Acta Math., 164 (1990), 211–235

Jacobiennes des courbes spectrales et systèmes hamiltoniens complètement intégrables

par

ARNAUD BEAUVILLE

Université Paris-Sud
Orsay, France

Introduction

Le point de départ de ce travail est une interprétation géométrique de la construction de Jacobi des jacobiennes hyperelliptiques, telle qu'elle est présentée dans [M2]. Mumford identifie un ouvert de la jacobienne de la courbe $y^2=F(x)$ à l'ensemble des triplets (U, V, W) de polynômes en x satisfaisant à certaines conditions de degré, ainsi qu'à l'équation $V^2+UW=F$. En remarquant que cette équation signifie que le polynôme caractéristique de la matrice

$$A(x)=\begin{pmatrix} V & U \\ W & -V \end{pmatrix}$$

est égal à $y^2-F(x)$, nous définissons cette correspondance de la manière suivante. Notons C la courbe $y^2=F(x)$ et $\pi\colon C\to\mathbf{P}^1$ le revêtement double $(x, y)\mapsto x$. La donnée d'un faisceau inversible sur C équivaut à celle de son image directe π_*L, munie d'une structure de $\pi_*\mathcal{O}_C$-module. Si L est assez général et de degré convenable, le fibré π_*L est trivial (de rang 2); on voit alors facilement qu'une structure de $\pi_*\mathcal{O}_C$-module sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}$ est définie par une matrice $A(x)$ du type précédent.

Un des avantages de cette présentation est qu'elle se généralise aussitôt à des courbes plus générales, les *courbes spectrales*: ce sont des revêtements $C_P\to\mathbf{P}^1$ de degré r, définis par une équation

$$P(y, x)=y^r+s_1(x)\,y^{r-1}+\ldots+s_r(x)=0,$$

où les s_i sont des polynômes en x, satisfaisant à $\deg s_i\leqslant id$ pour un entier d fixé. On montre comme ci-dessus qu'*un ouvert de la jacobienne de C_P* (plus précisément, le complémentaire du diviseur Θ) *s'identifie à la variété des matrices carrées d'ordre r*

dont les coefficients sont des polynômes de degré $\leq d$ en x et dont le polynôme caractéristique est égal à P, modulo conjugaison par les matrices constantes. Cette construction peut se faire en famille, au-dessus de l'espace $\mathscr{V}$ des polynômes $P(y, x)$ du type ci-dessus: soit Q la variété des matrices carrées d'ordre r dont les coefficients sont des polynômes de degré $\leq d$ en x, modulo conjugaison par les matrices constantes. En associant à une telle matrice son polynôme caractéristique, on définit une application H de Q dans $\mathscr{V}$; pour $P \in \mathscr{V}$, la fibre $H^{-1}(P)$ est un ouvert de la jacobienne de la courbe spectrale C_P. La fibration H décrit donc la famille universelle des jacobiennes de courbes spectrales.

Dans chaque fibre de H, l'espace des champs de vecteurs invariants par translation est de dimension g. Nous montrons au § 3 qu'il existe g champs de vecteurs sur Q, qui sont tangents aux fibres de H et dont la restriction à chacune de ces fibres engendre l'espace en question. L'expression de ces champs est remarquablement simple: les flots correspondants admettent la *représentation de Lax*

$$\frac{d}{dt}A(x) = \left[A(x), \frac{A^p(a)}{x-a}\right]$$

pour $p \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{C}$ fixés. Ces flots commutent, admettent les composantes $H_1, \ldots, H_N$ de H comme intégrales premières, et se linéarisent sur les fibres de H. On a donc une situation très proche de celle d'un système hamiltonien complètement intégrable; de fait, en choisissant des points $a_1, \ldots, a_{d+2}$ de $\mathbf{P}^1$, on définit au § 5 une *structure de Poisson* sur Q pour laquelle les flots (0.2) sont les flots hamiltoniens associés aux fonctions H_i. Cette structure ne peut être symplectique, car le nombre N des intégrales premières est plus grand que la dimension g des fibres de H. Pour obtenir des systèmes hamiltoniens complètement intégrables au sens usuel, il faut fibrer la situation au-dessus de $\mathbf{C}^{N-g}$. En associant à un polynôme $P(y, x)$ ses valeurs $P(y, a_1), \ldots, P(y, a_{d+2})$, on définit une application linéaire p de $\mathscr{V}$ sur un espace vectoriel $\mathscr{U}$. On considère alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathscr{V} \arrow[dl, "p"] \\ & \mathscr{U} & \end{tikzcd}$$

que l'on voit comme une *famille analytique de fibrations* paramétrée par les points de $\mathscr{U}$: pour $\mathbf{P} \in \mathscr{U}$, la fibration H induit une fibration $H_{\mathbf{P}}: Q_{\mathbf{P}} \to \mathscr{V}_{\mathbf{P}}$, avec $Q_{\mathbf{P}} = q^{-1}(\mathbf{P})$ et $\mathscr{V}_{\mathbf{P}} = p^{-1}(\mathbf{P})$. Alors pour chaque $\mathbf{P} \in \mathscr{U}$, la structure de Poisson de Q induit sur $Q_{\mathbf{P}}$ une structure symplectique, et *la fibration $H_{\mathbf{P}}$ définit un système hamiltonien complètement intégrable sur $Q_{\mathbf{P}}$*. Les fibres de $H_{\mathbf{P}}$ sont encore des ouverts des jacobiennes des courbes spectrales C_P (pour $P \in \mathcal{V}_{\mathbf{P}}$), et les flots hamiltoniens se linéarisent sur ces fibres.

On peut donner des systèmes hamiltoniens complètement intégrables $H_{\mathbf{P}}$ une description simple, indépendante de ce qui précède. On considère des classes de conjugaison $C_1, \ldots, C_{d+2}$ dans $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$, de dimension maximale. Ces variétés sont munies d'une structure symplectique canonique (de Kostant–Kirillov); la variété $Q_{\mathbf{P}}$ est le *quotient symplectique* par $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ du produit des C_i. Les hamiltoniens en involution sur ce quotient s'obtiennent en associant à une famille $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant d+2}$ les coefficients du polynôme $\det(yI_r - \Sigma\, A_i P_i(x))$, avec $P_i(x) = \Pi_{j \neq i}(x - a_j)$.

Au § 6, nous explicitons quelques-uns des systèmes hamiltoniens complètement intégrables obtenus dans le cas $r=2$ (qui correspond aux courbes hyperelliptiques). Nous retrouvons en particulier le système de Neumann (étudié dans [M2]) ainsi que quelques variantes (équations d'Arnold–Euler, mouvement d'un point sur un ellipsoïde avec force centrale).

Le lecteur averti aura noté la similitude de ce qui précède avec une partie des résultats de [A–vM]. Cette ressemblance apparente cache cependant des différences importantes. Ainsi, tout comme dans [A–vM], nous linéarisons le système de Neumann sur la sphère S^{d-1} sur les jacobiennes des courbes spectrales $\det(yI - A(x)) = 0$; mais dans [A–vM] $A(x)$ est une matrice d'ordre d très particulière, polynomiale de degré 2 en x^{-1}, alors qu'ici $A(x)$ est une matrice (2,2) *générale* à coefficients polynomiaux de degré $\leqslant d$ en x. Je ne comprends pas pour l'instant la relation entre ces deux approches.

Signalons que les constructions de cet article s'étendent lorsqu'on remplace l'algèbre de Lie $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$ par une sous-algèbre de Lie réductive. Nous reviendrons sur cette question dans un article ultérieur.

1. La jacobienne d'une courbe spectrale

(1.1) Nous identifierons dans cet article la droite projective complexe $\mathbf{P}^1$ à la sphère de Riemann, ce qui fournit une coordonnée affine x sur $\mathbf{P}^1$. Fixons des entiers $r \geqslant 1$, $d \geqslant 0$. Soient $s_1, \ldots, s_d$ des polynômes en x, avec $\deg(s_i) \leqslant id$, et soit P le polynôme $y^r + s_1(x)y^{r-1} + \ldots + s_r(x)$. L'équation $P=0$ définit un revêtement de degré r (ramifié) $\pi_P \colon C_P \to \mathbf{P}^1$.

On dit parfois que C_P est la *courbe spectrale* associée à P, pour la raison suivante.

Notons S_d l'espace des polynômes en une variable x de degré $\leq d$, à coefficients complexes, et $\mathbf{M}_r(S_d)$ l'espace des matrices carrées d'ordre r à coefficients dans S_d. Pour toute matrice $A(x)$ de $\mathbf{M}_r(S_d)$, le polynôme caractéristique $\det(yI_r - A(x))$ de $A(x)$ est du type précédent, et nous verrons ci-dessous qu'on obtient ainsi tous les polynômes de ce type.

(1.2) Nous fixons désormais le polynôme P; nous écrirons simplement π et C au lieu de π_P et C_P. En termes de géométrie algébrique, le revêtement π est défini par le faisceau d'algèbres $\pi_* \mathcal{O}_C$. Celui-ci est égal au quotient de l'algèbre symétrique $\mathbf{S}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-d))$ par l'idéal $\mathcal{I}$ défini comme suit: pour $0 \leq i \leq r$, le polynôme s_i définit un homomorphisme $\bar{s}_i \colon \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-rd) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-(r-i)d)$ (on pose $s_0 = 1$); $\mathcal{I}$ est l'idéal engendré par l'image de l'homomorphisme $\oplus \bar{s}_i \colon \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-rd) \to \mathbf{S}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-d))$. Au-dessus de la droite affine, $\mathbf{S}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-d))$ est le faisceau d'algèbres associé à la $\mathbf{C}[x]$-algèbre $\mathbf{C}[y, x]$, et $\mathcal{I}$ correspond à l'idéal engendré par P. En tant que $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module, on a

$$\pi_* \mathcal{O}_C = \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-d) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-(r-1)d).$$

On en déduit que le genre g de C est

$$g = \dim H^1(C, \mathcal{O}_C) = \dim H^1(\mathbf{P}^1, \pi_* \mathcal{O}_C) = \sum_{i=0}^{r-1} \dim H^1(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-id))$$
$$= \frac{1}{2}(r-1)(dr-2).$$

(1.3) Nous supposerons dans la suite que la courbe C est *lisse*. Nous noterons comme d'habitude $J^{g-1}(C)$ la variété (isomorphe à la jacobienne de C) qui paramètre les classes d'isomorphisme de fibrés en droites de degré $g-1$ sur C, et Θ le diviseur thêta canonique de $J^{g-1}(C)$ (formé des classes de fibrés admettant des sections globales non nulles). Nous allons donner une description explicite de l'ouvert affine $J^{g-1}(C) - \Theta$.

