouveau au lecteur le cas des quadriques, ainsi que celui des cubiques planes. Montrons dans les autres cas que les hypothèses du Théorème 3 sont satisfaites. Il suffit comme ci-dessus de mettre en évidence une hypersurface (de dimension n et de degré d) admettant une singularité de type E_6. Pour $d \geq 4$, on prend l'hypersurface d'équation affine

$$x_1^3 + x_2^4 + x_2^d + \sum_{i=3}^{n+1} x_i^2 = 0 \ .$$

Pour $d = 3$, on utilise encore la surface cubique avec une singularité de type E_6, en ajoutant une somme de carrés à son équation.

On est donc dans l'une des situations (i) ou (ii) du Théorème 3. Si d est impair, il existe effectivement une forme quadratique mod. 2 sur $H^n(X, \mathbb{Z})$ invariante par déformation (cf. [B] ou [W], ou aussi n° 4c ci-dessous), de sorte qu'on est dans le cas (ii).

Il reste à montrer que lorsque d est pair (≥ 4), il n'existe pas de forme quadratique mod. 2 q sur $H^n(X, \mathbb{Z})$ invariante par monodromie, c'est-à-dire telle que $q(\delta) = 1$ pour tout $\delta \in \Delta_X$. Il suffit pour cela de trouver un nombre impair d'éléments $\delta_1,\ldots,\delta_{2p+1}$ de Δ_X, deux à deux orthogonaux, vérifiant $\Sigma\, \delta_i \equiv 0 \pmod{2}$. Pour réaliser cette situation, nous allons considérer un pinceau d'hypersurfaces

$(X_t)_{t\in\mathbb{P}^1}$, où pour $t=0$ la fibre X_0 acquière un certain nombre de points doubles ordinaires $P_1,\ldots,P_\ell$. A chaque P_i est associé un cycle évanescent δ_i dans l'homologie d'une fibre voisine X (c'est-à-dire, par dualité de Poincaré, dans $H^n(X,\mathbb{Z})$). Supposons qu'il existe une sous-variété lisse Z de X_0, de dimension $(n+1)/2$, passant par les P_i. Soit $B(P_i)$ une petite boule de centre P_i dans Z; en poussant $Z - \bigcup_i B(P_i)$ dans la fibre voisine X, on obtient une $(n+1)$-chaîne dont le bord est $\Sigma \pm \delta_i$. On a donc $\sum_{i=1}^{\ell} \pm\delta_i = 0$ dans $H^n(X,\mathbb{Z})$, et les δ_i sont bien sûr deux à deux orthogonaux. Il nous suffit donc de réaliser une telle situation $Z\subset X_0$, avec ℓ impair.

Ecrivons $n = 2\nu-1$. Soient $G_1(T_0,\ldots,T_\nu),\ldots, G_\nu(T_0,\ldots,T_\nu)$ des polynômes homogènes de degré $d-1$, supposés assez généraux pour que les hypersurfaces $G_1=0,\ldots, G_\nu=0$ dans $\mathbb{P}^\nu$ se rencontrent transversalement en $(d-1)^\nu$ points distincts. Prenons pour X_0 l'hypersurface dans $\mathbb{P}^{2\nu}$ d'équation

$$T_{\nu+1}\, G_1(T_0,\ldots,T_\nu) + \ldots + T_{2\nu}\, G_\nu(T_0,\ldots,T_\nu) = 0 .$$

On vérifie aussitôt que les seules singularités de X_0 sont les $(d-1)^\nu$ points définis par

$$T_{\nu+1} = \ldots = T_{2\nu} = G_1 = \ldots = G_\nu = 0 ,$$

et que ce sont des points doubles ordinaires. Ils sont en nombre impair, et sont contenus dans le sous-espace linéaire Z de X_0 défini par $T_{\nu+1} = \ldots = T_{2\nu} = 0$. On a donc obtenu la situation cherchée, ce qui achève la démonstration du théorème.

4. Applications.

a) Hypersurfaces marquées.

