SITE PARIS-SUD
TRE d'ORSAY

1 - ORSAY

1970-1971

SEMINAIRE DE GEOMETRIE ALGEBRIQUE

-:-:-:-:-:-:-:-

FORMULES DE POINTS FIXES EN COHOMOLOGIE COHERENTE

(Théorème de LEFSCHETZ-RIEMANN-ROCH)

par Arnaud Beauville

-:-:-:-:-:-:-:-

§0. Introduction

Soient X une variété topologique compacte, orientable, f un endomorphisme de X, n'ayant que des points fixes isolés (x_j), f induit un endomorphisme f^* de la cohomologie ; la formule des points fixes de Lefschetz ([8]) exprime le "nombre de Lefschetz" $L(f) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr} f^* | H^i(X,\mathbb{Z})$ comme somme d'invariants locaux $I(x_j)$, calculés aux points fixes :

$$L(f) = \Sigma\, I(x_j) .$$

Les $I(x_j)$ sont entiers ; si par exemple X est muni d'une structure analytique pour laquelle f est holomorphe, les $I(x_j)$ sont tous égaux à 1 : le nombre de Lefschetz est dans ce cas égal au nombre de points fixes.

On dispose de résultats analogues en Géométrie Algébrique sur un corps quelconque, utilisant la cohomologie étale ([24]), la cohomologie de Hodge ([11], cf.

plus loin), plus généralement une "cohomologie de Weil" arbitraire ([18]). On expose ici uniquement les formules de points fixes obtenues en cohomologie cohérente : "Formule de Woods Hole" ([2]) et formule de Lefschetz-Riemann-Roch ([10]).

Dans ce cadre, il est évidemment nécessaire de reformuler le problème : soient X une variété projective et lisse sur un corps k algébriquement clos, f un endomorphisme de X, F un O_X-Module cohérent.

Définition 0.1 :

Un relèvement de f à F est un morphisme de faisceaux :

$$\varphi : f^*F \to F \ .$$

Soit φ un relèvement de f ; on en déduit un endomorphisme de la cohomologie $\tilde{\varphi}$, défini par :

$$\tilde{\varphi}^i : H^i(X,F) \xrightarrow{f^*} H^i(X,f^*F) \xrightarrow{\varphi} H^i(X,F) \ .$$

Définition 0.2 :

Le nombre de Lefschetz $L(f,\varphi,F)$ d'un relèvement est l'élément de k défini par :

$$L(f,\varphi,F) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}\ \tilde{\varphi}_i \ .$$

Le but de cet exposé est de calculer $L(f,\varphi,F)$ dans un cadre suffisamment général. Comme en topologie, le calcul est particulièrement simple si f n'a que des points fixes isolés, de multiplicité 1 (formule de Woods Hole). Le cas opposé est celui où f est l'identité : si par exemple $\varphi = 1_F$, le nombre de Lefschetz se réduit à la caractéristique d'Euler-Poincaré de F, et on connait une formule (le théorème de Riemann-Roch) pour la calculer. Ces deux formules sont des cas particuliers d'une "formule de Lefschetz-Riemann-Roch" due à Atiyah-Segal ([3]) en géométrie analytique, à Donovan en géométrie algébrique ([10]). C'est cette formule qu'on va exposer ici.

Le plan est le suivant : on énonce au §I la "formule de Woods Hole" (cas des points fixes isolés de multiplicité 1) ; on en montre au §II quelques applications, tirées pour la plupart de [1]. Aux §III et IV, on déroule les sorites nécessaires pour le §V, où est énoncée et démontrée la formule de Lefschetz-Riemann-Roch.

Notations :

Le corps k sera toujours algébriquement clos ; par "variété sur k" on entendra un schéma irréductible, lisse et projectif sur k. Soient X une variété sur k, F un faisceau cohérent sur X, x un point de X ; on notera F_x la fibre de F en x et $F(x) = F_x \otimes_{O_x} k(x)$; si $u : F \to G$ est un morphisme de faisceaux, on notera $u_x : F_x \to G_x$ et $u(x) : F(x) \to G(x)$ les morphismes induits.

§I. Formule de Woods Hole

Soient X une variété sur k, f un endomorphisme de X, F un faisceau cohérent sur X, φ un relèvement de f à F. On désigne par X^f le sous-schéma des points fixes de f, défini par le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} X^f \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\Delta"] \\ X \arrow[r, "(1{,}f)"] & X \times X \end{tikzcd}$$

Proposition I.1 :

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) X^f est étale sur k.

(ii) Le graphe de f est transversal à la diagonale dans $X \times X$.

(iii) En tout point fixe x de X, on a : $\det(1-df(x)) \neq 0$.

L'équivalence de (i) et (ii) résulte des définitions (EGA IV.17.13). L'équivalence de (i) et (iii) est donnée par le critère jacobien (dans un système de coordonnées locales (t_i), X^f est défini par les équations : $t_i - f^* t_i = 0$).

On dira que f est transverse s'il vérifie les conditions équivalentes de I.1. Nous pouvons maintenant énoncer :

<u>Théorème</u> I ("formule de Woods Hole") :

Si f est transverse :

$$L(f,\varphi,F) = \sum_{x \in X^f} \frac{\operatorname{Tr} \varphi(x)}{\det(1-df(x))}$$

(où $df : f^*\Omega^1_X \to \Omega^1_X$ est la différentielle de f).

<u>Remarques</u> :

1) La formule a un sens grâce à I.1 (iii).

2) La formule de Woods Hole est due, simultanément semble-t-il, à Atiyah-Bott dans le cadre analytique et à Shimura dans le cadre algébrique. La démonstration directe, basée sur la dualité de Serre et la formule de Künneth, n'est pas difficile ; mais nous l'obtiendrons ici comme cas particulier d'une formule plus générale (théorème III).

3) Les relèvements de f les plus employés seront :

- l'isomorphisme naturel : $f^*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$, qu'on appellera "relèvement unité" (noté 1) ;
- la différentielle $df : f^*\Omega^1_X \to \Omega^1_X$, et ses puissances extérieures.

4) La formule donne une égalité dans le corps k, ce qui est assez restrictif en caractéristique $p \neq 0$, comme on le verra dans les exemples ci-dessous. On peut toutefois améliorer le résultat dans un cas particulier : f d'ordre fini premier à p. Pour cela, on désigne par $W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k, par $w : k \to W(k)$ le relèvement de Teichmüller. Soit u un endomorphisme d'un k-espace vectoriel, de valeurs propres $c_1 \ldots c_m$; sa "trace de Brauer" est par définition : $\operatorname{BTr} u = \Sigma\, w(c_i)$.

On convient de poser $W(k) = k$ et $w = 1_k$ si $p = 0$, de manière à obtenir des résultats valables en toute caractéristique.

<u>Définition</u> 0.2bis :

Le nombre de Lefschetz-Brauer $BL(f,\varphi,F)$ d'un relèvement est l'élément de $W(k)$ défini par : $BL(f,\varphi,F) = \sum_i (-1)^i \operatorname{BTr} \varphi^i$.

<u>Théorème</u> Ibis :

Si f est transverse et $f^r = \mathrm{Id}_X$ (r premier à p) :

$$BL(f,\varphi,F) = \sum_{x \in X^f} \frac{\operatorname{BTr} \varphi(x)}{\sum_i (-1)^i \operatorname{BTr} \Lambda^i df(x)}.$$

Si $c_1 \ldots c_n$ sont les valeurs propres de $df(x)$, on a aussi :

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{BTr} \Lambda^i df(x) = \prod_{j=1}^{j=n} (1 - w(c_j)).$$

On voit en particulier que la formule Ibis redonne bien par réduction modulo p la formule I.

§II. <u>Exemples et conséquences</u>

<u>Exemple</u> II.1 : Espace projectif

Prenons $X = \mathbb{P}^n$, f un endomorphisme diagonalisable, φ le relèvement unité ; dans un système de coordonnées $(T_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ convenable, on a : $f^* T_i = c_i T_i$. Les c_i sont tous distincts (nécessaire pour que f soit transverse). Les points fixes sont alors les points x_i définis par $T_j = 0$ pour $j \neq i$. Au point x_i, les différentielles $d(T_j/T_i)$ forment une base de $\Omega^1_{\mathbb{P}^n}$; or $f^* d(T_j/T_i) = c_j/c_i \; d(T_j/T_i)$, donc :

$$\det(1-df(x_i)) = \prod_{j\neq i} (1-c_j/c_i) .$$

Comme $\mathrm{Tr}\ 1(x) = 1$ (f^* laisse fixe les fonctions constantes!), la formule de Woods Hole donne ici :

$$1 = \sum_{i=o}^{i=n} \frac{c_i^n}{\prod_{j\neq i} (c_i - c_j)}$$

identité que le lecteur pourra démontrer en exercice... Noter que dans ce cas le théorème Ibis est vrai sans hypothèse sur l'ordre de f.

Exemple II.2 : Cohomologie de Hodge

Prenant comme relèvement $\Lambda^p df : f^*\Omega^p_X \to \Omega^p_X$, on trouve :

$$\sum_q (-1)^q \mathrm{Tr}\ f^* | H^q(X,\Omega^p) = \sum_{x \in X^f} \frac{\mathrm{Tr}\ \Lambda^p df(x)}{\det(1-df(x))}$$

d'où, en prenant la somme alternée et en utilisant l'identité :

$\det(1-u) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}\ \Lambda^i u$:

$$\sum_{p,q} (-1)^{p+q} \mathrm{Tr}\ f^* | H^q(X,\Omega^p) = \sum_{x\in X^f} \frac{\sum (-1)^p \mathrm{Tr}\ \Lambda^p df(x)}{\det(1-df(x))} = \mathrm{Card}(X^f) \text{ dans } k .$$

Le premier membre est, si l'on veut, le "nombre de Lefschetz en cohomologie de Hodge" de f. Compte tenu des propriétés de la trace et de la suite spectrale d'hypercohomologie, on a d'ailleurs :

$$\sum_{p,q} (-1)^{p+q} \mathrm{Tr}\ f^* | H^q(X,\Omega^p) = \sum_r (-1)^r \mathrm{Tr}\ f^* | H^r_{DR}(X) .$$

En particulier, si $k = \mathbb{C}$, on retrouve la formule de Lefschetz classique.