(1.4) THÉORÈME. *Soit M_P la variété des matrices carrées d'ordre r dont les coefficients sont des polynômes de degré $\leq d$ en x, et dont le polynôme caractéristique est égal à P. Le groupe* $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ *opère librement et proprement sur M_P par conjugaison, et la variété affine $J^{g-1}(C) - \Theta$ s'identifie au quotient de M_P par cette action.*

Les fibrés en droites sur C se décrivent comme dans [BNR]: la donnée d'un tel fibré L sur C équivaut à celle du fibré $E = \pi_* L$ de rang r sur $\mathbf{P}^1$, muni d'une structure de $\pi_* \mathcal{O}_C$-module, c'est-à-dire d'un homomorphisme d'algèbres $U \colon \pi_* \mathcal{O}_C \to \mathcal{E}nd(E)$. Vu l'isomorphisme $\pi_* \mathcal{O}_C \cong \mathbf{S}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-d))/\mathcal{I}$, la donnée de U revient à celle d'une application $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-

linéaire $u: E \to E(d)$ satisfaisant à $P(u)=0$. Comme P est irréductible sur $\mathbf{C}(x)$, cette dernière condition signifie en vertu du théorème de Cayley–Hamilton que le polynôme caractéristique de u est P (loc. cit.).

Supposons maintenant que L appartienne à $J^{g-1}(C)-\Theta$. La cohomologie de L est alors nulle, donc aussi celle de $\pi_* L$, ce qui impose que $\pi_* L$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)^r$. Choisissons un isomorphisme $v: \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)^r \to \pi_* L$. La donnée de u revient à celle de $v^{-1}uv: \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)^r \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(d-1)^r$, c'est-à-dire d'une matrice $A(x)$ appartenant à M_P. En résumé, on a construit une correspondance bijective

$$\{L \in J^{g-1}(C) - \Theta + \text{isomorphisme } v: \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)^r \to \pi_* L\} \quad \leftrightarrow \quad \{A(x) \in M_P\}.$$

Tout isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)^r$ sur $\pi_* L$ s'obtient en composant v avec un automorphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)^r$, c'est-à-dire un élément g de $\mathbf{GL}_r(\mathbf{C})$, et la matrice correspondante de M_P est $g^{-1}A(x)g$. On en déduit une bijection de $J^{g-1}(C)-\Theta$ sur le quotient $M_P/\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$. Plus précisément, on déduit de ce qui précède un morphisme $M_P \to J^{g-1}(C)-\Theta$, dont les fibres sont les orbites de $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ dans M_P. D'autre part, le stabilisateur d'une matrice quelconque $A(x)$ de M_P est réduit à l'élément neutre: en effet, si une matrice non scalaire $B \in \mathbf{M}_r(\mathbf{C})$ commute à $A(x)$, ses sous-espaces propres sont invariants par $A(x)$, ce qui contredit l'irréductibilité du polynôme caractéristique de $A(x)$. On déduit alors des résultats généraux de [M1] sur les variétés quotient que M_P est un fibré principal de groupe $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ au-dessus de $J^{g-1}(C)-\Theta$. □

(1.5) *Exemple*. Considérons le cas $r=2$. La courbe C est alors hyperelliptique; on peut choisir le polynôme P qui la définit de la forme $y^2-F(x)$, où F est un polynôme en x de degré $\leqslant 2d$. Les matrices $A(x)$ de M_P s'écrivent alors

$$A(x) = \begin{pmatrix} V & U \\ W & -V \end{pmatrix},$$

où U, V, W sont des polynômes en x de degré $\leqslant d$, satisfaisant à $V^2+UW=F$.

C'est essentiellement la forme obtenue par Mumford dans [M2], à ceci près que Mumford normalise l'écriture de $A(x)$ pour éliminer le passage au quotient, de la manière suivante. Il suppose que le point à l'infini de $\mathbf{P}^1$ est un point de ramification de π, de sorte que F est un polynôme de degré $2d-1$, que l'on peut prendre unitaire. Il est alors facile de voir qu'il existe dans chaque orbite de $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{C})$ une unique matrice $A(x)$ telle que W soit unitaire de degré d, U unitaire de degré $d-1$, et V de degré $\leqslant d-2$. La variété $J^{g-1}(C)-\Theta$ peut donc se représenter comme l'ensemble des triplets de polynômes (U, V, W) satisfaisant les conditions de degré ci-dessus ainsi que l'égalité $V^2+UW=F$.

Cette normalisation a l'avantage d'éviter le passage au quotient, mais le gros inconvénient de briser la symétrie de la situation: elle ne fait souvent que compliquer les formules (comparer les formules de [M2] pour les champs de vecteurs sur $J(C_P)$ aux énoncés (2.2) et (3.6) ci-dessous). Par ailleurs il semble peu probable qu'une normalisation analogue existe pour des valeurs plus grandes de r.

(1.6) *Exemple*. Considérons le cas $d=1$. La courbe C est alors une courbe plane (lisse) de degré r, le morphisme $\pi: C\to\mathbf{P}^1$ étant défini par la projection depuis un point de $\mathbf{P}^2-C$; toute courbe plane lisse peut être définie de cette manière. Ecrivons les matrices de M_P sous la forme $A(x)=Ax+B$, et introduisons des coordonnées homogènes (X, Y, T) telles que $x=X/T$ et $y=Y/T$; notons $P(X, Y, T)=0$ l'équation (homogène) de la courbe plane C. Le théorème (1.4) fournit alors un *isomorphisme canonique de* $J^{g-1}(C)-\Theta$ *sur la variété des classes de conjugaison de couples de matrices* (A, B) *telles que* $\det(XA+TB-YI_r)=P(X, Y, T)$. Ce résultat est essentiellement dû à Maruyama [Ma].

(1.7) *Remarque*. Explicitons la matrice $A(x)$ associée à un fibré en droites L de $J^{g-1}(C)-\Theta$ et à un isomorphisme $v: \mathcal{O}_\mathbf{P}(-1)^r\to\pi_*L$. Posons $M=L(1):=L\otimes\pi^*\mathcal{O}_\mathbf{P}(1)$. La donnée de v équivaut à celle d'une base $\mathcal{B}$ de $H^0(C, M)$; par construction, $A(x)$ est la matrice de la multiplication par y dans cette base. Plus précisément, y définit une section de $\pi^*\mathcal{O}_\mathbf{P}(d)$, qui induit un homomorphisme de $H^0(C, M)$ dans $H^0(C, M(d))$; d'autre part l'application naturelle de $H^0(C, M)\otimes S_d$ dans $H^0(C, M(d))$ est un *isomorphisme*: en effet elle est induite sur les espaces de sections globales par l'isomorphisme canonique de $H^0(\mathbf{P}^1, \pi_*M)\otimes_\mathbf{C}\mathcal{O}_\mathbf{P}(d)$ sur $\pi_*(M(d))$ (« formule de projection »). La multiplication par y définit donc un homomorphisme $m_y: H^0(C, M)\to H^0(C, M)\otimes S_d$, dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $A(x)$.

Remarques. Les remarques de la fin de ce paragraphe s'adressent aux lecteurs familiers avec la géométrie algébrique; elles peuvent être sautées sans inconvénient par les autres.

(1.8) La méthode de (1.4) s'applique à tous les fibrés en droites sur C, mais le résultat est moins élégant. Pour $d_1, \dots, d_r\in\mathbf{Z}$, notons $J(d_1, \dots, d_r)$ la variété des fibrés en droites L sur C tels que π_*L soit isomorphe à $\mathcal{O}_\mathbf{P}(d_1)\oplus\dots\oplus\mathcal{O}_\mathbf{P}(d_r)$. C'est une sous-variété localement fermée de $J^\delta(C)$, avec $\delta=g-1+r+\Sigma\, d_i$. Notons $M_P(d_1, \dots, d_r)$ la variété des matrices $A(x) \in \mathbf{M}_r(\mathbf{C}[x])$, satisfaisant à $\deg A_{ij}(x) \leq d+d_i-d_j$ et dont le polynôme caractéristique est égal à P. Soit L un élément de $J(d_1, \ldots, d_r)$; en choisissant un isomorphisme $\oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(d_i) \to \pi_* L$, on associe à L comme ci-dessus un élément de $M_P(d_1, \ldots, d_r)$; on identifie ainsi la variété $J(d_1, \ldots, d_r)$ au quotient de $M_P(d_1, \ldots, d_r)$ par le groupe $\mathrm{Aut}(\oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(d_i))$.

Les degrés d_i qui apparaissent dans la décomposition $\pi_* L \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(d_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(d_r)$ sont déterminés par la dimension des espaces $H^0(C, L(s))$ pour $s \in \mathbf{Z}$ (on note comme d'habitude $\mathcal{O}_C(s) = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(s)$ et $L(s) = L \otimes \mathcal{O}_C(s)$). Par exemple, la partie lisse du diviseur Θ est formée des L tels que $\pi_* L \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)^{r-2}$.

(1.9) Considérons plus particulièrement le cas des fibrés de degré 0. D'après (1.2), on a $g-1 = r[\frac{1}{2}d(r-1)-1]$. Si r est impair ou d pair, on a donc $g-1=rs$, avec $s \in \mathbf{N}$; l'application $L \mapsto L(s)$ définit alors un isomorphisme canonique de la jacobienne $J^0(C)$ sur $J^{g-1}(C)$, de sorte qu'on peut appliquer la proposition 1 à $J^0(C)$.

Dans le cas où r est pair et d impair, on a $g-1 = r(s-\frac{1}{2})$, avec $s \in \mathbf{N}$; on vérifie qu'un fibré assez général dans $J^0(C)$ a comme image directe $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-s)^{r/2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-s-1)^{r/2}$. Il faut alors utiliser la remarque précédente pour obtenir une description explicite d'un ouvert de $J^0(C)$.