Indiquons d'abord une autre formulation des Théorèmes 2 et 4, qui est utile pour les questions de modules et de périodes. Supposons d'abord n pair. Soient X_0 une hypersurface lisse de dimension n et de degré d, $h_0\in H^2(X_0,\mathbb{Z})$ la classe d'une section hyperplane. Posons $L_{n,d} = H^n(X_0,\mathbb{Z})$ et $h_{n,d} = h_0^{n/2}$. Le Théorème 2 se traduit comme suit :

PROPOSITION 1.- <u>L'espace des hypersurfaces</u> X <u>de dimension paire</u> n <u>et de degré</u> d, <u>munies d'une isométrie</u> $\phi : L_{n,d} \longrightarrow H^n(X,\mathbb{Z})$ <u>telle que</u> $\phi(h_{n,d}) = h^{n/2}$, <u>a deux composantes irréductibles pour</u> $d\geq 4$ <u>ou</u> $d=3$, $n\geq 4$. <u>Il est irréductible dans les autres cas</u>.

Pour traiter le cas n impair, rappelons quelques définitions. Soit L un réseau symplectique unimodulaire. On appelle <u>base symplectique</u> de L une base $e_1,\ldots,e_{2g}$ satisfaisant à $e_i\cdot e_j = 0$ si $|i-j|\neq g$, $e_i\cdot e_{g+i} = 1$ pour $1\leq i\leq g$.

Soit q une forme quadratique mod. 2 sur L. On dit qu'une base symplectique $e_1,\ldots,e_{2g}$ est <u>adaptée à</u> q si l'on a $q(e_i)=0$ pour $i\leq 2g-2$ et $q(e_{2g-1})=1$ (on voit facilement qu'une telle base existe toujours). La valeur de $q(e_{2g})$ est alors indépendante du choix de la base; on l'appelle l'<u>invariant d'Arf</u> de q. Le Théorème 4 se traduit ainsi :

PROPOSITION 2.- <u>L'espace des hypersurfaces</u> X <u>de dimension impaire</u> n <u>et de degré</u> d, <u>munies d'une base symplectique de</u> $H^n(X,\mathbb{Z})$ <u>si</u> d <u>est pair (resp. d'une base symplectique adaptée à</u> q_X, <u>si</u> d <u>est impair) est irréductible</u>.

Plus généralement les Théorème 2 et 4 permettent de déterminer les composantes irréductibles des espaces de modules d'hypersurfaces munies d'une <u>structure de niveau</u>, c'est-à-dire d'une structure supplémentaire (base ou élément mod p, etc.) sur $H^n(X,\mathbb{Z})$. Je vais me contenter d'un exemple assez classique, celui des thêta-caractéristiques sur les courbes planes.

b) <u>Thêta-caractéristiques</u>.

Soit C une courbe (lisse, compacte) de genre g. Rappelons qu'une <u>thêta-caractéristique</u> sur C peut être définie de l'une des trois manières (équivalentes) suivantes :

(i) un faisceau inversible L sur C (à isomorphisme près), vérifiant $L^{\otimes 2}\simeq\omega_C$;

(ii) un diviseur thêta Θ symétrique sur $J(C)$;

(iii) une forme quadratique q mod. 2 sur $H^1(C,\mathbb{Z})$.

On a $$h^0(L)=\mathrm{mult}_0(\Theta)\equiv \mathrm{Arf}(q)\pmod 2\ ;$$

on dit que la thêta-caractéristique est paire (resp. impaire) si ces nombres sont égaux à 0 (resp. 1) dans $\mathbb{Z}/2$.

Les courbes planes de degré d impair admettent une <u>thêta-caractéristique canonique</u>, définie par le faisceau $\mathcal{O}_C(\frac{d-3}{2})$ (ou par la forme q_C).

PROPOSITION 3.- <u>L'espace des courbes planes de degré</u> $d\geq 4$, <u>munies d'une thêta-caractéristique, admet</u>

- <u>deux composantes irréductibles si</u> d <u>est pair, correspondant aux thêta-caractéristiques paires et impaires</u>;
- <u>trois composantes si</u> d <u>est impair, correspondant à la thêta-caractéristique canonique et aux autres thêta-caractéristiques paires et impaires</u>.

Ce résultat a été obtenu auparavant, par une méthode différente, par F. Catanese (non publié).