En caractéristique p, la formule donne le nombre de points fixes modulo p; si toutefois f est d'ordre fini premier à p, le théorème Ibis donne l'égalité suivante dans $\mathbb{Z}$:

$$\mathrm{Card}(X^f) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} \mathrm{BTr}\ f^* | H^q(X,\Omega^p) = \sum_r (-1)^r \mathrm{BTr}\ f^* | H^r_{DR}(X) .$$

Exemple II.3 : Frobenius

La caractéristique de k est $p \neq 0$; on suppose X définie sur $\mathbb{F}_q$, $q = p^h$. Les points fixes du Frobenius sont alors les points rationnels sur $\mathbb{F}_q$, et plus généralement les points fixes de $(\mathrm{Fr})^m$ sont les points rationnels sur $\mathbb{F}_{q^m}$. Comme $d\mathrm{Fr} = 0$ (le Frobenius est "purement inséparable"), le théorème I, appliqué au relèvement unité, donne :

$$\mathrm{Card}\ X(\mathbb{F}_{q^m}) \equiv L(\mathrm{Fr}^m, 1, \mathcal{O}_X) \qquad (\mathrm{mod.}\ p) .$$

Il n'y a malheureusement aucune chance que cette congruence soit une égalité, comme le montre l'exemple de la droite projective sur $\mathbb{F}_p$... On en tire cependant des formules de congruence pour la fonction zêta $Z_X(t)$. Rappelons que :

$$Z_X(t) = \exp\Big(\sum_{m=o}^{\infty} \frac{t^m}{m} .\ \mathrm{Card}\ X(\mathbb{F}_{q^m})\Big) = \prod_{x\in X^o} \frac{1}{1-t^{d(x)}}$$

(où X^o est l'ensemble des points fermés de X, et $d(x)$ le degré du corps résiduel $k(x)$ sur $\mathbb{F}_q$).

Soient $c_{p,i}$ les valeurs propres de l'action de Frobenius sur $H^p(X,\mathcal{O}_X)$; alors :

$$\mathrm{Card}\ X(\mathbb{F}_{q^m}) = \sum_p (-1)^p \mathrm{Tr}\ \mathrm{Fr}^m | H^p(X,\mathcal{O}_X) = \sum_{p,i} (-1)^p c^m_{p,i}$$

d'où : $$Z_X(t) \equiv \frac{F_1(t)F_3(t)\ldots}{F_o(t)F_2(t)\ldots} \quad (\mathrm{mod.}\ p) \quad \text{avec} \quad F_p(t) = \prod_i (1-c_{p,i}t) .$$

Notons en passant que cette formule, ainsi que la précédente, est encore valable lorsque X n'est plus supposée lisse sur k ; la démonstration est beaucoup plus délicate ([17]).

<u>Exemple</u> II.4 : Involution

<u>Proposition</u> II.4 :

En caractéristique différente de 2, le nombre de points fixes d'une involution est infini ou multiple de 2^n $(n = \dim X)$.

Soit $u : X \to X$ une involution $(u^2 = \mathrm{Id}_X)$ ayant un nombre fini de points fixes. On verra plus loin (V.1) que u est alors nécessairement transverse ; on peut donc appliquer le théorème Ibis avec le relèvement unité. En un point fixe x, $du(x)$ est diagonalisable avec ± 1 comme valeurs propres, et en fait seulement -1 puisque $\det(1-du(x)) \neq 0$: donc $du(x) = -1$. De même, les endomorphismes induits sur la cohomologie ont des valeurs propres égales à ± 1, donc leur trace est entière et égale à leur "trace de Brauer" (puisque $w(-1) = -1$ en caractéristique $\neq 2$). La formule de Woods Hole donne :

$$BL(u,1,O_X) = \sum_{x \in X^f} \frac{1}{2^n} = \frac{\mathrm{Card}(X^f)}{2^n} \in \mathbb{Z} .$$

<u>Exemple</u> II.5 : Automorphismes ayant un seul point fixe

<u>Proposition</u> II.5 :

En caractéristique 0, un automorphisme d'ordre p^m (p premier) ne peut avoir un point fixe unique.

Toujours d'après V.1 plus loin, l'automorphisme u $(u^q = \mathrm{Id}_X$, avec $q = p^m)$ est transverse, donc on peut appliquer le théorème I. Soit x le point fixe ; en utilisant le relèvement unité, on trouve :

$$L(u,1,O_X) = \frac{1}{\det(1-du(x))} .$$

Or comme $u^q = \mathrm{Id}_X$, $L(u,1,O_X)$ est somme de racines $q^{\text{ièmes}}$ de l'unité, donc appartient à l'anneau $\mathbb{Z}[\zeta]$ des entiers du corps des racines $q^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

De même, $\det(1-du(x)) = \prod_i (1-\zeta^{n_i})$; ce qui donne : $a(1-\zeta) = 1$ avec $a \in \mathbb{Z}[\zeta]$ ce qui est impossible, par exemple parce que $N(1-\zeta) = \Phi_{p^m}(1) = p$.

<u>Exemple</u> II.6 : Formule des caractères (H. Weyl)

On admet ici la théorie classique des groupes algébriques semi-simples, pour laquelle on renvoie à [20].

Soient G un groupe algébrique semi-simple simplement connexe sur k algébriquement clos, T un tore maximal, B un groupe de Borel contenant T. On va appliquer le théorème I à la multiplication à gauche, dans G/B, par un élément y de G. Les points fixes de cet automorphisme (noté s_y) sont les classes à droite gB telles que $y \in gBg^{-1}$. Si l'on prend pour y un élément régulier de T, tout Borel contenant y contient T ; les points fixes correspondent alors bijectivement aux groupes de Borel contenant T, c'est-à-dire aux wBw^{-1}, où w décrit le groupe de Weyl W.

Calculons la dérivée de s_y au point fixe wB, ou plutôt, puisque $s_y = s_w \circ s_{w^{-1}yw} \circ (s_w)^{-1}$, la dérivée de $s_{w^{-1}yw}$ au point marqué de G/B. Soient $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{b} = \mathrm{Lie}(B)$; on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathrm{int}(w^{-1}yw)"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ G/B \arrow[r, "s_{w^{-1}yw}"] & G/B \end{tikzcd}$$

d'où l'on déduit immédiatement le diagramme analogue sur les algèbres de Lie :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\mathrm{Ad}(w^{-1}yw)"] \arrow[d] & \mathfrak{g} \arrow[d] \\ \mathfrak{g}/\mathfrak{b} \arrow[r, "ds_{w^{-1}yw}"] & \mathfrak{g}/\mathfrak{b} \end{tikzcd}$$

Soit $g = g^o \oplus \sum_{\alpha \in R} g^\alpha$ la décomposition de g sous $\mathrm{Ad}(T)$ (de sorte que $\mathrm{Ad}(T)$ agit sur chaque g^α par le caractère α). Il existe un système de racines positives R_+ (d'ailleurs unique) tel que $b = g^o \oplus \sum_{\alpha\in R_+} g^{-\alpha}$; les valeurs propres de $ds_y(wB)$ sont donc les $\alpha(\bar{w}^1 yw)$ pour $\alpha \in R_+$. Comme y est régulier, ceux-ci sont différents de 1 ; donc s_y est transverse, et on pourra appliquer le théorème I.

Reste à choisir un relèvement. Rappelons des faits bien connus ([20]). A tout caractère χ de T, on associe un faisceau inversible $L(\chi)$ sur G/B : χ définit en effet un caractère $\bar{\chi}$ de B, donc un morphisme $H^1(G/B,B) \to H^1(G/B,G_m) = \mathrm{Pic}(G/B)$; $L(\chi)$ est l'image par ce morphisme de la fibration $G \to G/B$. En termes de fibré vectoriel, $L(\chi)$ est le quotient de $G\times k$ par la relation d'équivalence : $(gb,v) \sim (g,\bar{\chi}(b)v)$. On a en outre une action de G sur $L(\chi)$, définie pour tout $z \in G$ par :

$$\varphi_z : \begin{cases} s_z^* L(\chi) \to L(\chi) \\ (g,v) \mapsto (\bar{z}^1 g, v) \end{cases}$$

Soit wB un point fixe de s_y (i.e. $\bar{w}^1 yw \in B$) ; φ_y applique (w,v) sur $(\bar{y}^1 w,v) \sim (w,\chi(\bar{w}^1\bar{y}^1 w)v)$, donc :

$$\mathrm{Tr}\ \varphi_y(wB) = \chi(\bar{w}^1\bar{y}^1 w) .$$

Appliquons le théorème I à $s_y, \varphi_y, L(\chi)$:

$$L(s_y,\varphi_y,L(\chi)) = \sum_{w\in W} \frac{\chi(\bar{w}^1\bar{y}^1 w)}{\prod_{\alpha\in R_+}(1-\alpha(\bar{w}^1 yw))}$$

G opère à droite sur $H^k(G/B,L(\chi))$ par $\tilde{\varphi}^k_y$; autrement dit, $\tilde{\varphi}^k_{\bar{y}^1}$ définit une représentation, notée ρ^k, de G dans l'espace vectoriel $H^k(G/B,L(\chi))$.

La formule précédente donne, après changement de y en $\bar{y}^1$:

$$(*) \quad \sum_k (-1)^k \mathrm{Tr}\ \rho^k(y) = \sum_{w\in W} \frac{\chi(\bar{w}^1 yw)}{\prod_{\alpha\in R_+}(1-\bar{\alpha}^1(\bar{w}^1 yw))} .$$

Soit M le groupe des caractères de T, où W opère de la manière habituelle. On pose comme d'habitude $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+}\alpha$, $J(x) = \sum_{w\in W}\varepsilon(w).w.x$ pour $x \in \mathbb{Z}[M]$. Rappelons qu'on a dans $\mathbb{Z}[M]$ l'identité purement formelle ([7]) :

$$\prod_{\alpha\in R_+}(1-e^{-\alpha}) = e^{-\rho}.J(e^\rho)$$

d'où $\displaystyle\sum_{w\in W} w.\frac{e^\chi}{(1-e^{-\alpha})} = \frac{J(e^{\chi+\rho})}{J(e^\rho)}$.

L'égalité $(*)$, valable pour tout y dans l'ouvert des points réguliers, montre que les deux éléments $\sum_k (-1)^k \mathrm{Tr}\ \rho^k$ et $\frac{J(e^{\chi+\rho})}{J(e^\rho)}$ de l'anneau $\mathbb{Z}[M]$ sont égaux comme fonctions sur T, i.e. dans l'anneau $k[M]$. En <u>caractéristique zéro</u>, on a donc :

$$(1) \quad \sum_k (-1)^k \mathrm{Tr}\ \rho^k = \frac{J(e^{\chi+\rho})}{J(e^\rho)} \quad \text{dans } \mathbb{Z}[M]$$

égalité qu'on peut regarder dans le groupe $R(G)$ des classes réduites de représentations de G ([23]) :

$$(2) \quad \sum_k (-1)^k [\rho^k] = \frac{J(e^{\chi+\rho})}{J(e^\rho)} \quad \text{dans } R(G) = (\mathbb{Z}[M])^W .$$

Prenons maintenant pour χ <u>un poids dominant</u> ; le théorème de Bott ([9]) montre que $H^k(G/B,L(\chi)) = 0$ pour $k > 0$, donc :

$$(3) \quad \mathrm{Tr}\ \rho^o = \frac{J(e^{\chi+\rho})}{J(e^\rho)} \quad \text{dans } \mathbb{Z}[M]$$

$$\text{ou} \quad (3') \quad [\rho^o] = \frac{J(e^{\chi+\rho})}{J(e^\rho)} \quad \text{dans } R(G) .$$

Il est facile de vérifier que la représentation ρ^o est simple de plus haut poids χ ([20]) ; on obtient donc comme corollaire la formule des caractères de

H. Weyl, qui donne l'expression dans $R(G)$ de la représentation simple de plus haut poids χ. Mais on obtient beaucoup plus, à savoir l'expression explicite de cette représentation comme action sur les sections du fibré en droites associé à χ.