(1.10) La démonstration du théorème (1.4) s'étend sans grande modification au cas où la courbe C_P est seulement supposée *intègre* (c'est-à-dire irréductible et réduite). On prend alors pour $J^{g-1}(C)$ la variété (compacte, singulière) qui paramètre les faisceaux sans torsion de rang 1 et de degré $g-1$ sur C, et pour Θ le diviseur des faisceaux admettant une section non nulle.

(1.11) Dans le cas général, la situation est plus compliquée; on ne va considérer ici que les faisceaux inversibles sur C. Rappelons auparavant un résultat élémentaire d'algèbre linéaire. Si $B \in \mathbf{M}_r(\mathbf{C})$, les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) Le commutant de B dans $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$ est de dimension r.

(ii) La classe de conjugaison de B dans $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$ est de dimension maximale (à savoir r^2-r).

(iii) Tous les sous-espaces propres de B sont de dimension 1.

(iv) Le polynôme minimal de B est égal à son polynôme caractéristique.

(v) Il existe un vecteur $v \in \mathbf{C}^r$ tel que $v, Av, A^2v, \ldots$ engendrent $\mathbf{C}^r$.

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que la matrice B est *régulière*. Dans l'ensemble des matrices de polynôme caractéristique donné, les matrices régulières forment une seule orbite (ouverte et dense).

(1.12) Sans hypothèse sur la courbe C, la correspondance du théorème (1.4) est toujours définie dans un sens: à une matrice $A(x)$ de polynôme caractéristique P on associe une structure de $\pi_* \mathcal{O}_C$-module sur $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)^r$, donc un faisceau L sur C. Cherchons à quelle condition ce faisceau est inversible. Soient a un point de $\mathbf{C}$, et R l'anneau local de $\mathbf{P}^1$ en a. La R-algèbre $(\pi_* \mathcal{O}_C)_a$ s'identifie à $R[y]/P(y,a)$, et le $(\pi_* \mathcal{O}_C)_a$-module $(\pi_* L)_a$ à R^r, la multiplication par y étant donnée par la matrice $A(x)$. Dire que ce module est libre de rang 1 signifie qu'il existe un vecteur V de R^r tel que $V, A(x)V, A(x)^2V, \ldots$ engendrent R^r; d'après le lemme de Nakayama, cela signifie aussi qu'il existe un vecteur v de $\mathbf{C}^r$ tel que $v, A(a)v, A(a)^2v, \ldots$ engendrent $\mathbf{C}^r$. Ainsi L est inversible au voisinage de $\pi^{-1}(a)$ si et seulement si la matrice $A(a)$ est *régulière* (1.11); L est inversible sur C si et seulement si la matrice $A(a)$ est régulière pour tout $a \in \mathbf{P}^1$ (on convient de noter $A(\infty)$ le coefficient de x^d dans le polynôme matriciel $A(x)$). En particulier, si C est lisse, *la matrice $A(a)$ est régulière pour tout $a \in \mathbf{P}^1$.*

(1.13) Inversement, soit L un faisceau inversible sur C, tel que $H^0(C,L)=H^1(C,L)=0$. On voit alors comme en (1.4) que $\pi_* L$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)^r$; choisissant un isomorphisme $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)^r \to \pi_* L$, on obtient une matrice $A(x)$ satisfaisant à $P(A(x),x)=0$. L'argument précédent montre que pour tout $a \in \mathbf{C}$ la matrice $A(a)$ est régulière, donc que son polynôme caractéristique est $P(y,a)$ (1.11); cela entraîne que le polynôme caractéristique de $A(x)$ est $P(y,x)$. En résumé, désignons par $(M_P)_{\mathrm{reg}}$ la variété des matrices $A(x) \in \mathbf{M}_r(S_d)$ de polynôme caractéristique P, telles que $A(a)$ soit régulière pour tout $a \in \mathbf{P}^1$; on voit comme en (1.4) que *le groupe* $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ *opère librement et proprement sur* $(M_P)_{\mathrm{reg}}$, et que *le quotient s'identifie à la sous-variété ouverte de la variété de Picard de C formée des fibrés en droites L sur C tels que $H^0(C,L)=H^1(C,L)=0$.*

La plupart des énoncés de cet article s'étendent à cette situation (ou à celle de (1.10)). Nous laissons au lecteur le soin d'adapter les démonstrations qui suivent à ce cadre plus général.

2. Champs de vecteurs sur M_P

Nous supposons toujours la courbe C lisse.

(2.1) Le tore complexe $J^{g-1}(C)$ admet g champs de vecteurs holomorphes linéairement indépendants; nous allons maintenant décrire ces champs en termes de champs de vecteurs sur M_P, invariants sous l'action de $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$. L'espace des champs de vecteurs sur $J^{\cdot}(C)$ s'identifie canoniquement à $H^0(C,K_C)^*$, ou encore à $H^1(C,\mathcal{O}_C)$. Soient p un point de C, et v un vecteur non nul de $T_p(C)$. On note $X_{p,v}$ le champ de vecteurs sur

$J'(C)$ défini par la forme linéaire $\omega \mapsto \langle \omega(p), v \rangle$ sur $H^0(C, K_C)$; il ne dépend de v qu'à un scalaire près. L'élément correspondant de $H^1(C, \mathcal{O}_C)$ est l'image de v par l'homomorphisme de cobord associé à la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C(p) \to T_p(C) \to 0.$$

Soit a l'image de p dans $\mathbf{P}^1$. Nous supposerons pour simplifier que a est fini, et que p n'est pas un point de ramification de π. La fonction $x-a$ définit alors un paramètre local sur C au voisinage de p; nous normaliserons v en imposant $\langle v, dx \rangle = 1$. Nous noterons simplement X_p le champ de vecteurs $X_{p,v}$ sur $J'(C)$.

Soient $A(x)$ une matrice de M_P, et L l'élément correspondant de $J^{g-1}(C)-\Theta$. Comme π est étale en p, le sous-espace propre de $A(a)$ correspondant à la valeur propre $y(p)$ est de dimension 1. Notons Π_p le projecteur spectral correspondant.

(2.2) THÉORÈME. *Le vecteur*

$$\frac{1}{x-a}[\Pi_p, A(x)]$$

de $\mathbf{M}_r(S_d)$ *est tangent à* M_P *en* $A(x)$. *Son image dans* $T_L(J^{g-1}(C))$ *est égale à* $X_p(L)$.

(Il faut observer que les matrices $A(a)$ et Π_p commutent, de sorte que le polynôme matriciel $[\Pi_p, A(x)]$ est divisible par $x-a$.)

Posons $M = L(1)$, et observons que l'isomorphisme $N \mapsto N(1)$ de $J^{g-1}(C)$ sur $J^{g+r-1}(C)$ transporte $X_p(L)$ sur $X_p(M)$. Notons C_ε la courbe C munie du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_C[\varepsilon]$ ($\varepsilon^2=0$). Le vecteur $X_p(M)$ correspond à un faisceau inversible M_ε sur C_ε, dont la réduction (mod ε) est égale à M. On peut expliciter M_ε de la manière suivante (cf. par exemple [K]). Les sections de M_ε au-dessus d'un ouvert U de C s'écrivent sous la forme $s+\varepsilon t$, où s appartient à $H^0(U, M)$, t à $H^0(U, M(p))$, et où la section $s/(x-a)+t$ est holomorphe en p. On a une suite exacte

$$0 \to H^0(C, M) \xrightarrow{\times\varepsilon} H^0(C_\varepsilon, M_\varepsilon) \xrightarrow{\varphi} H^0(C, M),$$

où φ désigne la réduction (mod ε). Toute section t de $H^0(C, M(p))$ qui n'est pas holomorphe en p définit une section σ de φ de la façon suivante. Prenons la section $(x-a)\,t$ comme générateur de M au voisinage de p, ce qui permet de parler de la valeur en p d'une section de M; on pose alors $\sigma(s) = s - \varepsilon s(p)\,t$.

La multiplication par y définit un homomorphisme $m_y : H^0(C, M) \to H^0(C, M) \otimes S_d$, et il existe une base $\mathcal{B}$ de $H^0(C, M)$ pour laquelle $A(x)$ est la matrice de cet homomorphisme (remarque 1.7). L'image de $\mathscr{B}$ par σ est une base du $\mathbf{C}[\varepsilon]$-module $H^0(C_\varepsilon, M_\varepsilon)$; la matrice de $m_y\colon H^0(C_\varepsilon, M_\varepsilon)\to H^0(C_\varepsilon, M_\varepsilon)\otimes S_d$ dans cette base s'écrit $A(x)+\varepsilon\dot{A}(x)$, avec $\dot{A}(x)\in \mathbf{M}_r(S_d)$, et le vecteur tangent $\dot{A}(x)$ se projette suivant $X_p(L)$ dans $T_L(J^{g-1}(C))$. Pour calculer $\dot{A}(x)$ nous utiliserons un lemme élémentaire d'algèbre linéaire, dont la démonstration est laissée au lecteur:

(2.3) LEMME. *Soient V_ε, W_ε deux $\mathbf{C}[\varepsilon]$-modules libres, et $u_\varepsilon\colon V_\varepsilon\to W_\varepsilon$ une application $\mathbf{C}[\varepsilon]$-linéaire. Notons V, W, u les réductions* (mod ε) *de V_ε, W_ε et u_ε. Supposons données des sections $\mathbf{C}$-linéaires σ et τ des projections canoniques $V_\varepsilon\to V$ et $W_\varepsilon\to W$; on en déduit par linéarité des isomorphismes $\mathbf{C}[\varepsilon]$-linéaires $\sigma_\varepsilon\colon V\otimes_{\mathbf{C}}\mathbf{C}[\varepsilon]\to V_\varepsilon$ et $\tau_\varepsilon\colon W\otimes_{\mathbf{C}}\mathbf{C}[\varepsilon]\to W_\varepsilon$. On a $\tau_\varepsilon^{-1}\circ u_\varepsilon\circ\sigma_\varepsilon=u\otimes 1+\varepsilon r$, où $r\colon V\to W$ est composé de l'homomorphisme $u_\varepsilon\circ\sigma-\tau\circ u$ de V dans $\varepsilon W_\varepsilon$ et de l'isomorphisme canonique de $\varepsilon W_\varepsilon$ sur W.* □

(2.4) Appliquons ce lemme à notre situation, avec

$$V_\varepsilon=H^0(C_\varepsilon, M_\varepsilon),\quad W_\varepsilon=H^0(C_\varepsilon, M_\varepsilon)\otimes S_d,\quad u_\varepsilon=m_y,\quad \tau=\sigma\otimes 1,$$

la section σ étant définie comme ci-dessus à l'aide d'un élément t de $H^0(C, M(p))$. On en déduit que $\dot{A}(x)$ est la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de l'homomorphisme r défini par la formule

$$\varepsilon r(s)=y(s-\varepsilon s(p)\,t)-(\sigma\otimes 1)(ys),$$

ou encore, en notant e_p la forme linéaire $s\mapsto s(p)$ sur $H^0(C, M)$,

$$r(s)=((e_p\otimes 1)(ys))\,t-s(p)\,yt. \tag{2.5}$$

(Le membre de droite, qui est a priori dans $H^0(C, M(p))\otimes S_d$, appartient en fait à $H^0(C, M)\otimes S_d$ d'après le lemme.)