Soit u un point de $U_{1,d}$, correspondant à la courbe plane C; désignons par L le réseau symplectique $H^1(C,\mathbb{Z})$ et par $Q(L)$ l'ensemble des formes quadratiques mod. 2 sur L. Par construction, l'espace que nous considérons est le revêtement étale de $U_{1,d}$ défini par l'action de $\pi_1(U_{1,d},u)$ sur $Q(L)$ (ou, si l'on préfère, le quotient de cet espace par $PGL(3)$; cela ne change rien aux questions d'irréductibilité). Il s'agit donc de décrire les orbites dans $Q(L)$ des groupes $Sp(L)$ et $SpO(L,q)$, pour $q \in Q(L)$.

Il résulte immédiatement de l'existence des bases adaptées que $Q(L)$ est réunion de deux orbites sous $Sp(L)$, distinguées par l'invariant d'Arf. D'autre part, $Q(L)$ est un espace affine sous L : pour $q \in Q(L)$, $x \in L$, la forme $q+x$ est définie par $(q+x)(y) = q(y) + (x.y)$. Le choix d'une origine $q \in Q(L)$ permet d'identifier $Q(L)$ à L, et ce de manière compatible avec l'action de $SpO(L,q)$. Compte tenu de la formule $\operatorname{Arf}(q+x) = \operatorname{Arf}(q) + q(x)$, on en déduit que $Q(L) - \{q\}$ est réunion de deux orbites sous $SpO(L,q)$, distinguées par l'invariant d'Arf. La proposition en résulte aussitôt.

c) Difféomorphismes.

Soit X une hypersurface lisse de dimension n et de degré d. Notons $\mathrm{Diff}^+(X)$ le groupe des difféomorphismes de X préservant l'orientation (dans la suite, nous dirons simplement difféomorphisme). Ce groupe opère sur la cohomologie en respectant la forme d'intersection, d'où un homomorphisme $\pi : \mathrm{Diff}^+(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^n(X,\mathbb{Z}))$. Puisque $\mathrm{Diff}^+(X)$ contient les difféomorphismes de monodromie, l'image de π contient $\Gamma_{n,d}$. Nous allons déterminer précisément cette image.

PROPOSITION 4.- Supposons n pair ≥ 4. L'image de π est égale à $O_h(H^n(X,\mathbb{Z}))$ si $n/2$ est pair, à $O_h(H^n(X,\mathbb{Z})) \times \{\pm 1\}$ si $n/2$ est impair.

Soit u un difféomorphisme de X; comme $H^2(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}h$, on a $u^*h = \pm h$, d'où $u^*h^{n/2} = h^{n/2}$ ou $\pm h^{n/2}$ suivant que $n/2$ est pair ou impair. Observons qu'il existe effectivement des difféomorphismes u tels que $u^*h = -h$, par exemple la conjugaison complexe si X est définie sur $\mathbf{R}$. On est donc ramené à prouver que le groupe $O_h(H^n(X,\mathbb{Z}))$ est contenu dans $\mathrm{Im}(\pi)$. On sait déjà qu'il en est ainsi de $O_h^+(H^n(X,\mathbb{Z}))$, en vertu du Théorème 2; il suffit donc de construire un difféomorphisme dont l'image dans $O(H^n(X,\mathbb{Z}))$ appartient à O_h mais pas à O_h^+.

On peut supposer $d \geq 3$. Le réseau $H^n(X,\mathbb{Z})_0$ est alors complet (n° 2), donc contient un plan hyperbolique U. Par chirurgie [K-W], la décomposition $H^n(X,\mathbb{Z}) = U \oplus U^\perp$ est réalisée topologiquement par une décomposition en somme connexe $X = (S^n \times S^n) \# X'$. Soit s la symétrie de S^n par rapport à un équateur. Le difféomorphisme (s,s) de $S^n \times S^n$ préserve l'orientation et admet des points fixes; en le recollant avec l'identité de X', on obtient un difféomorphisme qui induit $-\mathrm{Id}$ sur U et Id sur $U^{\perp}$, donc préserve $h^{n/2}$ mais n'appartient pas à O_h^+, d'où la proposition.

PROPOSITION 5.- Supposons n impair. Si d est impair et $n \neq 1,3,7$, l'image de σ est le groupe $\mathrm{SpO}(H^n(X,\mathbb{Z}),q_X)$. Dans les autres cas, c'est le groupe $\mathrm{Sp}(H^n(X,\mathbb{Z}))$.