Remarque : On verra en V.12 qu'on peut en fait appliquer le théorème Ibis à s_y ; il en résulte facilement que l'égalité (2) est encore valable en caractéristique $p \neq 0$. Mais on ne peut plus bien sûr appliquer le théorème de Bott, qui est l'ingrédient essentiel de (3) et (3').

§III. Rappels : K-théorie

1. Sorites de K-théorie (cf. [6])

Soient A une catégorie abélienne, C une sous-catégorie pleine de A ; on suppose que les classes à isomorphisme près d'objets de A forment un ensemble. On sait alors définir le "groupe de Grothendieck" $K(C)$ et une application $[\ ] : Ob(C) \to K(C)$: rappelons que $[F] = [F'] + [F'']$ pour toute extension F de F'' par F', et que le couple $([\ ], K(C))$ est universel pour cette propriété. On définit de même $K(A)$. L'inclusion de C dans A définit un morphisme : $i : K(C) \to K(A)$.

Proposition III.1 :

Supposons que le couple (C,A) satisfasse les conditions suivantes :

(i) Tout noyau d'un épimorphisme d'objets de C est dans C.

(ii) Tout objet de A est quotient d'un objet de C.

(iii) Pour tout objet F de A, il existe un entier d tel que, pour toute résolution gauche $L.$ de F par des objets de C, le noyau $\mathrm{Ker}(L_d \to L_{d-1})$ soit dans C.

Alors $i : K(C) \to K(A)$ est un isomorphisme.

Démonstration (accélérée) : Soit F un objet de A. D'après (ii) et (iii), il existe une résolution finie $L.$ de F par des objets de C. Posons $f_{L.}(F) = \sum_i (-1)^i [L_i] \in K(C)$. La démonstration se fait en trois étapes :

1) $f_{L.}(F)$ ne dépend pas de la résolution $L.$ choisie ; on le note $f(F)$.

2) Pour toute suite exacte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$, $f(F) = f(F') + f(F'')$; donc f définit un morphisme de groupes $\tilde{f} : K(C) \to K(A)$.

3) $\tilde{f} \circ i = \mathrm{Id}_{K(C)}$, $i \circ \tilde{f} = \mathrm{Id}_{K(A)}$.

Pour 1), on se donne deux résolutions $L.$ et $L'.$ de F ; il faut montrer que $f_{L.}(F) = f_{L'.}(F)$. On construit grâce à (ii) une troisième résolution $L''.$ de F et des morphismes $u : L''. \to L.$, $u' : L''. \to L'.$. Supposons en effet $L''.$, u et u' construits jusqu'en degré k ; on posera $(L''_{k+1})_o = L_{k+1} \times_{L_k} Z(L''_k) \times_{L'_k} L'_{k+1}$ et on prendra pour L''_{k+1} un objet de C dont $(L''_{k+1})_o$ est quotient, u et u' étant définis par les projections. On est ainsi ramené au cas où il existe un morphisme de résolutions $u : L. \to L'.$; le cône de u est alors acyclique, donc $\sum (-1)^i [L_{i+1} \oplus L'_i] = 0$, ou encore $\sum (-1)^i [L_i] = \sum (-1)^j [L'_j]$, d'où 1).

Pour 2), on choisit une résolution $L.$ de F et une résolution $L'.$ de F'; on peut supposer comme en 1) qu'il existe un morphisme de résolutions $v : L'. \to L.$. Le cône de v est alors une résolution de F'', et le même calcul qu'en 1) donne le résultat.

3) est trivial.

2. Conséquences

Soient X une variété sur k, f un automorphisme de X. Soient $\varphi : f^*F \to F$, $\psi : f^*G \to G$ deux relèvements de f à des faisceaux cohérents ; un morphisme de relèvements (de φ dans ψ) est par définition un morphisme de O_X-Modules $u : F \to G$ tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} f^*F \arrow[r, "f^*u"] \arrow[d, "\varphi"] & f^*G \arrow[d, "\psi"] \\ F \arrow[r, "u"] & G \end{tikzcd}$$

soit commutatif. On définit ainsi la catégorie des relèvements de f ; elle est abélienne, une suite :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & f^*F' \arrow[r, "f^*i"] \arrow[d] & f^*F \arrow[r, "f^*p"] \arrow[d] & f^*F'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F' \arrow[r, "i"] & F \arrow[r, "p"] & F'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

étant exacte si et seulement si la ligne du bas est exacte. On dira qu'un relèvement $f^*F \to F$ est localement libre si F est localement libre.

<u>Définition</u> III.2 :

– On désigne par $K(X)$ (resp. $K_n(X)$) le groupe de Grothendieck de la catégorie des faisceaux cohérents sur X (resp. de la sous-catégorie pleine des faisceaux localement libres).

– On désigne par $M(f)$ (resp. $M_n(f)$) le groupe de Grothendieck de la catégorie des relèvements de f (resp. de la sous-catégorie pleine des relèvements localement libres). On pose $M(Id_X) = M(X)$.

<u>Proposition</u> III.3 :

1) La flèche naturelle $K_n(X) \to K(X)$ est un isomorphisme.

2) Si f laisse fixe un faisceau ample, la flèche naturelle

$M_n(f) \to M(f)$ est un isomorphisme. Cette condition est réalisée en particulier lorsque f est d'ordre fini ($f^r = Id_X$).

Dans les deux cas, on vérifie les conditions (i) à (iii) de III.1. (i) est trivial et (iii) est bien connu (théorème des syzygies), ainsi que (ii) pour le cas 1) (théorème de Serre). Reste à montrer que tout relèvement $\varphi : f^*F \to F$ est quotient d'un relèvement localement libre. Si F est engendré par ses sections, c'est facile : on prend une base $(s_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ de $H^o(X,F)$ sur k ; alors $\varphi(f^*s_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}s_j$ $(a_{ij} \in k)$ dans $H^o(X,F)$. Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} O_X^m \arrow[r, "(f^*s_i)"] \arrow[d, "(a_{ij})"'] & f^*F \arrow[d, "\varphi"] \\ O_X^m \arrow[r, "(s_i)"] & F \end{tikzcd}$$

montre que φ est quotient du relèvement $f^*O_X^m \to O_X^m$ défini par les (a_{ij}).

Si maintenant F est quelconque, on choisit un faisceau ample L "stable par f", c'est-à-dire tel qu'il existe un isomorphisme $\psi : f^*L \to L$. Il existe un entier h tel que $F \otimes L^{\otimes h}$ soit engendré par ses sections ; d'après ce qui précède, le relèvement $\varphi \otimes \psi^{\otimes h} : f^*(F \otimes L^{\otimes h}) \to F \otimes L^{\otimes h}$ est quotient d'un relèvement $\pi : f^*P \to P$ (P localement libre). Par suite φ est quotient du relèvement localement libre $\pi \otimes \psi^{\otimes(-h)} : f^*(P \otimes L^{\otimes(-h)}) \to P \otimes L^{\otimes(-h)}$.

Enfin, si $f^r = Id_X$, pour tout faisceau ample L, le faisceau $L' = \bigotimes_{i=o}^{i=r-1} (f^i)^*L$ est ample et stable par f.

<u>Remarque</u> III.4 :

On peut montrer que la condition : "f laisse fixe un faisceau ample" équivaut à : "f est point rationnel d'un sous-groupe <u>linéaire</u> du groupe des automorphismes de X". Par exemple, la translation par un élément d'ordre non fini dans une variété abélienne ne peut laisser fixe un faisceau ample.

3. Structures sur $K(X)$ et $M(f)$

On suppose désormais que f laisse fixe un faisceau ample.

Les isomorphismes $K_n(X) \simeq K(X)$ et $M_n(f) \simeq M(f)$ permettent de transporter à $K(X)$ et $M(f)$ les structures de $K_n(X)$ et $M_n(f)$. En particulier :

a) Le produit tensoriel est exact sur la catégorie des faisceaux localement libres, donc munit $K_n(X)$ d'une structure d'anneau commutatif. Le produit tensoriel de relèvements (défini de manière évidente) munit de même $M_n(f)$ d'une structure d'anneau commutatif.

b) Pour tout morphisme $u : X \to Y$, l'image réciproque définit un morphisme d'anneaux $u^! : K_n(Y) \to K_n(X)$; pour tout diagramme commutatif $(*)$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & X \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

l'image réciproque de relèvements définit un morphisme d'anneaux : $u^! : M_n(g) \to M_n(f)$. Ces morphismes vérifient la propriété de transitivité évidente. On en déduit une structure d'anneau commutatif sur $K(X)$ et sur $M(f)$, et pour tout morphisme $u : X \to Y$ (resp. pour tout diagramme $(*)$) un morphisme d'anneaux $u^! : K(Y) \to K(X)$ (resp. $M(g) \to M(f)$) vérifiant la propriété de transitivité évidente.

Proposition III.5 :

a) Si F et G sont deux faisceaux cohérents sur X :

$$[F].[G] = \sum_i (-1)^i \, [\underline{Tor}_i^{O_X}(F,G)] \, .$$

Si $\varphi : f^*F \to F$ et $\psi : f^*G \to G$ sont deux relèvements de f :

$$[\varphi].[\psi] = \sum_i (-1)^i \, [\underline{Tor}_i(\varphi,\psi)]$$

où $\underline{Tor}_i(\varphi,\psi)$ est le relèvement :

$$f^*\underline{Tor}_i^{O_X}(F,G) \xrightarrow{\sim} \underline{Tor}_i^{O_X}(f^*F, f^*G) \xrightarrow{\varphi\otimes\psi} \underline{Tor}_i^{O_X}(F,G) \, .$$

b) Pour tout morphisme $u : X \to Y$ (resp. pour tout diagramme $(*)$) et tout faisceau cohérent H sur Y (resp. tout relèvement π de g) :

$$u^!([H]) = \sum_i (-1)^i \, [L^iu^*(H)]$$

$$u^!([\pi]) = \sum_i (-1)^i \, [L^iu^*(\pi)] \, .$$

Démontrons par exemple le premier point, la démonstration des autres étant pratiquement identique. D'après la démonstration de III.1, pour calculer $[F].[G]$ on choisit des résolutions finies $L.$ et $M.$ de F et G par des faisceaux localement libres ; alors :

$$[F].[G] = \Big(\sum_i (-1)^i [L_i]\Big).\Big(\sum_j (-1)^j [M_j]\Big) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} [L_i \otimes M_j]$$

d'où, en posant $N. = L.\otimes M.$:

$$[F].[G] = \sum_k (-1)^k \, [N_k] \, .$$

Comme $H_i(N.) = \underline{Tor}_i^{O_X}(F,G)$, le résultat découle du lemme suivant, dont la démonstration (immédiate) est laissée au lecteur :

Lemme III.6 :

Soit $N.$ un complexe borné dans une catégorie abélienne A ; on a l'égalité suivante dans $K(A)$: $\sum_i (-1)^i [N_i] = \sum_i (-1)^i [H_i(N.)]$.