Nous allons maintenant préciser le choix de t. Pour éviter d'alourdir la démonstration, nous supposerons désormais que *la fibre $\pi^{-1}(a)$ se compose de r points distincts*, autrement dit que π est étale au-dessus de a; le cas général s'en déduit aussitôt par continuité. Comme L appartient à $J^{g-1}(C)-\Theta$, l'espace $H^0(C, L)$ est nul et $H^0(C, L(p))$ est de dimension un. Il en résulte qu'il existe une section s_1 de $H^0(C, M)$, unique à un scalaire non nul près, qui ne s'annule pas en p, mais qui s'annule aux autres points de $\pi^{-1}(a)$. La section méromorphe $s_1/(x-a)$ de M admet alors pour seul pôle p (avec multiplicité 1): nous prendrons $t=s_1/(x-a)$. Si Π désigne la matrice de l'endomorphisme

$s \mapsto s(p)\, s_1$ de $H^0(C,M)$ dans la base $\mathscr{B}$, la formule (2.5) se traduit par l'égalité matricielle

$$\dot{A}(x) = \frac{1}{x-a}(\Pi A(x) - A(x)\,\Pi).$$

(2.6) Il reste à prouver que Π est le projecteur spectral Π_p de $A(a)$ associé à la valeur propre $y(p)$. Notons $p_1, \ldots, p_r$ les points de la fibre $\pi^{-1}(a)$, avec $p_1 = p$. Pour $1 \leqslant i \leqslant r$ il existe comme ci-dessus une section s_i de $H^0(C,M)$ s'annulant en p_j pour $j \neq i$ mais pas en p_i. Alors *s_i est le vecteur propre de $A(a)$ relatif à la valeur propre $y(p_i)$* (on identifie matrices et endomorphismes de $H^0(C,M)$ à l'aide de la base $\mathscr{B}$). En effet $(s_1, \ldots, s_r)$ est une base de $H^0(C,M)$, donc il existe des polynômes $b_1(x), \ldots, b_r(x)$ de degré $\leqslant d$ tels qu'on ait

$$y s_i = b_1(x)\, s_1 + \ldots + b_r(x)\, s_r;$$

évaluant cette égalité en p_j on trouve $b_j(a) = 0$ pour $j \neq i$ et $b_i(a) = y(p_i)$, d'où notre assertion. Comme on a $\Pi s_1 = s_1$ et $\Pi s_i = 0$ pour $i > 1$, on en déduit $\Pi = \Pi_p$, ce qui achève de prouver le théorème. □

(2.7) COROLLAIRE. *Pour $A(x) \in M_P$, posons $\tilde{X}_p(A(x)) = 1/(x-a)\,[\Pi_p, A(x)]$. Alors $\tilde{X}_p$ est un champ de vecteurs sur M_P, invariant sous* $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$, *et son image dans $J^{g-1}(C) - \Theta$ est égale à X_p.*

Il est clair en effet que $\tilde{X}_p$ est invariant sous $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$, et les autres assertions résultent du théorème (2.2).

3. Construction en famille

(3.1) Nous allons maintenant globaliser la construction précédente en faisant varier le polynôme P. Soit $\mathscr{V}_r(d)$ l'espace (affine) des polynômes de la forme

$$P = y^r + s_1(x)\, y^{r-1} + \ldots + s_r(x),$$

avec $s_i \in S_{id}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$; il s'identifie à l'espace $S_d \times \ldots \times S_{rd}$. En associant à une matrice $A(x)$ son polynôme caractéristique $P(y) = \det(yI_r - A(x))$, on définit une application $h \colon \mathbf{M}_r(S_d) \to \mathscr{V}_r(d)$.

Le groupe $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ opère sur $\mathbf{M}_r(S_d)$ par conjugaison, et l'application h est constante sur les orbites de cette opération. Nous nous bornerons à regarder la situation au-dessus de l'ouvert $V_r(d)$ de $\mathscr{V}_r(d)$ formé des polynômes P tels que la courbe C_P soit *lisse* (cf. (1.13)). Posons $M_r(d)=h^{-1}(V_r(d))$. Il résulte de la proposition 1 que le groupe $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ opère librement et proprement sur $M_r(d)$ (on peut aussi déduire ce résultat du fait que $M_r(d)$ est contenu dans l'ouvert des points stables de $\mathbf{M}_r(S_d)$, cf. [A]). On note $Q_r(d)$ la variété quotient (lisse) $M_r(d)/\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$, et $H: Q_r(d) \to V_r(d)$ le morphisme déduit de h. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur r et d nous écrirons simplement $M, Q, \mathscr{V}$ et V au lieu de $M_r(d), Q_r(d), \mathscr{V}_r(d)$ et $V_r(d)$.

La démonstration du théorème (1.4) s'étend aussitôt à cette situation relative:

(3.2) Proposition. *Le morphisme $H: Q \to V$ est lisse; sa fibre en un point P de V s'identifie à l'ouvert affine $J^{g-1}(C_P)-\Theta$ de la jacobienne de la courbe spectrale C_P.* □

(3.3) En d'autres termes, les courbes spectrales $(C_P)_{P\in V}$ s'organisent en une « famille universelle » $\mathscr{C} \to V$; on sait associer à une telle famille sa *jacobienne relative* $\mathscr{J}^{g-1} \to V$, dont la fibre au-dessus de chaque point P est $J^{g-1}(C_P)$. Cette jacobienne contient un diviseur thêta relatif, et Q s'identifie au complémentaire de ce diviseur dans $\mathscr{J}^{g-1}$.

La variété Q est évidemment unirationnelle; elle est rationnelle pour $r=2$ (cf. (1.5)), $r=3$ [F1], $r=4$ [F2]. On ignore ce qu'il en est pour $r\geq 5$. Ce problème présente un certain intérêt en algèbre, où le corps des fonctions rationnelles sur Q joue un rôle important (*centre de l'algèbre à division générique*).

(3.4) *Exemple*. Considérons en particulier le cas $d=1$. La variété Q est alors le quotient par $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ d'un ouvert stable de $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})\times\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$. La variété V s'identifie à un ouvert de l'espace projectif $|\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(r)|$ qui paramètre les courbes planes de degré r (1.6). La famille $\mathscr{C} \to V$ est la famille universelle des courbes planes, et Q est donc birationnellement isomorphe à la jacobienne relative $\mathscr{J}^{g-1}$ de cette famille (cette propriété a déjà été observée par M. Van den Bergh, cf. [L]).

Alors qu'on ignore si $\mathscr{J}^{g-1}$ (et donc Q) est rationnelle pour $r\geq 5$, il n'est peut-être pas inutile d'observer que la jacobienne $\mathscr{J}^{g}$ est toujours rationnelle (on réalise facilement un ouvert de $\mathscr{J}^{g}$ comme un fibré projectif au-dessus de la puissance symétrique $\mathrm{Sym}^g(\mathbf{P}^2)$).

(3.5) Le champ de vecteurs $\tilde{X}_p$ défini en (2.7) ne s'étend pas globalement à M, puisque sa valeur en un point $A(x)$ de M dépend du choix du point p de la courbe C_P, c'est-à-dire d'une valeur propre particulière de $A(a)$. Pour tout $a\in\mathbf{C}$ et tout $i\in\mathbf{N}$, définissons un champ de vecteurs $Y_a^{(i)}$ sur $\mathbf{M}_r(S_d)$ par

$$Y_a^{(i)}(A(x)) = \frac{1}{x-a}[A^i(a), A(x)].$$

(3.6) PROPOSITION. *Les champs $Y_a^{(i)}$ ($a \in \mathbf{C}, i \in \mathbf{N}$) sont invariants sous $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$, et tangents aux fibres M_P de h. Leurs images dans Q engendrent un espace de dimension g de champs de vecteurs sur Q, commutant entre eux. Pour tout $P \in V$, leurs images dans $J^{g-1}(C_P)-\Theta$ engendrent l'espace des champs de vecteurs invariants par translation sur $J^{g-1}(C_P)-\Theta$.*

Il est clair que les champs $Y_a^{(i)}$ sont invariants. Soit $P \in V$; soit a un nombre complexe, tel que la fibre $\pi_P^{-1}(a)$ soit formée de r points distincts $p_1, \dots, p_r$. Avec les notations de (2.6), on a, pour tout élément $A(x)$ de M_P,

$$A(a)^i = y(p_1)^i \Pi_{p_1} + \dots + y(p_r)^i \Pi_{p_r}.$$

Cela prouve que les vecteurs $Y_a^{(1)}(A(x)), \dots, Y_a^{(r-1)}(A(x))$ sont tangents à M_P, et qu'ils engendrent le même sous-espace de $T_{A(x)}(M_P)$ que les vecteurs $\tilde{X}_{p_1}(A(x)), \dots, \tilde{X}_{p_r}(A(x))$ (on notera que la somme de ces derniers est nulle, à cause de la relation $\Sigma\, \Pi_{p_i} = I_r$). Les images de $Y_a^{(1)}, \dots, Y_a^{(r-1)}$ dans $J^{g-1}(C_P)-\Theta$ engendrent donc le même espace que les champs $X_{p_1}, \dots, X_{p_r}$; or les X_p, pour p général dans C_P, engendrent l'espace des champs de vecteurs tangents à la jacobienne de C_P.