Si d est impair et $n \neq 1,3,7$, la forme q_X est invariante par difféomorphisme. Elle admet en effet la description suivante ([B], [W]) : toute classe $x \in H^n(X,\mathbb{Z})$ peut être représentée par une sphère S^n plongée dans X, et on a $q(x) = 0$ si et seulement si le fibré normal de S^n dans X est trivial. On a donc $\mathrm{Im}(\sigma) \subset \mathrm{SpO}(H^n(X,\mathbb{Z}),q_X)$, d'où l'égalité compte tenu du Théorème 4.

Si d est pair, la proposition résulte du Théorème 2. Reste à traiter le cas $n = 1,3,7$. Il suffit de montrer que l'image de σ contient les transvections symplectiques s_δ, pour δ non divisible dans $H^n(X,\mathbb{Z})$. Soit ε un élément de $H^n(X,\mathbb{Z})$ tel que $\delta.\varepsilon = 1$, et soit $U = \mathbb{Z}\delta \oplus \mathbb{Z}\varepsilon$. Comme dans le cas n pair, la décomposition $H^n(X,\mathbb{Z}) = U \oplus U^{\perp}$ est réalisée topologiquement [W] par une décomposition $X = (S^n \times S^n) \# X'$. Soit v le difféomorphisme de $S^n \times S^n$ défini par $v(x,y) = (x,x.y)$, où le point désigne la multiplication des nombres complexes (resp. des quaternions, resp. des octonions) de norme 1. On vérifie facilement que le difféomorphisme obtenu en recollant v et l'identité de X' induit s_δ sur $H^n(X,\mathbb{Z})$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Remarques.- 1) Je suppose que les Propositions 4 et 5 peuvent aussi se déduire directement des décompositions en sommes connexes obtenues dans [K-W] et [W].

2) La Proposition 4 ne s'étend malheureusement pas au cas des surfaces, qui est certainement le plus intéressant pour les topologues. Il n'y a en effet aucune raison pour qu'un difféomorphisme de la surface X préserve la classe h. Pour $d = 3$, on a $\pi(\mathrm{Diff}^+(X)) = O(H^2(X,\mathbb{Z}))$ d'après un théorème de Wall [Wa]. Pour $d = 4$, on sait que l'image de π contient le sous-groupe $\mathrm{Ker}\ \sigma_{-1}$: cela résulte du fait que l'espace des modules des surfaces K3 marquées a deux composantes connexes, cf. [X], exposé XIII. Il semble que S. Donaldson sache prouver l'égalité $\pi(\mathrm{Diff}^+(X)) = \mathrm{Ker}\ \sigma_{-1}$ dans ce cas. J'ignore ce qui se passe pour $d \geq 5$.

5. Intersections complètes.

Les considérations qui précèdent s'étendent sans difficulté au cas des intersections complètes. Soient r un entier ≥ 2, et $\underline{d} = (d_1,\ldots,d_r) \in \mathbb{N}^r$, avec $d_i \geq 2$ pour tout i. Notons $U_{n,\underline{d}}$ l'ouvert de $\mathbb{P}^{N_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{N_r}$ (avec $N_i = \binom{n+r+d_i}{d_i}$) qui paramètre les intersections complètes lisses de r hypersurfaces de degrés $d_1,\ldots,d_r$ dans $\mathbb{P}^{n+r}$. Soient $u \in U_{n,\underline{d}}$, X l'intersection complète correspondante, $\Gamma_{n,\underline{d}}$ l'image de l'homorphisme de monodromie $\rho : \pi_1(U_{n,\underline{d}},u) \longrightarrow \mathrm{Aut}(H^n(X,\mathbb{Z}))$.

THEOREME 5.- <u>Supposons n pair, et $\underline{d} \neq (2,2)$. Le groupe de monodromie $\Gamma_{n,\underline{d}}$ est le sous-groupe $O_h^+(H^n(X,\mathbb{Z}))$, d'indice 2 dans $O_h(H^n(X,\mathbb{Z}))$.</u>

Pour $\underline{d} = (2,2)$ le groupe de monodromie est le groupe de Weyl $W(D_{2n+3})$, qui est égal à $O_h(H^n(X,\mathbb{Z}))$ (cf. [R]).