Soit $j : Y \to X$ une immersion de variétés. Le foncteur j_* est exact, donc définit un morphisme de groupes de $K(Y)$ dans $K(X)$, noté encore j_* . De même, si on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"] & Y \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "g"] & X \end{tikzcd}$$

on définit un morphisme de groupes $j_* : M(f) \to M(g)$.

Proposition III.7 :

Sous les conditions précédentes, si $y \in K(Y)$, $x \in K(X)$ (resp. $y \in M(f)$, $x \in M(g)$) : $j_*(y.j^!x) = j_*y.x$ ("Formule de projection").

On peut supposer grâce à III.3 que $y = [F]$, $x = [G]$ (resp. $y = [\varphi]$, $x = [\psi]$, où $\varphi : f^*F \to F$, $\psi : g^*G \to G)$, avec F et G localement libres. La proposition résulte alors simplement de l'isomorphisme canonique :

$$F \otimes_{O_Y} j^*G \simeq F \otimes_{O_X} G \ .$$

Remarque :

On n'a développé ici que le strict minimum indispensable à la suite. On renvoie à [22] pour une étude beaucoup plus détaillée de l'anneau $K(X)$.

4. Etude de $M(X)$

Soit $\varphi : F \to F$ un relèvement localement libre de l'identité, c'est-à-dire un endomorphisme du faisceau localement libre F . L'équation caractéristique de φ (d'abord définie localement, cf. EGA II 6) a pour coefficients des fonctions

partout définies, donc constantes. Pour toute racine c de cette équation, on pose :

$$F_c = \bigcup_m \operatorname{Ker}(\varphi-c)^m \ .$$

Il est clair (la vérification étant locale) que $F = \bigoplus_c F_c$, $\varphi = \bigoplus_c \varphi_c$, où $\varphi_c : F_c \to F_c$ est tel que $(\varphi_c - c)$ est nilpotent.

Lemme III.8 :

Soit φ un endomorphisme de F tel que $\varphi-c$ soit nilpotent. Alors $[\varphi] = [c.1_F]$ dans $M(Y)$.

La démonstration se fait par récurrence sur le plus petit entier m tel que $(\varphi-c)^m = 0$. Pour $m=1$, le résultat est contenu dans l'hypothèse. Le passage de $m-1$ à m résulte du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(\varphi-c)^{m-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \arrow[d, shift left, "c"] & F \arrow[r, "(\varphi-c)^{m-1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \arrow[d, shift left, "c"] & F \arrow[r] \arrow[d, "c"] & \operatorname{Coker}(\varphi-c)^{m-1} \arrow[r] \arrow[d, "c"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(\varphi-c)^{m-1} \arrow[r] & F \arrow[r, "(\varphi-c)^{m-1}"] & F \arrow[r] & \operatorname{Coker}(\varphi-c)^{m-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

qui donne : $[\varphi]-[c.1_F] = [\varphi|\operatorname{Ker}(\varphi-c)^{m-1}]-[c.1_{\operatorname{Ker}(\varphi-c)^{m-1}}]$

d'où le résultat par l'hypothèse de récurrence.

Proposition III.9 :

Désignons par $\mathbb{Z}[k]$ l'algèbre du monoïde multiplicatif k (c'est-à-dire le groupe abélien libre de base k , la multiplication étant induite par celle de k). Il existe un isomorphisme fonctoriel d'anneaux : $r : M(X) \to K(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[k]$ (la fonctorialité est relative aux morphismes $u^!$ et j_* de III.5 et III.7).

Pour tout $\varphi : F \to F$ (F localement libre), posons, avec les notations précédentes : $r(\varphi) = \sum_c [F_c] \otimes [c]$. r est additif, donc définit, compte tenu de

III.3, un homomorphisme de $M(X)$ dans $K(X)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}[k]$. On vérifie immédiatement que c'est même un morphisme d'anneaux, et qu'il est fonctoriel. Définissons maintenant un morphisme $s : K(X)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Z}[k] \to M(X)$ en posant, pour F localement libre et $c \in k$, $s([F]\otimes[c]) = [c.1_F]$. Le lemme III.8 montre que $s\circ r$ est l'identité, et il est clair que $r\circ s$ est l'identité.

§IV. Rappels : classes de Chern

Pour toute variété X sur k on désigne par $\mathbf{A}(X) = \bigoplus \mathbf{A}^i(X)$ "l'anneau de Chow" de X ([21]), c'est-à-dire l'anneau des classes de cycles modulo l'équivalence rationnelle, gradué par la codimension. Rappelons les propriétés de cet anneau que nous utiliserons

- Pour tout morphisme $f : X \to Y$ l'image réciproque des cycles définit un morphisme d'anneaux gradués (de degré 0) : $f^* : \mathbf{A}(Y) \to \mathbf{A}(X)$.
- Pour toute immersion $j : Y \to X$ de codimension c, l'image directe de cycles définit un morphisme de groupes, de degré c : $j_* : \mathbf{A}(Y) \to \mathbf{A}(X)$.
- $\mathbf{A}^1(X)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Pic}(X)$ (l'équivalence rationnelle pour les diviseurs coïncide avec l'équivalence linéaire).
- On note $\int_X : \mathbf{A}(X) \to \mathbf{Z}$ la flèche égale à zéro en degré différent de $\dim(X)$ et au degré (= nombre de points d'un cycle 0-dimensionnel) sur $\mathbf{A}^{\dim(X)}(X)$.
- Soit $j : Y \to X$ une immersion, $x \in \mathbf{A}(X)$, $y \in \mathbf{A}(Y)$. Alors :

$$j_*(y.j^*x) = j_*y.x \qquad \int_Y y = \int_X j_*y .$$

On aura à considérer dans la suite l'anneau $\mathbf{A}(X)\otimes_{\mathbf{Z}} K$ (K un corps) ; les morphismes f^*, j_*, $\int_X$ s'étendent canoniquement ; ils seront notés de la même façon.

<u>Proposition</u> IV.1 :

On peut associer à tout faisceau localement libre de rang r F sur une variété X sur k un élément $c(F) = 1 + c_1(F) + \dots + c_r(F)$ $(c_i(F) \in \mathbf{A}^i(X)$, $c(F) \in \mathbf{A}(X))$ de façon que les propriétés suivantes soient vérifiées :

C1. Pour toute suite exacte de faisceaux localement libres :

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0 , \quad \text{on a :}$$

$c(F) = c(F').c(F'')$.

C2. Pour tout morphisme de variétés f : $c(f^*F) = f^*c(F)$.

C3. $c_1 : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbf{A}^1(X)$ est l'isomorphisme canonique.

Les $c_i(F)$ (resp. $c(F)$) s'appellent les classes de CHERN (resp. la classe totale de Chern) de F. Elles sont déterminées de manière unique par les conditions précédentes.

<u>Remarque</u> IV.2 :

1) La condition C1 signifie qu'on a un homomorphisme de groupes :

$$c : K_n(X) \to \{1 + \prod_{i \geq 1} \mathbf{A}^i(X)\}$$

où le groupe de droite est par définition le groupe multiplicatif des éléments $1 + \sum_{i\geq 1} x_i$ $(x_i \in \mathbf{A}^i(X))$. La condition C2 exprime que cet homomorphisme est fonctoriel. On peut donc grâce à III.3 définir les classes de Chern d'un faisceau cohérent quelconque ; elles vérifieront encore C1 à C3.

2) On a en fait un vaste choix pour l'anneau $\mathbf{A}(X)$. Citons en vrac : sur $\mathbf{C}$, l'anneau $\bigoplus H^{2i}(X,\mathbf{Z})$; sur un corps quelconque, la cohomologie ℓ-adique $\bigoplus H^{2i}(X,\mathbf{Z}_\ell(i))$, la cohomologie de Hodge $\bigoplus H^i(X,\Omega^i)$, la cohomologie de De Rham $\bigoplus H^{2i}_{DR}(X)$ (cf. [13]) ; le gradué associé $GK^\bullet(X)$ à $K(X)$ filtré par

la codimension du support, ou par la "γ-filtration" ([22]) ; la cohomologie cristalline... Il convient bien entendu de reformuler dans chaque cas la condition C3.

3) On utilise souvent la classe de Chern sous la forme $c_t(E) = 1 + t.c_1(E) + \ldots + t^r.c_r(E)$, où t est une indéterminée ("polynôme de Chern") ; bien entendu, la différence avec la classe totale $c(E)$ est uniquement psychologique.

<u>Démonstration de l'existence</u> :

Il en existe une dizaine... On renvoie à [12] pour une démonstration dans le cadre ci-dessus ; un résumé de quelques-unes des définitions possibles des c_i (sur $\mathbb{C}$, mais la plupart s'adaptent sur un corps quelconque) se trouve dans [5]

<u>Démonstration de l'unicité</u> :

Soit F un faisceau localement libre sur X. Considérons le fibré en drapeaux de F au-dessus de X : c'est la variété $D \xrightarrow{p} X$ au-dessus de X qui représente le foncteur :

$$\underline{\mathrm{Drap}}_F(T \xrightarrow{f} X) = \left\{ \begin{array}{l} \text{suites } 0 = M_o \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = f^*F \text{ telles que} \\ M_{i+1}/M_i \text{ soit inversible} \end{array} \right\}$$

(bien entendu il faut entendre à droite l'ensemble des classes de telles suites à isomorphisme près - voir EGA I 2e édition pour les détails).

En particulier, il existe sur X un "drapeau universel" :

$$0 = V_o \subset V_1 \subset \ldots \subset V_r = p^*F .$$

Pour toute "classe de Chern" vérifiant C1 à C3, on doit avoir :

$$p^*c(F) = c(p^*F) = \prod_{i=o}^{i=r-1} (1+c_1(V_{i+1}/V_i)) \quad \text{par C1 et C2}$$

donc par C3, l'image de la classe de Chern totale de F dans $A(D)$ est uniquement déterminée. On termine avec le :

<u>Lemme</u> IV.3 : $p^* : A(X) \to A(D)$ est injectif.

En effet, D se construit par extensions successives de fibrés projectifs, et le fait que $A(X) \to A(\mathbb{P}_X(E))$ soit injectif (pour E localement libre sur X) est bien connu ([21]).

<u>Remarque</u> IV.4 :

Cette technique de démonstration donne en outre un moyen de calcul très puissant sur les classes de Chern. Soit à calculer par exemple $c(E \otimes F)$, où E et F sont deux faisceaux localement libres sur X, de rang p et q respectivement. Quitte à calculer dans un anneau plus grand (à savoir l'anneau de Chow d'un certain fibré en drapeaux sur X) on peut supposer que E et F admettent des suites de composition à quotients inversibles. On aura donc dans $K(X)$:

$$[E] = [L_1] + \ldots + [L_p] \qquad [F] = [N_1] + \ldots + [N_q]$$

les L_i et les N_j étant inversibles. Alors $[E \otimes F] = \sum_{i,j} [L_i \otimes N_j]$, et

$$c(E \otimes F) = \prod_{i,j} (1+c_1(L_i)+c_1(N_j)) .$$

En pratique, on décomposera formellement le "polynôme de Chern" (IV.2.3) en écrivant :

$$c_t(E) = 1 + t.c_1(E) + \ldots + t^p.c_p(E) = \prod_{i=1}^{p} (1 + \gamma_i.t)$$

$$c_t(F) = 1 + t.c_1(F) + \ldots + t^q.c_q(F) = \prod_{j=1}^{q} (1 + \delta_j.t)$$

(les γ_i sont "moralement" les premières classes de Chern des L_i).