Notons Y le sous-espace de $H^0(Q, T_Q)$ engendré par les projections des champs invariants $Y_a^{(i)}$. Il résulte de ce qui précède qu'on a $\dim Y \geqslant g$; de plus deux éléments quelconques de Y commutent entre eux, puisqu'il en est ainsi de leurs restrictions à chacune des fibres de $H: Q \to V$. Il reste donc à prouver qu'on a $\dim Y \leqslant g$. Pour cela, observons qu'on peut écrire $1/(x-a)\,[A^i(a), A(x)]$ comme un polynôme en a, à coefficients dans $\mathbf{M}_r(S_d)$, de degré $id-1$; autrement dit, on a

$$Y_a^{(i)} = \sum_{j=0}^{id-1} a^j Y_j^{(i)},$$

où $Y_j^{(i)}$ est un champ de vecteurs sur $\mathbf{M}_r(S_d)$, indépendant de a. De plus, pour $A(x) \in \mathbf{M}_r(S_d)$, le vecteur $Y_{id-1}^{(i)}(A(x))$ est égal à $[A(x), A(\infty)]$, où $A(\infty)$ est le coefficient de x^d dans le polynôme matriciel $A(x)$. Il est donc tangent à l'orbite de $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{M}_r(S_d)$, ce qui signifie que la projection du champ $Y_{id-1}^{(i)}$ dans Q est nulle. Par suite Y est contenu dans le sous-espace de $H^0(Q, T_Q)$ engendré par les champs $Y_j^{(i)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant r-1$ et $0 \leqslant j \leqslant id-2$. La dimension de ce sous-espace est bornée par

$$(d-1)+(2d-1)+\dots+((r-1)d-1) = \frac{1}{2}(r-1)(dr-2) = g,$$

ce qui achève la démonstration. □

(3.7) *Exemple*. Considérons par exemple le cas $d=1$. Notant $A(x)=Ax+B$, l'équation différentielle associée au champ $Y_a^{(i)}$ s'écrit

$$\frac{d}{dt}(Ax+B) = [A,(Aa+B)^i],$$

soit

$$\frac{dA}{dt} = 0, \quad \frac{dB}{dt} = [A,(Aa+B)^i].$$

La première équation entraîne que A est indépendant de t, soit $A=A_0$. La seconde s'écrit alors

$$\frac{dB}{dt} = [A_0,(Aa+B)^i].$$

Pour $a=0$, on obtient en particulier l'équation différentielle sur $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$

$$\frac{dB}{dt} = [A_0, B^i],$$

qui se linéarise sur la jacobienne de la courbe plane $\det(xA_0+B_0-yI_r)=0$ (cf. (1.6)).

(3.8) Résumons la situation, en partant des flots de Lax sur $\mathbf{M}_r(S_d)$

$$\frac{d}{dt}A(x) = \left[A(x), \frac{A^i(a)}{x-a}\right] \quad (i \in \mathbf{N}, a \in \mathbf{C}).$$

Ces flots sont invariants sous $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$, de sorte qu'il revient au même de les regarder sur la variété quotient Q. Nous avons montré qu'ils commutent entre eux, et admettent un grand nombre d'intégrales premières, à savoir les composantes H_i de H. De plus, les fibres de H sont des ouverts de variétés abéliennes, sur lesquels nos flots se linéarisent.

Cette situation est très voisine de celle que l'on rencontre dans l'étude des systèmes hamiltoniens complètement intégrables, à ceci près que nous ne disposons pas de structure symplectique sur Q. Nous allons construire sur Q une *structure de Poisson* pour laquelle la fibration H définit effectivement un système hamiltonien complètement intégrable.

4. Intermède symplectique

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ici quelques définitions et résultats élémentaires de géométrie symplectique, qu'on peut trouver par exemple dans [W].

Nous nous placerons dans le cadre analytique complexe; le cas réel est en tous points analogue.

(4.1) Soit V une variété complexe, et soit θ un élément de $H^0(V, \Lambda^2 T_V)$. Etant données deux fonctions f et g holomorphes sur un ouvert U de V, on note $\{f, g\}$ la fonction holomorphe $\langle \theta, df \wedge dg\rangle$ sur U. On dit que θ est une *structure de Poisson* sur V si le *crochet de Poisson* $(f, g) \mapsto \{f, g\}$ vérifie l'identité de Jacobi (i.e. fait de $H^0(U, \mathcal{O}_U)$ une algèbre de Lie). L'application $g \mapsto \{f, g\}$ est une dérivation de $H^0(U, \mathcal{O}_U)$, donc correspond à un champ de vecteurs holomorphe X_f sur U: c'est le *champ hamiltonien* associé à f.

Lorsque θ est de rang maximum en tout point, on dit que la structure de Poisson est *symplectique;* la donnée de θ équivaut alors à celle de la 2-forme inverse $\omega \in H^0(V, \Omega^2_V)$, c'est-à-dire d'une structure symplectique sur V.

Soit W une sous-variété de V. On ne peut pas en général parler de structure de Poisson induite sur W. C'est toutefois le cas si le champ de bivecteurs θ est tangent à W, c'est-à-dire provient en chaque point de W d'un élément de $\Lambda^2 T_W$. Si f est une fonction holomorphe sur V, le champ hamiltonien associé à f est alors tangent à W, et induit sur W le champ hamiltonien associé à $f|_W$.

(4.2) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbf{C}$. Le dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ est muni d'une structure de Poisson canonique, dite de Kostant–Kirillov, définie de la façon suivante: si $l \in \mathfrak{g}^*$, le bivecteur $\theta(l) \in \Lambda^2 \mathfrak{g}^*$ est la forme alternée $(A, B) \mapsto l([A, B])$ sur $\mathfrak{g}$. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert U de $\mathfrak{g}^*$; pour tout $l \in U$, les formes linéaires $f'(l)$ et $g'(l)$ sur $\mathfrak{g}^*$ peuvent être vues comme des éléments de $\mathfrak{g}$. Le crochet de Poisson $\{f, g\}$ est la fonction $l \mapsto l([f'(l), g'(l)])$ sur U. Le champ hamiltonien X_f sur U associé à f satisfait à $X_f(l) = {}^t[\operatorname{ad} f'(l)]\,(l)$.

Supposons désormais l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ *réductive,* et munissons-la d'une forme bilinéaire symétrique invariante séparante. On en déduit un isomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{g}$, que nous noterons $l \mapsto l^*$. On peut alors transporter à $\mathfrak{g}$ la structure de Poisson de $\mathfrak{g}^*$ par cet isomorphisme. Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathfrak{g}$, le champ hamiltonien X_f vérifie $X_f(A) = [A, f'(A)^*]$.

La structure de Poisson de $\mathfrak{g}$ n'est pas symplectique: en fait, elle est tangente aux orbites de G, et induit sur chacune de ces orbites une structure symplectique.

(4.3) Soit G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$; soit e un entier positif. L'algèbre produit $\mathfrak{g}^e$ est de même une variété de Poisson, munie d'une opération de G. La sous-variété $\mathfrak{g}^e_0$ formé des familles (A_i) telles que $\Sigma A_i = 0$ possède la propriété suivante: étant donnés un ouvert

U de $\mathfrak{g}^e$, stable par G, une fonction holomorphe f sur U invariante par G et une fonction holomorphe g sur U qui s'annule sur $\mathfrak{g}_0^e$, le crochet $\{f, g\}$ s'annule sur $\mathfrak{g}_0^e$. Soit V un ouvert de $\mathfrak{g}_0^e$ sur lequel G opère librement et proprement; il résulte de ce qui précède que le crochet de Poisson de $\mathfrak{g}^e$ définit par passage au quotient un crochet de Poisson sur la variété quotient V/G. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathfrak{g}^e$, invariante par G, et soit $\bar{f}$ la fonction sur V/G déduite de f; le champ hamiltonien associé à $\bar{f}$ est la projection sur V/G du champ $(A_i)\mapsto[A_i, (\partial_i f(A))^*]$, où $\partial_i f(A)$ est la dérivée partielle de f par rapport à A_i en $A=(A_i)$, vue comme forme linéaire sur $\mathfrak{g}$.

(4.4) Soient $C_1, \ldots, C_e$ des orbites de G dans $\mathfrak{g}$; supposons que l'image de l'application $\mu\colon \Pi\, C_i \to \mathfrak{g}$ définie par $\mu(A_1, \ldots, A_e) = \Sigma\, A_i$ soit contenue dans l'algèbre dérivée $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ de $\mathfrak{g}$. Alors μ est une *application des moments* pour l'action de G dans la variété symplectique $\Pi\, C_i$. Cela entraîne que la structure de Poisson de V/G induit sur $(\mu^{-1}(0)\cap V)/G$ une structure symplectique, qui est la structure symplectique quotient de $\Pi\, C_i$ par G (« réduction symplectique »).

Nous appliquerons ce qui précède dans le cas où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$, munie de la forme bilinéaire invariante $(A, B)\mapsto \operatorname{Tr} AB$. On a alors $G=\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$, et les orbites C_i sont des classes de conjugaison dans $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$. La condition sur μ s'écrit simplement $\Sigma \operatorname{Tr}(C_i)=0$.

5. Structure de Poisson sur Q

(5.1) Revenant à la situation du § 3, nous allons maintenant décrire une *structure de Poisson* sur Q (ou plutôt une famille de telles structures) pour laquelle le système H est complètement intégrable. Soient $a_1, \ldots, a_{d+2}$ des nombres complexes distincts. Pour $1\leq i\leq d+2$, nous noterons P_i le polynôme $\Pi_{j\neq i}(x-a_j)$, et poserons $c_i=P(a_i)^{-1}$. La formule d'interpolation de Lagrange s'écrit

$$A(x)=\sum_{i=1}^{d+2} c_i A(a_i) P_i(x).$$

Elle entraîne en particulier (en considérant le coefficient de x^{d+1}) qu'on a $\Sigma\, c_i A(a_i)=0$. Soit alors $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})_0^{d+2}$ le sous-espace de $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})^{d+2}$ formé des éléments $(A_i)_{1\leq i\leq d+2}$ tels que $\Sigma\, A_i=0$ (cf. (4.3)); l'application $\mathbf{C}$-linéaire $\varphi\colon \mathbf{M}_r(S_d)\to\mathbf{M}_r(\mathbf{C})_0^{d+2}$ définie par $\varphi(A(x))=(c_i A(a_i))_{1\leq i\leq d+2}$ est un isomorphisme, et l'isomorphisme réciproque est défini par $\varphi^{-1}((A_i))=\Sigma\, A_i P_i(x)$.