Reprenant la démonstration du Théorème 2, il suffit, pour chaque couple $(n,\underline{d})$, d'exhiber une intersection complète de dimension n et multidegré $\underline{d}$ admettant une singularité U_{12}. Si l'un des d_i, par exemple d_1, est ≥ 3, on prend la variété d'équations affines dans $\mathbb{C}^{n+r}$

$$x_1^3 + x_1^{d_1} + x_2^3 + \sum_{i=4}^{n+r} x_i^2 = 0 \quad ; \qquad x_i = x_4^2 + x_4^{d_i} \quad \text{pour } 4 \leq i \leq r+2.$$

Si $d_i = 2$ pour tout i (et $r \geq 3$), on prend pour équations

$$(x_1 + x_2)x_3 + \sum_{i=5}^{n+r} x_i^2 = 0 \quad ; \quad x_3 = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \quad ; \quad x_i = x_4^2 \quad \text{pour } 5 \leq i \leq r+2.$$

THEOREME 6.- <u>Supposons $n = 2\nu - 1$, et $\underline{d} \neq (2,2)$. Soit p le nombre des degrés d_i qui sont pairs.</u>

(i) <u>Si $\binom{\nu+p-1}{\nu}$ est pair, il existe une forme quadratique canonique q_X mod. 2 sur $H^n(X,\mathbb{Z})$, et on a $\Gamma_{n,\underline{d}} = SpO(H^n(X,\mathbb{Z}),q_X)$.</u>

(ii) <u>Si $\binom{\nu+p-1}{\nu}$ est impair, le groupe de monodromie $\Gamma_{n,\underline{d}}$ est égal à $Sp(H^n(X,\mathbb{Z}))$.</u>

Pour $\underline{d} = (2,2)$, la monodromie est celle de la famille universelle des courbes hyperelliptiques de genre ν [R] : le groupe $\Gamma_{n,\underline{d}}$ est formé des automorphismes symplectiques de $H^n(X,\mathbb{Z})$ dont la réduction mod.2 appartient à un sous-groupe de $Sp(H^n(X,\mathbb{Z}/2))$ isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+3}$.

Démontrons le Théorème 6. On construit d'abord, pour tout $(n,\underline{d})$, une intersection complète de dimension n et multidegré $\underline{d}$ admettant une singularité E_6. Si l'un des d_i, disons d_1, est ≥ 3, on prend pour équations affines

$$x_1^3 + x_1^{d_1} + \sum_{i=3}^{n+r} x_i^2 = 0 \quad ; \qquad x_i = x_2^2 + x_2^{d_i} \quad \text{pour } 3 \leq i \leq r+1.$$

Si $d_i = 2$ pour tout i (et $r \geq 3$), on prend

$$x_1x_2 + \sum_{i=4}^{n+r} x_i^2 = 0 \quad ; \quad x_2 = x_1^2 \quad ; \quad x_i = x_3^2 \quad \text{pour } 4 \leq i \leq r+1.$$

On est donc dans l'une des situations (i) ou (ii) du Théorème 3. Si $\binom{\nu+p-1}{\nu}$ est pair, il existe une forme quadratique mod.2 q_X sur $H^n(X,\mathbb{Z})$, invariante par déformation [B] : cela entraîne (i). Il reste à éliminer, lorsque $\binom{\nu+p-1}{\nu}$

est impair, l'existence d'une telle forme; il suffit pour cela, comme dans la démonstration du Théorème 4, de trouver pour chaque $(n,\underline{d})$ une situation $Z\subset X_0$, où X_0 est une intersection complète de dimension n et multidegré $\underline{d}$ avec des points doubles ordinaires, et Z une sous-variété lisse de dimension ν passant par un nombre impair de ces points doubles.