Alors $c_t(E\otimes F) = \prod_{i,j} (1 + (\gamma_i+\delta_j).t)$.

Les coefficients du polynôme de droite sont symétriques en les γ_i et en les δ_j , donc s'expriment par des <u>polynômes universels</u> (dépendant de p et q) en les $c_i(E)$ et les $c_j(F)$. Par exemple : $c_1(E\otimes F) = q.c_1(E) + p.c_2(F)$,
$c_2(E\otimes F) = q.c_{2(E)} + p.c_2(F) + \binom{q}{2}.c_1^2(E) + \binom{p}{2}.c_1^2(F) + (pq-1).c_1(E).c_1(F)$.

On trouve de même :

$$c_t(\Lambda^m E) = \prod_{i_1<\dots<i_m} (1 + (\gamma_{i_1} +\dots+ \gamma_{i_m}).t) .$$

On renvoie à ([22]) pour une exposition plus "fonctorielle" (et beaucoup plus complète).

<u>Opérations sur les classes de Chern</u>

On est amené à construire de nouveaux invariants, formellement à partir des classes de Chern. Si

$$c_t(E) = 1 + c_1(E).t +\dots+ c_p(E).t = \prod_{i=1}^{p} (1 + \gamma_i.t)$$

on pose :

$$ch(E) = \sum_{i=1}^{p} e^{\gamma_i}$$

$$Todd(E) = \prod_{i=1}^{p} \frac{\gamma_i}{1-e^{-\gamma_i}}$$

$ch(E)$ est le "caractère de Chern" de E , $Todd(E)$ la "classe de Todd" de E . Ce sont des éléments de l'anneau $\prod_{i\geq 0} A^i(X)\otimes_Z Q$, dont les composantes sont des polynômes symétriques en les γ_i , c'est-à-dire des polynômes en les classes de Chern de E . Par exemple :

$$ch(E) = p + c_1(E) + \tfrac{1}{2}(c_1^2(E) - 2c_2(E)) +\dots$$

$$Todd(E) = 1 + \tfrac{1}{2}c_1(E) + \tfrac{1}{12}(c_1^2(E) + c_2(E)) + \tfrac{1}{24}c_1(E).c_2(E)+\dots$$

Pour toute variété X , on pose : $Todd(X) = Todd(T_X)$ où $T_X = \overset{\vee}{\Omega}{}^1_X$ est le faisceau tangent de X .

<u>Proposition</u> IV.5 :

1) $ch : K_n(X) \to \prod_{i\geq 0} A^i(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ est un homomorphisme d'anneaux. Il définit donc d'après III.3 un homomorphisme d'anneaux, encore noté $ch : K(X) \to \prod_{i\geq 0} A^i(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$.
On a : $ch(f^! x) = f^* ch(x)$ pour tout $f : Y \to X$ et tout $x \in K(X)$.

2) Si F est extension de F'' par F' : $Todd(F) = Todd(F').Todd(F'')$.

Démonstration immédiate.

<u>Définition</u> IV.6 :

On appelle "Trace de Chern" et on désigne par ct l'homomorphisme d'anneaux :
$ct : M(X) \xrightarrow{(III.9)} K(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[k] \xrightarrow{ch\otimes w} \prod_{i\geq 0} A^i(X)\otimes_{\mathbb{Z}} FW(k)$ (où $FW(k)$ est le corps des fractions de $W(k)$).

On aura $ct(f^!\varphi) = f^* ct(\varphi)$ pour tout $f : Y \to X$ et tout $\varphi \in M(X)$. Si φ est l'endomorphisme identique d'un faisceau cohérent F , on trouve $ct(\varphi) = ch(F)$; si φ est un endomorphisme de O_X^m , $ct(\varphi) = BTr(\varphi)$. La trace de Chern généralise donc à la fois le caractère de Chern et la trace de Brauer.

<u>Théorème de Riemann-Roch</u> :

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch ([14]) :

<u>Théorème</u> II :

Pour tout faisceau cohérent F sur X :

$$\chi(F) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X,F) = \int_X Todd(X).ch(F) .$$

Ce théorème étant bien connu, nous n'en donnons pas d'exemples ou d'applications géométriques. Celles-ci sont très nombreuses ([14]).

Nous aurons besoin de la version suivante ([6]) :

Proposition IV.6 (théorème de Riemann-Roch-Grothendieck pour une immersion) :

Soit $j : Y \to X$ une immersion, F un faisceau cohérent sur Y.

Alors : $j_*(\mathrm{Todd}(Y).\mathrm{ch}(F)) = \mathrm{Todd}(X).\mathrm{ch}(j_*F)$.

Cette proposition s'étend facilement aux endomorphismes de faisceaux cohérents :

Proposition IV.7 :

Soit $j : Y \to X$ une immersion, φ un endomorphisme d'un faisceau cohérent F sur Y. Alors :

$$j_*(\mathrm{Todd}(Y).\mathrm{ct}(\varphi)) = \mathrm{Todd}(X).\mathrm{ct}(j_*\varphi) .$$

En effet par III.9 on peut supposer que $[\varphi] = [c.1_F]$ dans $M(Y)$. D'après IV.6 les deux termes sont alors égaux à l'élément $\mathrm{Todd}(X).\mathrm{ch}(j_*F).w(c)$ de $\prod_{i\geq 0} A^i(X)\otimes_{\mathbb{Z}} FW(k)$.

§V. Le théorème de Lefschetz-Riemann-Roch

On se place désormais dans la situation suivante : f est un endomorphisme de la variété X, F un O_X-Module cohérent, $\varphi : f^*F \to F$ un relèvement de f à F. On suppose que $f^r = \mathrm{Id}_X$, avec r premier à la caractéristique (cette hypothèse peut être élargie, cf. discussion en V.12).

Lemme V.1 :

Dans ces conditions, le sous-schéma X^f des points fixes de f est lisse sur k.

Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ un système régulier de paramètres au point $m \in X^f$. En faisant l'habituelle manipulation de moyenne sur les (x_i) (i.e. en extrayant des $y_i^\alpha = \sum_{q=0}^{q=r-1} \alpha^q (f^q)^* x_i$, avec $\alpha^r = 1$, un système régulier de paramètres), on peut supposer : $f^*x_i = \alpha_i x_i$, avec $\alpha_i^r = 1$. Par définition, l'idéal de X^f dans X est engendré en m par les $f^*x_i - x_i$, donc par les coordonnées x_i telles que $\alpha_i \neq 1$, d'où le résultat.

Remarque V.2 :

L'hypothèse r premier à la caractéristique est nécessaire, comme le montre l'exemple de l'automorphisme $z \mapsto z+1$ de P^1, qui admet un point fixe "double" à l'infini.

Soient Z une composante de X^f, J son idéal dans X, $j_Z : Z \to X$ l'immersion canonique : f^* induit un morphisme :

$$N_Z : \begin{cases} J/J^2 & \to \quad J/J^2 \\ \bar{x} & \mapsto \quad \overline{f^*x} \end{cases}$$

On note : $\lambda_{-1}N_Z = \sum_i (-1)^i [\Lambda^i N_Z] \in M(Z)$.

Lemme V.3 :

$\mathrm{ct}(\lambda_{-1}N_Z)$ est inversible dans $\prod_{i\geq 0} A^i(Z)\otimes_{\mathbb{Z}} FW(k)$.

Il suffit de vérifier que sa composante de degré 0 est inversible dans $A^0(X)\otimes_{\mathbb{Z}} FW(k) = FW(k)$; or on voit immédiatement que $\mathrm{ct}(\varphi)_0 = \mathrm{BTr}\varphi$ pour tout $\varphi \in M(Z)$, d'où $\mathrm{ct}(\lambda_{-1}N_Z)_0 = \prod_i (1 - w(\alpha_i))$, les α_i étant les valeurs propres de N_Z. Mais il résulte de la démonstration du lemme V.1 que celles-ci sont $\neq 1$, d'où le lemme.

Théorème III (théorème de Lefschetz-Riemann-Roch) :

Sous les conditions précédentes :

$$BL(f,\varphi,F) = \sum_Z \int_Z \mathrm{Todd}(Z).(ct(\lambda_{-1}N_Z))^{-1}.ct(j_Z^!\varphi)$$

(la somme étant prise sur l'ensemble des composantes connexes de X^f).

Corollaire 1 = Théorème Ibis :

Supposons Z réduit à un point x : alors $\mathrm{Todd}(Z) = 1$, N_Z s'identifie à $df(x)$ par l'isomorphisme canonique $J/J^2 \simeq \Omega^1(x)$; les traces de Chern se réduisent à des traces de Brauer, donc $ct(\lambda_{-1}N_Z) = \sum_i (-1)^i BTr\, \Lambda^i df(x)$ et $ct(j_Z^!\varphi) = BTr(\varphi)$: on obtient ainsi le théorème Ibis (et donc le théorème I, avec la restriction $f^r = Id_X$).

Corollaire 2 = Théorème II :

Si $f = Id_X$, $\varphi = 1_F$, on obtient $Z = X^f = X$, $N_Z = 0$ d'où $ct(\lambda_{-1}N_Z)=1$, $ct(1_F) = ch(F)$: on retrouve le théorème de Riemann-Roch.

Corollaire 3 : Cohomologie de Hodge

On prend $\varphi = \Lambda^p df$ et on fait comme en II.2 la somme alternée des égalités obtenues :

$$(*) \qquad \sum_{p,q} (-1)^{p+q} BTr\, f^*|H^q(X,\Omega^p) = \sum_Z \int_Z \mathrm{Todd}(Z).(ct(\lambda_{-1}N_Z))^{-1}.ct(\lambda_{-1}j_Z^! df)$$

avec $\lambda_{-1}j_Z^! df = \sum (-1)^i [\Lambda^i j_Z^! df] \in M(Z)$. On utilise le :

Lemme V.4 :

Posons pour tout relèvement φ (resp. tout faisceau F) localement libre sur X : $\lambda_{-1}\varphi = \sum_i (-1)^i [\Lambda^i\varphi]$ dans $M(f)$ (resp. $\lambda_{-1}F = \sum_i (-1)^i [\Lambda^i F]$ dans $K(X)$). Pour toute extension φ de φ'' par φ', on a : $\lambda_{-1}\varphi = \lambda_{-1}\varphi'.\lambda_{-1}\varphi''$ dans $M(f)$ (resp. pour toute extension F de F'' par F', $\lambda_{-1}F = \lambda_{-1}F'.\lambda_{-1}F''$ dans $K(X)$).

C'est une conséquence de la formule : $[\Lambda^r\varphi] = \sum_{p+q=r} [\Lambda^p\varphi'].[\Lambda^q\varphi'']$ (resp. ...), qui résulte elle-même des propriétés de la filtration de Koszul sur l'algèbre extérieure.