Ainsi la variété M s'identifie à un ouvert de $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})_0^{d+2}$, sur lequel le groupe $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ opère librement et proprement. Munissons la variété $Q=M/\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ de la structure de

Poisson quotient définie en (4.3). Cette structure dépend du choix des a_i, comme le montre par exemple le calcul suivant. Rappelons (3.5) qu'on a noté $Y_a^{(p)}$ le champ invariant sur $\mathbf{M}_r(S_d)$ défini par

$$Y_a^{(p)}(A(x)) = \frac{1}{x-a}[A(a)^p, A(x)].$$

(5.2) PROPOSITION. *Soit a un nombre complexe distinct des a_i, et p un entier $\geqslant 1$. Le champ hamiltonien associé à la fonction invariante $A \mapsto \operatorname{Tr} A(a)^p$ est la projection sur Q du champ invariant $c(a)\, Y_a^{(p-1)}$, avec $c(a) = p\Pi(a-a_i)$.*

Dans l'isomorphisme $\mathbf{M}_r(S_d) \to \mathbf{M}_r(\mathbf{C})_0^{d+2}$, la fonction considérée s'écrit $(A_i) \mapsto \operatorname{Tr}(\Sigma A_i P_i(a))^p$. La dérivée partielle de cette fonction par rapport à A_i est la forme linéaire $B \mapsto pP_i(a) \operatorname{Tr}(A(a)^{p-1}B)$ sur $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$, qui s'identifie à l'aide du produit scalaire à la matrice $pP_i(a)\,A(a)^{p-1}$. D'après (4.2), le champ hamiltonien cherché est la projection sur Q du champ invariant X sur $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})_0^{d+2}$ défini par

$$X((A_i)) = (pP_i(a)\,[A_i, A(a)^{p-1}])_{1 \leqslant i \leqslant d+2}.$$

Il s'agit de prouver l'égalité $c(a)\, Y_a^{(p-1)} = \varphi^{-1} \circ X \circ \varphi$. Soit $A(x) \in \mathbf{M}_r(S_d)$. On a

$$(X \circ \varphi(A(x)))_i = pP_i(a)\, c_i [A(a_i), A(a)^{p-1}] = \frac{c_i c(a)}{a-a_i}[A(a_i), A(a)^{p-1}],$$

$$(\varphi \circ Y_a^{(p-1)}(A(x)))_i = \frac{c_i}{a_i - a}[A(a)^{p-1}, A(a_i)],$$

d'où la proposition. □

(5.3) THÉORÈME. *Le système hamiltonien $H\colon Q \to V$ est algébriquement complètement intégrable.*

Choisissons des coordonnées sur V, de sorte que H est donné par N fonctions polynomiales $H_1, \ldots, H_N$ (avec $N = \frac{1}{2}r(r+d+2)$). L'énoncé du théorème signifie d'une part que ces fonctions sont en involution, c'est-à-dire qu'on a $\{H_i, H_j\} = 0$ quels que soient i et j; d'autre part, que les champs hamiltoniens X_{H_i} se linéarisent sur les fibres de H, et engendrent sur chacune de ces fibres l'espace des champs invariants par translation.

L'espace des fonctions H_i est engendré par les fonctions invariantes $A(x) \mapsto$

$\mathrm{Tr}\,\Lambda^p A(a)$, pour $p\geqslant 0$ et a assez général dans $\mathbf{C}$. Celles-ci sont liées aux $\mathrm{Tr}\,A(a)^p$ par les relations de Newton, qui sont de la forme

$$\mathrm{Tr}\,\Lambda^p A(a)=\frac{(-1)^{p-1}}{p}\mathrm{Tr}\,A(a)^p+P_p(\mathrm{Tr}\,A(a),\dots,\mathrm{Tr}\,A(a)^{p-1}),$$

où P_p est un polynôme universel en $p-1$ variables, à coefficients rationnels. Compte tenu de la proposition (5.2), on en déduit que le champ hamiltonien associé à la fonction $A(x)\mapsto\mathrm{Tr}\,\Lambda^p A(a)$ est la projection sur Q de

$$d(a)\,Y_a^{(p-1)}+\sum_{i=1}^{p-2}f_i\,Y_a^{(i)},$$

où $d(a)$ est une constante, et les f_i des fonctions invariantes sur $\mathbf{M}_r(S_d)$, constantes sur les fibres de H.

Il en résulte d'abord que les champs X_{H_i} sont tangents aux fibres de H; on a donc $\{H_i,H_j\}=X_{H_i}\cdot H_j=0$. De plus, le champ X_{H_i} restreint à une fibre $H^{-1}(P)\cong J^{g-1}(C_P)-\Theta$ est invariant par translation d'après la proposition (3.6). Enfin, l'image dans Q du champ $Y_a^{(p)}$ est combinaison linéaire des X_{H_i}, donc les restrictions des X_{H_i} à la fibre $H^{-1}(P)$ engendrent l'espace des champs invariants par translation sur cette fibre. □

(5.4) La fibration $H\colon Q\to V$ n'est pas un système hamiltonien complètement intégrable au sens classique, puisque la structure de Poisson de Q ne provient pas d'une structure symplectique. Nous allons voir qu'il faut plutôt regarder H comme une *famille* de systèmes hamiltoniens complètement intégrables sur des variétés symplectiques, paramétrée par un espace affine.

Rappelons qu'on a noté $\mathcal{V}_r(d)$ (ou simplement $\mathcal{V}$) l'espace des polynômes $P(y,x)=y^r+s_1(x)y^{r-1}+\dots+s_r(x)$, avec $s_i\in S_{id}$ pour tout i; la base V de la fibration H est l'ouvert de $\mathcal{V}$ formé des polynômes P tels que la courbe C_P soit lisse. Associons à un polynôme P de $\mathcal{V}$ les polynômes $P^{(i)}(y)$ définis par $P^{(i)}(y)=c_i^r P(y/c_i,a_i)$, pour $1\leqslant i\leqslant d+2$. On obtient ainsi une application linéaire affine p de $\mathcal{V}$ dans $(U_r)^{d+2}$, où U_r désigne l'espace des polynômes unitaires de degré r en y. Comme s_1 est de degré $\leqslant d$, la formule d'interpolation de Lagrange entraîne comme ci-dessus $\Sigma\, c_i s_1(a_i)=0$; l'image de p est donc contenue dans l'hyperplan $\mathcal{U}$ de $(U_r)^{d+2}$ formé des éléments $(P^{(1)},\dots,P^{(d+2)})$, avec $P^{(i)}=y^r+s_1^{(i)}y^{r-1}+\dots+s_r^{(i)}$, satisfaisant à $\Sigma\, s_1^{(i)}=0$. Toujours par interpolation, on voit aussitôt que l'application $p\colon\mathcal{V}\to\mathcal{U}$ est surjective.

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[dr, "m"'] & Q \arrow[r, "H"] \arrow[d, "q"] & V \arrow[dl, "p"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

Soit $\mathbf{P}=(P^{(1)},\dots,P^{(d+2)})$ un élément de $\mathcal{U}$. La fibre $V_{\mathbf{P}}=p^{-1}(\mathbf{P})$ est l'ensemble des polynômes $P(y,x)\in V$ vérifiant $c_i^r P(y/c_i, a_i)=P^{(i)}(y)$ pour $1\leqslant i\leqslant d+2$. La fibre $M_{\mathbf{P}}=m^{-1}(\mathbf{P})$ est l'ensemble des matrices $A(x)\in M$ telles que le polynôme caractéristique de $A_i=A(a_i)$ soit égal à $P^{(i)}$. Rappelons (1.11) qu'il existe une unique classe de conjugaison C_i dans $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$, de polynôme caractéristique $P^{(i)}$ et de dimension r^2-r; la matrice A_i appartient à C_i (1.12). Notons $(\Pi C_i)_0$ la sous-variété de ΠC_i formée des éléments $(A_1,\dots,A_{d+2})$ tels que $\Sigma A_i=0$; par l'isomorphisme φ de (5.1), $M_{\mathbf{P}}$ *s'identifie à un ouvert de* $(\Pi C_i)_0$, sur lequel le groupe $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ opère librement et proprement. La fibre $Q_{\mathbf{P}}=q^{-1}(\mathbf{P})$ est le quotient de $M_{\mathbf{P}}$ par $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$; la structure de Poisson de Q est tangente à $Q_{\mathbf{P}}$, et induit sur $Q_{\mathbf{P}}$ la structure symplectique quotient de ΠC_i par $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ (4.3). Par restriction au-dessus de $\mathbf{P}$, on déduit alors du théorème (5.3) le résultat suivant.

(5.5) THÉORÈME. *Pour tout* $\mathbf{P}\in\mathcal{U}$, *la fibration* $H_{\mathbf{P}}\colon Q_{\mathbf{P}}\to V_{\mathbf{P}}$ *induite sur les fibres au-dessus de* $\mathbf{P}$ *est un système hamiltonien complètement intégrable* (*algébriquement*) *sur la variété symplectique* $Q_{\mathbf{P}}$.

Autrement dit, si $C_1,\dots,C_{d+2}$ sont des classes de conjugaison de dimension maximale dans $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$, on obtient un système hamiltonien complètement intégrable sur le quotient symplectique de ΠC_i par $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ en associant à un élément $(A_1,\dots,A_{d+2})$ de ΠC_i tel que $\Sigma A_i=0$ le polynôme caractéristique de la matrice $\Sigma P_i(x)A_i$.

(5.6) Les constructions précédentes gardent un sens lorsque certains des points a_i coïncident, ou sont à l'infini. Si par exemple $a_{d+2}=\infty$, il y a très peu à changer à ce qui précède. On définit A_∞ comme le coefficient de x^d dans $A(x)$; la formule de Lagrange s'écrit alors

$$A(x)=\sum_{i=1}^{d+1} A_i P_i(x), \quad \text{d'où} \quad A_\infty=\sum_{i=1}^{d+1} A_i.$$

Soit $P(y,x)=y^r+s_1(x)y^{r-1}+\dots+s_r(x)$ un polynôme de $\mathcal{V}$; on convient de noter $s_i(\infty)$ le coefficient de x^{id} dans $s_i(x)$, ce qui permet de donner un sens à $P(y,\infty)$. Fixer ce polynôme revient encore à fixer la classe de conjugaison de A_∞, et l'on retombe sur la situation ci-dessus.