Soit (A_{ij}) une matrice de formes homogènes sur $\mathbb{P}^\nu$ à r lignes et $\nu+r-1$ colonnes, avec $\deg A_{ij} = d_i - 1$. Prenons pour X_0 la sous-variété de $\mathbb{P}^{n+r}$ définie par les équations

$$\sum_{j=1}^{\nu+r-1} T_{\nu+j}\, A_{ij}(T_0,\ldots,T_\nu) = 0 \qquad (1\leq i\leq r),$$

et pour Z le sous-espace linéaire $T_{\nu+1} = \ldots = T_{n+r} = 0$ de $\mathbb{P}^{n+r}$. Lorsque les formes A_{ij} sont assez générales, on déduit du critère jacobien que les seuls points singuliers de X_0 sont des points doubles ordinaires, situés sur Z et définis par l'équation

$$\operatorname{rg}(A_{ij}) \leq r-1.$$

Le nombre N des points de $Z(=\mathbb{P}^\nu)$ vérifiant cette équation est donnée par une formule classique de géométrie énumérative, exprimée en langage moderne par Porteous [P] :

$$N = \det((c_{j-i+1})_{1\leq i,j\leq\nu}) ,$$

où c_q désigne la q-ième classe de Chern du fibré $\sum_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^\nu}(d_i-1)$.

Dans $H^*(\mathbb{P}^\nu, \mathbb{Z}/2)$, on a

$$c(\sum_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^\nu}(d_i-1)) = c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^\nu}(1)^p) = (1+c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)))^p,$$

d'où la congruence

$$N \equiv \det(\tbinom{p}{j-i+1}_{1\leq i,j\leq\nu}) \pmod 2.$$

On conclut la démonstration à l'aide du lemme élémentaire suivant :

<u>Lemme</u>.- <u>On a</u> $\det(\tbinom{p}{j-i+1}_{1\leq i,j\leq\nu}) = \tbinom{p+\nu-1}{\nu}$.

Fixons p, et notons Δ_ν le déterminant à calculer $(\nu\geq 1)$. En développant Δ_ν suivant les colonnes, on obtient la relation

$$\Delta_\nu - \tbinom{p}{1}\Delta_{\nu-1} + \tbinom{p}{2}\Delta_{\nu-2} + \ldots + (-1)^\nu\tbinom{p}{\nu} = 0.$$

Raisonnant par récurrence sur ν, il suffit de vérifier que cette relation est satisfaite lorsqu'on remplace Δ_i par $\binom{p+i-1}{i} = (-1)^i\binom{-p}{i}$. Mais l'expression

$$\binom{-p}{\nu} + \binom{-p}{\nu-1}\binom{p}{1} + \ldots + \binom{-p}{1}\binom{p}{\nu-1} + \binom{p}{\nu}$$

n'est autre que la coefficient de T^{ν} dans le développement en série de $(1+T)^{-p}(1+T)^p$, d'où le lemme et le théorème.

Les Propositions 1 à 5 du n° 4 se généralisent immédiatement au cas des intersections complètes; je laisse les détails au lecteur.

BIBLIOGRAPHIE

[A] V.I. ARNOL'D : Remarks on the stationary phase methods and Coxeter numbers. Russian Math. Surveys 28, 5 (1973), 19-48.

[B] W. BROWDER : Complete intersections and the Kervaire invariant. Algebraic topology, Aarhus 1978. Springer Lecture Notes 763 (1979), 88-108.

[D] P. DU VAL : On isolated singularities which do not affect the conditions of adjunction, III. Proc. Cambridge Phil. Soc. 30 (1934), 483-491.

[E] W. EBELING : An arithmetic characterisation of the symmetric monodromy groups of singularities. Inventiones math. 77 (1984), 85-99.

[J] W.A.M. JANSSEN : Skew-symmetric vanishing lattices and their monodromy group. Math. Ann. 266 (1983), 115-133; 272 (1985), 17-22.

[K-W] R. KULKARNI and J. WOOD : Topology of non-singular complex hypersurfaces. Adv. in Math. 35 (1980), 239-263.

[P] I.R. PORTEOUS : Simple singularities of maps. Proc. of Liverpool Singularities Symposium, Springer Lecture Notes 192 (1971), 286-307.

[R] M. REID : The complete intersection of two or more quadrics. Thesis, Cambridge (1972).

[Wa] C.T.C. WALL : Diffeomorphisms of 4-manifolds. J. London Math. Soc. 39 (1964), 131-140.

[W] J. WOOD : Removing handles from non-singular algebraic hypersurfaces in $\mathbb{C}\mathbb{P}_{n+1}$. Inventiones Math. 31 (1976), 1-6.

[X] Séminaire Palaiseau : Géométrie des surfaces K3, modules et périodes. Astérisque 126 (1985).

Mathématiques, Bât. 425, Université Paris-Sud
F-91405 ORSAY CEDEX