On applique le lemme à la suite exacte d'endomorphismes sur Z :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & J/J^2 & \to & j_Z^*\Omega_X^1 & \to & \Omega_Z^1 & \to & 0 \\ & & \downarrow N_Z & & \downarrow j_Z^* df & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \to & J/J^2 & \to & j_Z^*\Omega_X^1 & \to & \Omega_Z^1 & \to & 0 \end{array}$$

d'où $(ct(\lambda_{-1}N_Z))^{-1}.ct(\lambda_{-1}j_Z^! df) = ch(\lambda_{-1}\Omega_Z^1) = \sum_p (-1)^p ch(\Omega_Z^p)$.

Compte-tenu du théorème de Riemann-Roch, le deuxième membre de l'égalité $(*)$ est donc égal à $\sum_Z \sum_p (-1)^p \chi(\Omega_Z^p)$. On trouve donc :

$L_{DR}(f) \overset{\text{déf}}{=} \sum_r (-1)^r BTr\, f^*|H^r_{DR}(X) = \sum_{p,q} (-1)^{p+q} BTr\, f^*|H^q(X,\Omega^p) = \sum_Z \chi_{DR}(Z)$ avec $\chi_{DR}(Z) = \sum_p (-1)^p \chi(\Omega_Z^p)$. Si $k = \mathbb{C}$, on obtient ainsi un résultat qui s'exprime purement en termes de cohomologie complexe : le nombre de Lefschetz de f est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré de la variété des points fixes.

Corollaire 4 : formes automorphes (brèves indications)

Soient M un domaine borné symétrique dans $\mathbb{C}^N$, G un groupe proprement discontinu d'automorphismes de M, tel que le quotient $G\backslash M$ soit compact. C'est alors une variété algébrique ([19]), et les formes automorphes de poids r sur M par rapport à G sont précisément les éléments de $H^0(G\backslash M,\omega^{\otimes r})$, ω étant le faisceau des différentielles d'ordre maximum sur $G\backslash M$. On s'intéresse à la dimension de cet espace vectoriel.

– Si G opère librement sur M, le théorème de Riemann-Roch permet de calculer (grâce au "vanishing lemma") cette dimension : elle est égale au produit de $\chi_{\mathbb{C}}(G\backslash M)$ par un polynôme simple en r, qui dépend du "type" de l'espace hermitien symétrique M (cf. par exemple [15]).

– Dans le cas général, on démontre ([4]) qu'il existe toujours un sous-groupe H de G, distingué et d'indice fini dans G, qui opère librement sur M. Le groupe fini G/H opère sur la variété $H\backslash M$; le théorème de Lefschetz-Riemann-Roch appliqué aux éléments de G/H permet de calculer la dimension de $H^o(G\backslash M,\omega^{\otimes r})$. Ce calcul est dû à Hirzebruch ([16]) ; il redonne par voie géométrique les formules de Langlands.

<u>Démonstration du théorème</u> III :

Le principe de la démonstration consiste à se ramener au cas de l'espace projectif.

<u>Proposition</u> V.5 :

Le théorème III est vrai pour $X = \mathbb{P}^n_k$.

<u>Lemme</u> V.6 :

Soient u un automorphisme de $\mathbb{P}^n_k$, $\xi : u^*O_{\mathbb{P}}(1) \xrightarrow{\sim} O_{\mathbb{P}}(1)$ l'isomorphisme canonique. Le $\mathbb{Z}$-module $M(u)$ est engendré par les éléments de la forme $[c.\xi^d]$ $(d \in \mathbb{Z})$.

Soit $\varphi : u^*F \xrightarrow{\sim} F$ un relèvement de u.

Posons $S = k[T_o \dots T_n]$; soient M le S-module gradué associé à F (EGA II.2) $p : u^*M \to M$ le morphisme de S-modules gradués correspondant à φ (on note $u^*M = M \otimes_S S'$, où $S' = S$ considéré comme S-algèbre via u). Quitte à le modifier en bas degré, on peut supposer que M est un S-module gradué de type

fini. En répétant de proche en proche la construction de III.3 on obtient le diagramme de S-modules gradués suivant, où les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & u^*K \arrow[r, "u^*d_{n+1}"] \arrow[d] & u^*L_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots\cdots \arrow[r] & u^*L_o \arrow[r, "u^*d_o"] \arrow[d] & u^*M \arrow[r] \arrow[d, "p"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "d_{n+1}"] & L_n \arrow[r] & \cdots\cdots \arrow[r] & L_o \arrow[r, "d_o"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

les L_i étant des S-modules gradués libres de type fini. Comme S est régulier de dimension $n+1$, K est projectif de type fini en tant que S-module non gradué ; c'est donc un S-module gradué libre (Bourbaki, Algèbre ch.II §11 prop.7). En prenant les faisceaux associés, on en déduit que $[\varphi]$ est somme dans $M(u)$ de relèvements $\pi : u^*O_{\mathbb{P}}(d) \to O_{\mathbb{P}}(d)$ $(d \in \mathbb{Z})$. Comme $\mathrm{End}(O_{\mathbb{P}}(d)) = k$, on a $[\pi] = [c.\xi^d]$ dans $M(u)$, d'où le résultat.

<u>Exercice</u> : Montrer que $M(u)$ est un module libre sur l'anneau $\mathbb{Z}[k]$ (III.9) de base $1, \xi, \dots, \xi^n$. (Soient $(c_i)_{o\leqslant i\leqslant n}$ les valeurs propres de l'action de u sur $H^o(\mathbb{P}^n, O_{\mathbb{P}}(1))$; on voit facilement, par récurrence sur n, que $\prod_{i=o}^{n} (\xi - c_i) = 0$ dans $M(u)$; on prouve ensuite que $1, \xi, \dots, \xi^n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}[k]$ en copiant [22], VI.1.9).

<u>Démonstration de la proposition</u> V.5 :

On est ramené par le lemme au cas où $[\varphi] = [c.\psi^h]$, puis, comme c "sort" dans les deux expressions à comparer, au cas $\varphi = \psi^h$ $(h \in \mathbb{Z})$.

Soit R l'ensemble des racines $r^{\text{ièmes}}$ de l'unité (r est l'ordre de u). On choisit un système de coordonnées $(T_{\alpha,i})$ $(\alpha \in R,\ 0 \leqslant i \leqslant s_\alpha)$ tel que : $u^*T_{\alpha,i} = \alpha\, T_{\alpha,i}$ pour tout $\alpha \in R$, $0 \leqslant i \leqslant s_\alpha$. Les composantes du schéma des points fixes sont alors les hyperplans H_α définis par $T_{\beta,j} = 0$ pour $\beta \neq \alpha$. Pour alléger la notation, on écrira $w(\alpha) = \tilde{\alpha}$.

1) <u>Calcul de</u> $\sum_{\alpha} \int_{H_\alpha} \mathrm{Todd}(H_\alpha).(ct(\lambda_{-1}N_{H_\alpha}))^{-1}.ct(j_{H_\alpha}^{!}\varphi)$

On fixe α , et on pose $H_\alpha = H$, $s_\alpha = s$; H est un espace projectif de dimension s .

- La suite exacte bien connue :

$$0 \longrightarrow \Omega^1_H \longrightarrow O_H(-1)^{s+1} \longrightarrow O_H \longrightarrow 0$$

et la multiplicativité de Todd (IV.5) montrent que :

$$\mathrm{Todd}(H) = \mathrm{Todd}(\overset{\vee}{\Omega}{}^1_H) = (\mathrm{Todd}(O_H(1)))^{s+1}.\mathrm{Todd}(O_H) = \left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^{s+1}$$

où l'on a posé $x = cl[O_H(1)] \in \mathrm{Pic}(H) \simeq A^1(H)$.

- La suite exacte :

$$(O_{\mathbb{P}}(-1))^{n-s} \xrightarrow{T_{\beta,i}} O_{\mathbb{P}} \longrightarrow O_H \longrightarrow 0$$

donne par restriction à H un épimorphisme : $(O_H(-1))^{n-s} \to J/J^2$ (J = idéal de H dans $\mathbb{P}^n$) qui est un isomorphisme pour des raisons de dimension. Les $(n-s)$ facteurs $O_{\mathbb{P}}(-1)$ sont indexés par les couples (β,i) pour $\beta \in R$, $0 \leqslant i \leqslant s_\beta$; comme $u^*(T_{\beta,i}/T_{\alpha,j}) = \frac{\beta}{\alpha}.(T_{\beta,i}/T_{\alpha,j})$, l'action de u^* sur le facteur $O_H(-1)$ d'indice (β,i) est la multiplication par β/α. Autrement dit, dans $M(H) \simeq K(H)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[k]$:

$$N_H = \sum_{\substack{\beta\in R\\ \beta\neq\alpha}} [O_H(-1)] \otimes \left[\frac{\beta}{\alpha}\right]$$

<u>chaque racine étant prise avec sa multiplicité</u> $(s_\beta+1)$; d'où, compte-tenu de V.4 :

$$ct(\lambda_{-1}N_H) = \prod_{\substack{\beta\in R\\ \beta\neq\alpha}} \left(1 - \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.e^{-x}\right) .$$

- La restriction $\varphi/H : O_H(h) \to O_H(h)$ envoie $\prod T_{\alpha,i}^{q_i}$ $(\sum_i q_i = h)$ sur $\prod_i (\alpha T_{\alpha,i})^{q_i}$ donc n'est autre que la multiplication par α^h . Par suite : $ct(j_H^{!}\varphi) = \tilde{\alpha}^h.e^{hx}$.

- On obtient donc :

$$\mathrm{Todd}(H).(ct(\lambda_{-1}N_H))^{-1}.ct(j_H^{!}\varphi) = \left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)^{s+1}.\frac{\tilde{\alpha}^h.e^{hx}}{\prod\limits_{\substack{\beta\in R\\ \beta\neq\alpha}} \left(1-\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.e^{-x}\right)} .$$

C'est un élément de l'anneau $\prod\limits_{i\geqslant 0} A^i(X)\otimes_{\mathbb{Z}} FW(k)$; on s'intéresse au terme de degré s , c'est-à-dire au terme en x^s ; comme d'ailleurs $\int_H x^s = 1$, on cherche en fait le coefficient de x^s dans ce polynôme, ou encore le résidu à l'origine de ce polynôme divisé par x^{s+1} , soit :

$$\mathrm{Res}_{x=0}\left[\frac{\tilde{\alpha}^h e^{hx}\, dx}{(1-e^{-x})^{s+1}.\prod\limits_{\substack{\beta\in R\\ \beta\neq\alpha}}\left(1-\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.e^{-x}\right)}\right] = \mathrm{Res}_{x=0}\left[\frac{\tilde{\alpha}^h e^{hx}\, dx}{\prod\limits_{\beta\in R}\left(1-\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}.e^{-x}\right)}\right] = \mathrm{Res}_{v=\frac{1}{\alpha}}\left[\frac{-v^{-h-1}\, dv}{\prod\limits_{\beta\in R}(1-\beta v)}\right]$$

par le changement de variable : $e^{-x} = \tilde{\alpha}v$. On a à faire la somme de ces résidus pour toutes les valeurs de $\alpha \in R$, c'est-à-dire la somme des résidus en tous les pôles sauf deux (0 et ∞) d'une forme différentielle. On trouve donc par le théorème des résidus :

$$\sum_{\alpha\in R}\int_{H_\alpha} \mathrm{Todd}(H_\alpha).(ct(\lambda_{-1}N_{H_\alpha}))^{-1}.ct(j_{H_\alpha}^{!}\varphi) = \mathrm{Res}_{v=0} + \mathrm{Res}_{v=\infty}\left[\frac{v^{-h-1}\, dv}{\prod\limits_{\beta\in R}(1-\tilde{\beta}v)}\right] .$$

Le résidu en 0 est nul dès que $h < 0$, le résidu à l'infini dès que $h \geqslant -n$.