(5.7) Le cas où l'on impose des multiplicités aux a_i est plus subtil. Je vais me contenter de traiter un exemple, qui intervient dans le problème de Neumann. Prenons $a_1, \dots, a_d$ distincts, et $a_{d+1}=a_{d+2}=\infty$. On définit A_∞, $P(y,\infty)$ comme précédemment; on note A'_∞ le coefficient de x^{d-1} dans $A(x)$, et on définit de même $s'_i(\infty)$ et $P'(y,\infty)$. La formule de Lagrange s'écrit

$$A(x)=\sum_{i=1}^{d} A_i P_i(x)+A_\infty P_\infty(x), \quad \text{d'où} \quad A'_\infty=\sum_{i=1}^{d} A_i+\sigma A_\infty,$$

en posant $P_\infty(x)=\Pi(x-a_i)$ et $\sigma=-\Sigma\, a_i$.

Soit $\mathbf{P}=(P^{(1)},\dots,P^{(d)},P^{(\infty)},P'^{(\infty)})\in(U_r)^{d+2}$. La fibre $M_{\mathbf{P}}$ est formée dans ce cas des éléments $(A_1,\dots,A_d,A_\infty,A'_\infty)$ tels que le polynôme caractéristique de A_i soit égal à $P^{(i)}$ (pour $1\leq i\leq d$), et que le polynôme caractéristique de la matrice $A_\infty+\varepsilon A'_\infty$ de $\mathbf{M}_r(\mathbf{C}[\varepsilon])$ ($\varepsilon^2=0$) soit égal à $P^{(\infty)}+\varepsilon P'^{\infty}$. La première condition signifie que A_i appartient à la classe de conjugaison C_i des matrices régulières de polynôme caractéristique $P^{(i)}$; pour comprendre la seconde, il faut considérer $A_\infty+\varepsilon A'_\infty$ comme un élément du fibré tangent $T(\mathbf{M}_r(\mathbf{C}))$; l'action par conjugaison de $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$ s'étend en une action du fibré tangent $T(\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C}))$ sur $T(\mathbf{M}_r(\mathbf{C})$. Il est facile de voir qu'il existe une seule orbite $\mathscr{C}_\infty$ pour cette action formée d'éléments $A+\varepsilon A'$ dont le polynôme caractéristique soit égal au polynôme $P^{(\infty)}+\varepsilon P'^{(\infty)}$ donné, et telles que la matrice A soit régulière. La condition sur A_∞ et A'_∞ signifie donc que $A_\infty+\varepsilon A'_\infty$ appartient à $\mathscr{C}_\infty$.

On munit l'algèbre de Lie $T(\mathbf{M}_r(\mathbf{C}))$ du produit scalaire invariant défini par

$$\langle A+\varepsilon A'|B+\varepsilon B'\rangle=\sigma\operatorname{Tr}AB-\operatorname{Tr}AB'-\operatorname{Tr}A'B,$$

et de la structure de Poisson de Kostant–Kirillov déduite de ce produit scalaire; celle-ci induit une structure symplectique sur l'orbite $\mathscr{C}_\infty$. L'application $A+\varepsilon A'\mapsto\sigma A-A'$ est une application des moments pour $T(\mathbf{M}_r(\mathbf{C}))$ (relativement à l'action de $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$). Il résulte de tout ceci que la fibre $Q_{\mathbf{P}}$ s'identifie au quotient symplectique de $\Pi\, C_i\times\mathscr{C}_\infty$ par $\mathbf{PGL}_r(\mathbf{C})$; on obtient un système hamiltonien complètement intégrable sur $Q_{\mathbf{P}}$ en associant à un élément $(A_1,\dots,A_d,A_\infty+\varepsilon A'_\infty)$ les coefficients du polynôme caractéristique de la matrice $A(x)=\Sigma\, A_iP_i(x)+A_\infty P_\infty(x)$.

6. Exemples

Nous supposons désormais $r=2$. Nous considérerons uniquement des classes de conjugaison de trace nulle.

(6.1) L'espace des hamiltoniens H_i sur $Q_{\mathbf{P}}$ est alors engendré par les fonctions $A(x)\mapsto\frac{1}{2}\operatorname{Tr} A(a)^2$, pour $a\in\mathbf{C}$. Le champ hamiltonien associé est $\Pi(a-a_i)\,Y_a$, où Y_a est l'image dans $Q_{\mathbf{P}}$ du champ

$$Y_a^{(1)}\colon A(x)\mapsto\left[\frac{A(a)}{x-a},A(x)\right].$$

En faisant tendre a vers a_k, on en déduit que $c_k\,Y_{a_k}$ est le champ hamiltonien associé à la fonction H_k définie par $H_k(A(x))=c_k^2\operatorname{Tr} A(a_k)\,A'(a_k)$, où $A'(x)$ désigne la dérivée de $A(x)$ par rapport à x. Les champs $Y_{a_1},\dots,Y_{a_d}$ engendrent dans chaque fibre $H^{-1}(P)\cong J^{g-1}(C_P)-\Theta$ l'espace des champs invariants (qui est de dimension $d-1$); autrement dit, les fonctions $H_1,\dots,H_d$ forment un système complet de hamiltoniens en involution sur la variété symplectique $Q_{\mathbf{P}}$. On a $A(x)=\Sigma\,A_iP_i(x)$, d'où

$$A'(a_k)=\sum_{i\neq k}A_iP_i'(a_k)+A_kP_k'(a_k)=\sum_{i\neq k}A_i\frac{c_k^{-1}}{a_k-a_i}+A_kP_k'(a_k),$$

et

$$H_k=c_k^2\operatorname{Tr} A(a_k)\,A'(a_k)=\sum_{i\neq k}\frac{\operatorname{Tr}(A_kA_i)}{a_k-a_i}+d_k\operatorname{Tr} A_k^2, \tag{6.2}$$

avec $d_k=c_k^{-1}\,P_k'(a_k)$.

Il faut modifier légèrement ce calcul dans le cas $a_{d+1}=a_{d+2}=\infty$ (5.7), puisqu'on a alors $A(x)=\Sigma\,A_iP_i(x)+A_\infty P_\infty(x)$; on obtient

$$H_k=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{d}\frac{\operatorname{Tr}(A_kA_i)}{a_k-a_i}+d_k\operatorname{Tr} A_k^2+\operatorname{Tr}(A_kA_\infty). \tag{6.2'}$$

(6.3) Soit E un espace vectoriel (complexe) de dimension 2, $\mathcal{N}$ la variété des endomorphismes nilpotents non nuls de E. On notera $E^\times=E-\{0\}$. Choisissons une forme alternée non nulle φ sur E. Pour tout vecteur $v\in E^\times$, notons $\tau(v)$ l'endomorphisme $x\mapsto\varphi(x,v)\,v$. L'application $\tau\colon E^\times\to\mathcal{N}$ ainsi définie est un revêtement étale double, qui identifie $\mathcal{N}$ au quotient de $E^\times$ par $\{\pm1\}$. Le groupe $\mathbf{SL}(E)$ des automorphismes de E respectant φ opère sur $E^\times$ et sur $\mathcal{N}$ (par conjugaison), et le morphisme τ est équivariant pour cette action. Enfin l'image réciproque de la forme symplectique canonique sur $\mathcal{N}$ est la 2-forme constante sur E de valeur 2φ (sic!).

Nous appliquerons ces remarques en prenant pour E l'espace $\mathbf{C}^2$ muni de la forme symplectique standard. On paramètre ainsi la classe de conjugaison $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes non nulles par la formule

$$\tau(x, y)=\begin{pmatrix} xy & -x^2 \\ y^2 & -xy \end{pmatrix}.$$

(6.4) Prenons d'abord les a_i distincts, et $C_1=\ldots=C_{d+2}=\mathcal{N}$; le théorème (5.5) fournit alors un système hamiltonien complètement intégrable sur le quotient $\mathcal{N}_0^{d+2}/\mathbf{PGL}_2(\mathbf{C})$ (l'indice $_0$ signifie comme d'habitude qu'on considère les éléments $(A_1, \ldots, A_{d+2})$ de $\mathcal{N}^{d+2}$ tels que $\Sigma A_i=0$). Ecrivons $A_i=\tau(x_i, y_i)$ pour tout i. On a alors $\operatorname{Tr} A_k A_i=(x_k y_i-y_k x_i)^2$, de sorte que les hamiltoniens H_k de (6.2) sont donnés par

$$H_k(x, y)=\sum_{i \neq k} \frac{(x_k y_i-y_k x_i)^2}{a_k-a_i}. \tag{6.5}$$

Nous allons maintenant éliminer le passage au quotient en choisissant une « tranche », c'est-à-dire une sous-variété symplectique de $\mathcal{N}^{d+2}$, contenue dans $\mathcal{N}_0^{d+2}$, et qui se projette isomorphiquement sur $\mathcal{N}_0^{d+2}/\mathbf{PGL}_2(\mathbf{C})$. On obtient une telle tranche en fixant un repère projectif de $\mathbf{P}(E)$, par exemple en imposant $x_d=0, y_{d+1}=0, x_{d+2}=y_{d+2}$. Cela revient à prendre les matrices A_d, A_{d+1} et A_{d+2} de la forme

$$A_d=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -s & 0 \end{pmatrix}; \quad A_{d+1}=\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_{d+2}=\begin{pmatrix} -u & u \\ -u & u \end{pmatrix}.$$

Les nombres s, t, u sont déterminés par la condition $\Sigma A_i=0$; on a

$$s=|y|^2-\langle x|y\rangle, \quad t=|x|^2-\langle x|y\rangle, \quad u=\langle x|y\rangle,$$

en posant

$$\langle x|y\rangle=\sum_{i=1}^{d-1} x_i y_i \quad \text{et} \quad |x|^2=\langle x|x\rangle.$$

En d'autres termes, on définit un plongement symplectique $i\colon \mathcal{N}^{d-1} \rightarrow \mathcal{N}^{d+2}$ en posant $i(A_1, \ldots, A_{d-1})=(A_1, \ldots, A_{d+2})$, les matrices A_d, A_{d+1} et A_{d+2} étant définies par les formules ci-dessus. Ce plongement induit par projection un isomorphisme symplectique de $\mathcal{N}^{d-1}$ sur $\mathcal{N}_0^{d+2}/\mathbf{PGL}_2(\mathbf{C})$, plus exactement sur l'ouvert correspondant aux $(d+2)$-uplets $(A_1, \ldots, A_{d+2})$ pour lesquels les matrices A_d, A_{d+1} et A_{d+2} sont deux à deux non proportionnelles.