2) <u>Calcul de</u> $BL(u,\varphi,O_{\mathbb{P}}(h))$

Il est plus commode pour ce second calcul d'adopter une notation différente : on désignera par $(T_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ le système de coordonnées précédent ; on a $u^*T_i = \alpha_i T_i$ avec $\alpha_i \in R$, les α_i n'étant pas nécessairement distincts. Distinguons deux cas :

a) $h \geqslant 0$.

Seul le groupe de cohomologie $H^0(\mathbb{P}^n, O_{\mathbb{P}}(h))$ est non nul ; il admet pour base l'ensemble des sections $\prod\limits_{i=0}^{n} T_i^{k_i}$ pour $\sum\limits_{i=0}^{n} k_i = h$. L'endomorphisme $\tilde{\varphi}^0$ de

$H^o(\mathbb{P}^n, O_{\mathbb{P}}(h))$ induit par φ transforme $\prod_{i=o}^{n} T_i$ en $\prod_{i=o}^{n} (\alpha_i T_i)^{k_i}$, donc le multiplie par $\prod_{i=o}^{n} \alpha_i^{k_i}$. Par suite :

$$BL(u,\varphi,O_{\mathbb{P}}(h)) = BTr\ \tilde{\varphi}^o = \sum_{k_o+\dots+k_n=h} \tilde{\alpha}_o^{k_o}\dots\tilde{\alpha}_n^{k_n}$$

$$= \text{coefficient de } v^h \text{ dans } (\sum_i (\tilde{\alpha}_o v)^i)\dots(\sum_j (\tilde{\alpha}_n v)^j)$$

$$= \mathrm{Res}_{v=o}\left[\frac{v^{-h-1}\,dv}{\prod_{i=o}^{n}(1-\tilde{\alpha}_i v)}\right]$$

qui est bien égal à l'expression donnée plus haut.

b) $h < 0$.

Le seul groupe de cohomologie non nul est $H^n(\mathbb{P}^n, O_{\mathbb{P}}(h))$, qui s'identifie fonctoriellement au $n^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie du recouvrement de $\mathbb{P}^n$ défini par les coordonnées ; il est bien connu (EGA III.2) que celui-ci admet pour base l'ensemble des $T_o^{-k_o}\dots T_n^{-k_n}$, avec $k_i > 0$ et $\sum_i k_i = -h$. On trouve alors comme précédemment :

$$BL(u,\varphi,O_P(h)) = (-1)^n BTr\ \tilde{\varphi}^n = (-1)^n \sum_{\substack{k_o+\dots+k_n=-h\\ k_i>o}} \frac{1}{\tilde{\alpha}_o^{k_o}\dots\tilde{\alpha}_n^{k_n}}$$

$$= (-1)^n.\text{coeff. de } v^{-h} \text{ dans } (\sum_{i>o} (\frac{1}{\tilde{\alpha}_o v})^i)\dots(\sum_{j>o}(\frac{1}{\tilde{\alpha}_n v})^j)$$

$$= \mathrm{Res}_{v=\infty}\left[\frac{v^{-h-1}\,dv}{\prod_{i=o}^{n}(1-\tilde{\alpha}_i v)}\right].$$

On retrouve encore l'expression donnée par le premier calcul. Ceci achève la démonstration de la proposition V.5.

<u>Lemme</u> V.7 :

Soient X, f comme précédemment ($f^r = Id_X$, r premier à la caractéristique). Il existe un plongement i de X dans un espace projectif $\mathbb{P}^m$ et un endomorphisme u d'ordre r de $\mathbb{P}^m$ tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{P}^m \arrow[d, "u"] \\ X \arrow[r, "i"] & \mathbb{P}^m \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

D'après III.3 il existe un faisceau très ample L stable par f ; on choisit un isomorphisme $\varphi : f^*L \xrightarrow{\sim} L$, d'où un endomorphisme $\tilde{\varphi}^o$ de $H^o(X,L)$; on prend pour i le plongement $X \to P(H^o(X,L))$ défini par L, pour u l'endomorphisme associé à $\tilde{\varphi}^o$. On vérifie immédiatement que $uoi = iof$; comme $(\tilde{\varphi}^o)^r$ provient d'un endomorphisme de L, il est de la forme $c.1_{H^o(X,L)}$, donc $u^r = Id_{\mathbb{P}^m}$.

On suppose désormais choisis un plongement i et un automorphisme u comme dans le lemme. Pour toute composante Z de X^f, on désigne par Z' l'unique

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[rr, "i"] \arrow[dd, "f"] & & \mathbb{P} \arrow[dd, "u"] \\ X^f \arrow[ur, "j"] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{P}^u \arrow[ur, "k"] \arrow[dr] & \\ & X \arrow[rr, "i"] & & \mathbb{P} \end{tikzcd}$$

composante de $\mathbb{P}^u$ contenant Z, par i_Z l'immersion de Z dans Z'. On note j_Z l'immersion dans X d'une composante Z de X^f, k_W l'immersion dans $\mathbb{P}$ d'une composante W de P^u.

<u>Lemme</u> V.8 :

Pour toute composante Z de X^f, il existe un élément $\gamma_Z \in M(Z)$ tel que :

(i) $\lambda_{-1}N_Z.\gamma_Z = i_Z^!(\lambda_{-1}N_{Z'})$.

(ii) Pour toute composante W de P^u et tout $\varphi \in M(f)$:

$$k_W^!(i_*\varphi) = \sum_{Z\subset W} i_{Z}*(j_Z^!\varphi.\gamma_Z).$$

Montrons d'abord comment <u>le lemme entraîne le théorème</u> III :

$$\sum_Z \int_Z \mathrm{Todd}(Z).(ct(\lambda_{-1}N_Z))^{-1}.ct(j_Z^!\varphi)$$

$$= \sum_Z \int_Z \mathrm{Todd}(Z).(ct(i_Z^!\lambda_{-1}N_{Z'}))^{-1}.ct(j_Z^!\varphi.\gamma_Z) \qquad \text{par (i)}$$

$$= \sum_Z \int_{Z'} i_{Z*}[\mathrm{Todd}(Z).ct(j_Z^!\varphi.\gamma_Z)].(ct(\lambda_{-1}N_{Z'}))^{-1} \qquad \text{par } \int_Z = \int_{Z'} i_{Z*} \text{ et formule de projection}$$

$$= \sum_Z \int_{Z'} \mathrm{Todd}(Z').ct(i_{Z*}(j_Z^!\varphi.\gamma_Z)).(ct(\lambda_{-1}N_{Z'}))^{-1} \qquad \text{par IV.7}$$

$$= \sum_{W\in\pi_0(P^u)} \int_W \mathrm{Todd}(W).(ct(\lambda_{-1}N_W))^{-1}.ct(\sum_{Z\subset W} i_{Z*}(j_Z^!\varphi.\gamma_Z))$$

$$= \sum_W \int_W \mathrm{Todd}(W).(ct(\lambda_{-1}N_W))^{-1}.ct(k_W^!i_*\varphi) \qquad \text{par (ii)}$$

$$= BL(u, i_*\varphi, i_*F) \qquad \text{par V.5}$$

$= BL(f, \varphi, F)$ (car l'isomorphisme naturel $H^k(P,i_*F) \simeq H(X,F)$ identifie $\widetilde{i_*\varphi}^k$ à $\tilde{\varphi}^k$) , ce qui démontre le théorème III.

<u>Démonstration du lemme</u> V.8 :

La clé de la démonstration tient dans la proposition suivante :

<u>Proposition</u> V.9 :

Soit :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i'"] \arrow[d, "j"] & W \arrow[d, "k"] \\ X \arrow[r, hook, "i"] & P \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien d'immersions de schémas <u>lisses</u> sur k . On désigne par I , J , K les idéaux de i , j , k . Alors :

1) $\underline{\mathrm{Tor}}_1^{O_{\mathbb{P}}}(O_W,O_X)$ est fonctoriellement isomorphe à $I\cap K/_{I.K}$; c'est un O_Y-Module localement libre de rang : $\mathrm{codim}(W,P) - \mathrm{codim}(Y,X)$.

2) Pour tout $i \geqslant 0$, il existe un isomorphisme fonctoriel :

$$\underline{\mathrm{Tor}}_i^{O_{\mathbb{P}}}(O_W,O_X) \simeq \Lambda^i\underline{\mathrm{Tor}}_1^{O_{\mathbb{P}}}(O_W,O_X) .$$

3) On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow {}^{I\cap K}/_{I.K} \xrightarrow{a} i'^{*}{}^{K}/_{K^2} \xrightarrow{b} {}^{J}/_{J^2} \longrightarrow 0$$

où a est le morphisme naturel : ${}^{I\cap K}/_{I.K} \to {}^{K}/_{K.(I+K)} \simeq i'^{*}{}^{K}/_{K^2}$ (défini par les inclusions), et b l'homomorphisme canonique (EGA IV.16.2.1).

– La première partie de 1) résulte immédiatement de la suite exacte :

$$0 \to I \to O_{\mathbb{P}} \to O_X \to 0$$

qui donne par produit tensoriel avec O_W une suite exacte longue :

$$0 \to \underline{\mathrm{Tor}}_1^{O_{\mathbb{P}}}(O_W,O_X) \to {}^{I}/_{I.K} \to O_W \to O_Y \to 0 .$$

– La seconde partie de 1) et l'assertion 2) sont beaucoup plus délicates. Les résultats locaux s'obtiennent à l'aide des complexes de Koszul, la difficulté essentielle étant de globaliser les constructions locales. On renvoie à [22] VII.2.5 pour la démonstration, trop longue pour être reproduite ici ...

– La surjectivité de b est immédiate (cf. EGA IV.16.2.2), ainsi que la nullité de $b\circ a$. L'inclusion $\mathrm{Ker}(b) \subset \mathrm{Im}(a)$ se vérifie localement : comme tout est lisse, on peut supposer que Y est défini dans P par une suite régulière $f_1,\ldots,f_p$; $g_1,\ldots,g_q$; $h_1,\ldots,h_r$, de façon que X soit défini par $f_1,\ldots,f_p$; $g_1,\ldots,g_q$ et W par $f_1,\ldots,f_p$; $h_1,\ldots,h_r$. Alors ${}^{K}/_{K^2}$ admet comme base les classes de $f_1,\ldots,f_p$; $h_1,\ldots,h_r$, ${}^{J}/_{J^2}$ les classes de $i^*h_1,\ldots,i^*h_r$; donc $\mathrm{Ker}(b)$ est engendré par les classes de $i^*f_1,\ldots,i^*f_p$, qui sont dans $\mathrm{Im}(a)$. On termine en remarquant que ${}^{I\cap K}/_{I.K}$ est localement libre de rang égal au rang de $\mathrm{Ker}(a)$, d'après 1).

Retournant à la situation du lemme V.8 , soit W une composante de $\mathbb{P}^u$, $Y = W \cap X = \coprod_{Z \subset W} Z$ (de sorte qu'on retrouve le diagramme d'immersions de V.9). On déduit de V.9 3) la suite exacte de relèvements suivante (en conservant les notations de V.9) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & {}^{I\cap K}/_{I.K} & \to & i'^*{}^{K}/_{K^2} & \to & {}^{J}/_{J^2} & \to & 0 \\
 & & \downarrow \psi_W & & \downarrow i'^*N_W & & \downarrow \bigoplus_{Z \subset W} N_Z & & \\
0 & \to & {}^{I\cap K}/_{I.K} & \to & i'^*{}^{K}/_{K^2} & \to & {}^{J}/_{J^2} & \to & 0
\end{array}$$

où $\psi_W(\bar{\xi}) = \overline{u^*\xi}$ pour $\xi \in {}^{I\cap K}/_{I.K}$.

<u>Définition</u> V.10 :

Pour toute composante Z de X^f , on pose $\gamma_Z = (\lambda_{-1}\psi_{Z'})_{/Z}$.

La propriété (i) du lemme V.8 est alors une conséquence de V.4.

Pour démontrer (ii), on peut supposer le relèvement $\varphi : f^*F \to F$ localement libre. D'après III.5 on a dans $M(W)$: $k^!(i_*\varphi) = \sum_i (-1)^i [\underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, i_*\varphi)]$ où $\underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, i_*\varphi)$ est le relèvement de Id_W défini par :

$$\underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, i_*F) \xrightarrow{\sim} \underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, u^*i_*F) \xrightarrow{i_*\varphi} \underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, i_*F) .$$

<u>Lemme</u> V.11 :

Dans les conditions précédentes :

a) Il existe un isomorphisme fonctoriel en F :

$$\lambda : \underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, i_*F) \to \underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, O_X) \otimes_{O_Y} j^*F .$$

b) Désignons par $\bar{u}_i$ l'endomorphisme de $\underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, O_X)$ défini par l'action de u^* sur O_X . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, i_*F) & \xrightarrow{\underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, i_*\varphi)} & \underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, i_*F) \\
\downarrow \lambda & & \downarrow \lambda \\
\underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, O_X) \otimes_{O_Y} j^*F & \xrightarrow{\bar{u}_i \otimes j^*\varphi} & \underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, O_X) \otimes_{O_Y} j^*F
\end{array}$$

c) $\bar{u}_1$ s'identifie à ψ_W par l'isomorphisme V.9 1).

Pour a), on choisit une résolution plate $P.$ de O_W ; comme F est plat sur O_X , on trouve des isomorphismes :

$$\underline{H}_i(P. \otimes_{O_\mathbb{P}} F) \simeq \underline{H}_i(P. \otimes_{O_\mathbb{P}} O_X \otimes_{O_X} F) \simeq \underline{H}_i(P. \otimes_{O_\mathbb{P}} O_X) \otimes_{O_X} F \simeq \underline{H}_i(P. \otimes_{O_\mathbb{P}} O_X) \otimes_{O_Y} j^*F$$

qui définissent λ . On vérifie sans peine qu'il est indépendant du choix de la résolution.

Pour b), il suffit d'expliciter les définitions à l'aide de la résolution $P.$; on trouve un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
\underline{H}_i(P. \otimes_{O_\mathbb{P}} i_*F) & \xrightarrow{\sim} & \underline{H}_i(u^*P. \otimes_{O_\mathbb{P}} u^*i_*F) & \xrightarrow{i_*\varphi} & \underline{H}_i(u^*P. \otimes_{O_\mathbb{P}} i_*F) \\
\downarrow \lambda & & & & \downarrow \lambda \\
\underline{H}_i(P. \otimes_{O_\mathbb{P}} O_X) \otimes_{O_Y} j^*F & \xrightarrow{\sim} & \underline{H}_i(u^*P. \otimes_{O_\mathbb{P}} u^*O_X) \otimes_{O_Y} j^*F & \xrightarrow{u^* \otimes j^*\varphi} & \underline{H}_i(u^*P. \otimes_{O_\mathbb{P}} O_X) \otimes_{O_Y} j^*F
\end{array}$$

d'où le résultat, en utilisant le fait que $u^*P.$ est une résolution de O_W .

Enfin c) s'établit comme V.9 1), en tensorisant par O_W la suite exacte de relèvements de u :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & u^*I & \to & u^*O_\mathbb{P} & \to & u^*O_X & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & I & \to & O_\mathbb{P} & \to & O_X & \to & 0
\end{array}$$

On peut maintenant démontrer la partie (ii) du lemme V.8 :

$$\begin{aligned}
k_W^!(i_*\varphi) &= \sum_i (-1)^i \, [\underline{Tor}_i^{O_\mathbb{P}}(O_W, i_*\varphi)] && \text{par III.5} \\
&= \sum_i (-1)^i \, i_*^![\bar{u}_i \otimes j^*\varphi] && \text{par V.11 b)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_i (-1)^i \, i_*^!\left[\Lambda^i \psi_W \otimes j^* \varphi\right] \quad \text{par V.9 2) et V.11 c)}$$

$$= i_*^!(\lambda_{-1}\psi_W \cdot j^! \varphi) \, .$$

Mais pour tout faisceau cohérent H sur W, on a : $i_*^!(H) = \bigoplus_{Z \subset W} i_{Z*}(H_{|Z})$,

d'où : $\quad k_W^!(i*\varphi) = \sum_{Z \subset W} i_{Z*}(j_Z^! \varphi \cdot \gamma_Z)$

ce qui achève la démonstration du lemme V.8, et donc du théorème III.

<u>Remarque</u> V.12 :

Pour simplifier, on a énoncé et démontré le théorème III sous l'hypothèse assez restrictive $f^r = Id_X$. Cette hypothèse n'est pas indispensable. Le lecteur aura sûrement remarqué qu'elle n'a pas été utilisée dans la démonstration V.5 pour l'espace projectif : on s'est servi seulement de l'hypothèse u diagonalisable. Il suffisait donc, dans le lemme V.7, de trouver un automorphisme diagonalisable de $\mathbb{P}^m$ prolongeant f. Or on peut montrer qu'il existe un tel automorphisme si et seulement si f est un <u>point semi-simple</u> du groupe des automorphismes de X (i.e. f est point rationnel d'un sous-groupe de type multiplicatif de $\underline{\mathrm{Aut}}_k(X)$). Le théorème III est donc vrai pour ces automorphismes, pourvu que le sous-schéma des points fixes soit lisse, ce qui n'est plus vérifié a priori

Si on veut la formule de Lefschetz-Riemann-Roch sous la forme donnée dans le théorème III, il n'est guère possible d'aller plus loin ; il est facile en effet de construire des automorphismes vérifiant $f^p = Id_X$ en caractéristique p, qui la mettent en défaut (il faut qu'ils ne laissent aucun point fixe, seule possibilité pour que le schéma des points fixes soit lisse dans ce cas!). Par contre, si l'on s'intéresse seulement à la formule <u>modulo</u> p (en particulier, si $p=0$!), la formule est vraisemblablement valable pour un endomorphisme quelconque admettant un sous-schéma des points fixes lisse ; elle n'est démontrée actuellement que dans des cas particuliers. La méthode artificielle et trop "projective" utilisée ici est visiblement inadéquate dans ce cadre général.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ATIYAH et R. BOTT.- Notes on the Lesfschetz fixed point formula for elliptic complexes. Harvard University (1964).

[2] M. ATIYAH et R. BOTT.- On the woods hole fixed point théorem. Proceedings of the woods hole conference on algebraic geometry (1964).

[3] M. ATIYAH et G.B. SEGAL.- The index of elliptic operators II. Ann. of Math., Series 2, t.87, p. 531-545 (1968).

[4] A. BOREL.- Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces. Topology 2, p. 111-122 (1963).

[5] A. BOREL et F. HIRZEBRUCH.- Characteristic classes and homogeneous spacesI. Am. J. of Math. 81 p. 315-382 (1959).

[6] A. BOREL et J.P. SERRE.- Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck). Bull. S.M.F. 86 p. 97-136 (1958).

[7] N. BOURBAKI.- Groupes et algèbres de Lie. Ch.VI (Hermann)

[8] R.F. BROWN.- On the Lefschetz fixed point theorem. Am. J. of Math. 87 p. 1-10 (1965).

[9] M. DEMAZURE.- Une démonstration algébrique d'un théorème de Bott. Inventiones Math. 5 p. 349-356 (1968).

[10] P. DONOVAN.- The Lefschetz-Riemann-Roch formula.- Bull. S.M.F. 97 p. 257-273 (1969).

[11] A. GROTHENDIECK.- Théorème de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents. Sém. Bourbaki n°149 (1956-57).

[12] A. GROTHENDIECK.- La théorie des classes de Chern. Bull. S.M.F. 86 p. 137-154 (1958).

[13] A. GROTHENDIECK.- Classes de Chern et représentations des groupes discrets. Dans dix exposés sur la cohomologie des schémas. North Holl. Publ. co. (1968).

[14] F. HIRZEBRUCH.- Neue Topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie. Springer-Verlag (1956).

[15] F. HIRZEBRUCH.- Automorphe Formen und der Satz von Riemann-Roch. Sym. Intern. Top. Alg. Mexico (1956) p. 129-144.

[16] F. HIRZEBRUCH.- Elliptische differentialoperotoren auf Mannigfaltigkeiten. Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass. p. 583-608 (Köln, Westdeutscher Verlag (1966)).

[17] N. KATZ.- Une formule de congruence pour la fonction Zêta. SGA 7 Exposé 22.

[18] S. KLEIMAN.- Algebraic cycles and the Weil conjectures. Dans Dix exposés sur la cohomologie des schémas. North Holl. (1968).

[19] K. KODAIRA.- On Kähler varieties of restricted type. Ann. Math. 60 p. 28-48 (1954).

[20] Séminaire CHEVALLEY I.- Classification des groupes de Lie algébriques (1956-58).

[21] Séminaire CHEVALLEY II.- Anneau de Chow et applications (1958).

[22] SGA 6.- Théorie globale des intersections et théorème de Riemann-Roch, dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie.

[23] J.P. SERRE.- Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés. Publ. Math. I.H.E.S. 34 p. 37-52 (1968).

[24] J.L. VERDIER.- The Lefschetz fixed point formula in étale cohomology. Proceedings of a conference on local fields (Nuffic Summer School - Driebergen (1966)), Springer-Verlag.

-:-:-:-:-:-:-