En passant au revêtement étale $(E^{\times})^{d-1}$ de $\mathcal{N}^{d-1}$, on en déduit un système hamiltonien complètement intégrable sur $\mathbf{C}^{2d-2}$ (muni de la structure symplectique standard). Les fonctions en involution H_k sont données par la formule (6.5), dans laquelle il faut remplacer x_i, y_i pour $i \geqslant d$ par leurs valeurs. Je vais me contenter d'écrire les limites de ces fonctions lorsque les paramètres a_d, a_{d+1} et a_{d+2} tendent vers l'infini. Pour $1 \leqslant k \leqslant d-1$, on retrouve la formule (6.5):

$$H_k(x,y) = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{(x_k y_i - y_k x_i)^2}{a_k - a_i}.$$

On a $\Sigma_{i=1}^{d-1} H_k = 0$, et il résulte de (6.1) que les hamiltoniens $H_1, \ldots, H_{d-1}$ sont fonctionnellement indépendants.

Pour que les limites de H_d, H_{d+1} et H_{d+2} aient un sens, il faut préciser les croissances relatives de a_d, a_{d+1}, a_{d+2}. Si par exemple $a_{d+1} = 2a_d$ et $a_{d+2} = a_d + 1$, on obtient à la limite $H_d = su$; on peut obtenir de même $H_d = st$ et $H_{d+1} = tu$. Un lemme élémentaire d'algèbre linéaire montre que si une dérivation annule les trois produits tu, su et st, elle doit annuler chacune des fonctions s, t, u. On conclut que *les fonctions* $H_1, \ldots, H_{d-1}$, *jointes à l'une des fonctions* $|x|^2, |y|^2$ *ou* $\langle x|y \rangle$, *forment un système complet de hamiltoniens en involution sur* $\mathbf{C}^{2d-2}$. Le flot hamiltonien associé à $H = \frac{1}{2}\Sigma(a_k)^{1/2} H_k$ décrit des mouvements particuliers d'un solide à n dimensions autour d'un point fixe (cas particulier des équations d'Arnold–Euler, cf. [A–vM]).

(6.6) Nous considérons dans les deux exemples qui suivent le cas $a_{d+1} = a_{d+2} = \infty$, pour lequel nous adoptons les notations de (5.7). Prenons $C_1 = \ldots = C_d = \mathcal{N}$, et déterminons la classe de conjugaison $\mathscr{C}_\infty$ dans $M_2(\mathbf{C}[\varepsilon])$ par les conditions

$$\operatorname{Tr}(A_\infty + \varepsilon A'_\infty) = 0, \quad \det(A_\infty + \varepsilon A'_\infty) = \varepsilon.$$

Pour tout $\mathbf{B} \in \mathcal{N}^d \times \mathscr{C}_\infty$, il existe un unique élément g de $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{C})$ tel que le conjugué $(A_1, \ldots, A_d, A_\infty + \varepsilon A'_\infty)$ de $\mathbf{B}$ par g satisfasse à

$$A_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A'_\infty = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ s & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } s \in \mathbf{C}.$$

Si l'on pose $A_i = \tau(x_i, y_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$, la relation $A'_\infty = \Sigma A_i + \sigma A_\infty$ (5.7) entraîne

$$|x|^2 = 1; \quad \langle x|y \rangle = 0; \quad s = |y|^2 - \sigma.$$

Notons $T_{\mathbf{C}}(S^{d-1})$ la sous-variété de $\mathbf{C}^{2d}$ définie par les équations $|x|^2 = 1$, $\langle x|y \rangle = 0$; la structure symplectique de $\mathbf{C}^{2d}$ induit une structure symplectique sur $T_{\mathbf{C}}(S^{d-1})$. Soit i le morphisme de $T_{\mathbf{C}}(S^{d-1})$ dans $\mathcal{N}^d \times \mathscr{C}_\infty$ défini par $i(x,y) = (\tau(x_1, y_1), \ldots, \tau(x_d, y_d), A_\infty + \varepsilon A'_\infty)$, les matrices A_∞ et A'_∞ étant définies par les formules précédentes. Alors i induit par passage au quotient un revêtement étale symplectique de $T_{\mathbf{C}}(S^{d-1})$ sur le quotient symplectique de $\mathcal{N}^d\times\mathscr{C}_\infty$ par $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{C})$. On déduit alors de (5.5) un système hamiltonien complètement intégrable sur $T_{\mathbf{C}}(S^{d-1})$; la formule (5.2′) donne l'expression des fonctions H_k sur $T_{\mathbf{C}}(S^{d-1})$ (pour $1\leq k\leq d$):

$$H_k(x,y)=\sum_{i\neq k}\frac{(x_k y_i-y_k x_i)^2}{a_k-a_i}+x_k^2.$$

D'après (6.1), ces fonctions (liées par la relation $\Sigma H_k=1$) forment un système complet de hamiltoniens en involution sur $T_{\mathbf{C}}(S^{d-1})$. Le flot hamiltonien associé à

$$H=\frac{1}{2}\sum a_k H_k=\frac{1}{2}\sum a_k x_k^2+\frac{1}{2}\sum y_k^2$$

décrit l'évolution d'un point sur S^{d-1} soumis à un potentiel quadratique (système de Neumann). Le flot associé à

$$H_-=\sum a_k^{-1}H_k$$

décrit les géodésiques de l'ellipsoïde $\Sigma a_k^{-1}x_k^2=1$ (cf. [A–vM], [M2]).

(6.7) Prenons encore $a_{d+1}=a_{d+2}=\infty$, $C_1=\ldots=C_d=\mathcal{N}$, et déterminons la classe de conjugaison $\mathscr{C}_\infty$ dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{C}[\varepsilon])$ par les conditions

$$\operatorname{Tr}(A_\infty+\varepsilon A'_\infty)=0,\quad \det(A_\infty+\varepsilon A'_\infty)=-1+2\varepsilon\sigma.$$

Plaçons-nous dans l'ouvert de $\mathcal{N}^d\times\mathscr{C}_\infty$ formé des éléments $\mathbf{B}=(B_1,\ldots,B_d,B_\infty+\varepsilon B'_\infty)$ pour lesquels le coefficient $(B'_\infty)_{12}$ n'est pas nul. Pour un tel $\mathbf{B}$, il existe un unique élément g de $\mathbf{PGL}_2(\mathbf{C})$ tel que le conjugué $(A_1,\ldots,A_d,A_\infty+\varepsilon A'_\infty)$ de $\mathbf{B}$ par g satisfasse à

$$A_\infty=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix};\quad A'_\infty=\begin{pmatrix}\sigma&-1\\s&-\sigma\end{pmatrix},\quad \text{avec } s\in\mathbf{C}.$$

La relation $A'_\infty=\Sigma A_i+\sigma A_\infty$ (5.7) entraîne alors

$$|x|^2=1;\quad \langle x|y\rangle=0;\quad s=|y|^2.$$

On en déduit comme ci-dessus un système hamiltonien complètement intégrable sur $T_{\mathbf{C}}(S^{d-1})$, admettant comme système complet de hamiltoniens en involution les fonctions

$$H_k(x, y) = \sum_{i \neq k} \frac{(x_k y_i - y_k x_i)^2}{a_k - a_i} - 2x_k y_k.$$

Le flot hamiltonien associé à $H = \frac{1}{2} \Sigma\, a_k^{-1} H_k(x, y)$ décrit le mouvement d'un point sur un ellipsoïde soumis à une force centrale [A–vM].

Note ajoutée sur épreuves. Des résultats très voisins de ceux de cet article apparaissent dans le preprint *Isospectral Hamiltonian flows in finite and infinite dimensions II* de M. R. Adams, J. Harnad et J. Hurtubise. Celui-ci s'appuie sur l'article *Isospectral Hamiltonian flows in finite and infinite dimensions* de M. R. Adams, J. Harnad et E. Previato (Comm. Math. Phys., 117 (1988), 451–500), ainsi que sur des travaux plus anciens de l'école soviétique, en particulier *Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations II* de A. G. Reyman et M. A. Semenov-Tian-Shansky (Invent. Math., 63 (1981), 423–432), où apparaissent déjà les systèmes complètement intégrables associés aux courbes spectrales.

Bibliographie

[A] Artin, M., On Azumaya algebras and finite-dimensional representations of rings. *J. Algebra*, 11 (1969), 532–563.

[A–vM] Adler, M. & van Moerbeke, P., Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves; linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory. *Adv. in Math.*, 38 (1980), 267–379.

[BNR] Beauville, A., Narasimhan, M. S. & Ramanan, S., Spectral curves and generalised theta divisor. *J. Reine Angew. Math.*, 398 (1989), 169–179.

[F1] Formanek, E., The center of the ring of 3×3 generic matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 7 (1979), 203–212.

[F2] — The center of the ring of 4×4 generic matrices. *J. Algebra*, 62 (1980), 304–319.

[K] Kempf, G., The equations defining a curve of genus 4. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 97 (1986), 214–225.

[L] Le Bruyn, L., Some remarks on rational matrix invariants. *J. Algebra*, 118 (1988), 487–493.

[Ma] Maruyama, M., The equations of plane curves and the moduli space of vector bundles on $\mathbf{P}^2$. *Algebraic and Topological Theory* (to the memory of T. Miyata), 430–466 (1985).

[M1] Mumford, D. & Fogarty, J., *Geometric Invariant Theory*. 2nd edition, Ergebnisse der Math. 34, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1982).

[M2] Mumford, D., *Tata lectures on Theta II*. Progress in Math. 43, Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart (1984).

[W] Weinstein, A., The local structure of Poisson manifolds. *J. Differential Geom.*, 18 (1983), 523–557.

Reçu le 5 janvier 1989