L'inégalité $p_g \geq 2q - 4$ pour les surfaces de type général

(appendice à un article d'O. Debarre)

Bull. Soc. math. France 110, 343-346 (1982).

APPENDICE

L'INÉGALITÉ p_g $2q-4$ POUR LES SURFACES DE TYPE GÉNÉRAL

PAR

A. BEAUVILLE

Cette inégalité a fait couler beaucoup d'encre. Elle est établie, sauf pour un cas exceptionnel, par ROSENBLATT [R], suivant une idée de Castelnuovo; puis en général par COMESSATTI [C], dont la démonstration est incorrecte. Elle a donné lieu plus récemment à une polémique assez curieuse (*voir* [J] et [N]), d'où ressort l'absence d'une démonstration complète. Nous allons voir que l'inégalité en question résulte facilement du théorème d'Arakelov, joint à l'idée originale de Castelnuovo.

Je profite de l'occasion pour énoncer une version suffisamment générale du théorème d'Arakelov, valable sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque :

THÉORÈME D'ARAKELOV. — *Soient X une surface lisse minimale, B une courbe lisse, $p : X \to B$ un morphisme surjectif, dont la fibre générique est une courbe lisse connexe de genre $\geqslant 2$. Soit $\omega_{X/B} = K_X - p^* K_B$ la classe canonique relative.*

(a) *On a $(\omega_{X/B})^2 \geqslant 0$ et $(\omega_{X/B} . C) \geqslant 0$ pour toute courbe irréductible C sur X.*

(b) *On suppose de plus que p est à modules variables (c'est-à-dire que les fibres lisses de p ne sont pas toutes isomorphes). On a alors $(\omega_{X/B})^2 > 0$ et $(\omega_{X/B} . C) > 0$, sauf si C est une courbe rationnelle lisse d'auto-intersection -2 contenue dans une fibre de p.*

Démonstration. — Lorsque la fibration p est semi-stable, ces propriétés sont démontrées dans [S]. Dans le cas général, il existe un revêtement ramifié $r : D \to B$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[drr, "q"'] & & Y' \arrow[ll, "\varepsilon"'] \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q'"] & X \arrow[d, "p"] \\ & & D \arrow[r, "r"'] & B \end{tikzcd}$$

où Y' est obtenu en désingularisant $X \times_B D$, $\varepsilon : Y' \to Y$ contracte les diviseurs exceptionnels contenus dans les fibres, et où q est une fibration semi-stable.

La théorie du faisceau dualisant montre qu'on a :

$$\omega_{Y/D} \equiv \pi^* \omega_{X/B} - \Delta'$$

où Δ' est un diviseur effectif, contenu dans des fibres de q'; par suite :

$$\varepsilon^* \omega_{Y/D} \equiv \pi^* \omega_{X/B} - \Delta$$

où Δ est effectif et contenu dans des fibres de q'.

Soit C une courbe irréductible sur X. Si C est contenue dans une fibre de p, on a :

$$\omega_{X/B} . C = 2g(C) - 2 - C^2 \geqslant 0$$

puisque X est minimale; de plus l'égalité a lieu si et seulement si $C^2 = -2$, $g(C) = 0$.

Si C n'est pas contenue dans une fibre, il existe une courbe irréductible Γ dans Y', non contenue dans une fibre de q', telle que $\pi(\Gamma) = C$; on a donc $\pi_* \Gamma = dC$, avec $d \in \mathbb{N}$, et :

$$\omega_{X/B} . C = \frac{1}{d}(\pi^* \omega_{X/B} . \Gamma) = \frac{1}{d}(\varepsilon^* \omega_{Y/D} + \Delta) . \Gamma = \frac{1}{d}((\omega_{Y/D} . \varepsilon_* \Gamma) + (\Delta . \Gamma))$$

d'où $\omega_{X/B} . C \geqslant 0$ d'après le cas semi-stable; l'égalité n'a lieu que si q, et donc p, sont à modules constants.

On a finalement :

$$(\omega_{Y/D})^2 = (\varepsilon^* \omega_{Y/D})^2 = (\pi^* \omega_{X/B})^2 - \Delta . \varepsilon^* \omega_{Y/D} - \Delta . \pi^* \omega_{X/B}$$

d'où $(\omega_{X/B})^2 \geqslant (\deg \pi)^{-1} (\omega_{Y/D})^2$ d'après ce qui précède; le théorème résulte alors du cas semi-stable.

COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses du théorème, soient b le genre de B et f le genre de la fibre générique. On a :*

(i) $K_X^2 \geqslant 8(b-1)(f-1)$.

(ii) $\chi_{\text{top}}(X) \geqslant 4(b-1)(f-1)$.

(iii) $\chi(\mathcal{O}_X) \geqslant (b-1)(f-1)$.

La première formule exprime la positivité de $(K_X - p^* K_B)^2$; la seconde résulte de [Ch], chap. IV, th. 6 et 7. La troisième est conséquence des deux premières et de la formule de Noether :

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{12}(K_X^2 + \chi_{\text{top}}(X)).$$

Remarque. — Si on a égalité dans (i), la fibration p est à modules constants; dans (ii), p est lisse ([Ch], *loc. cit.*); dans (iii), p est lisse et à modules constants.

On se place désormais sur le corps des nombres complexes.

LEMME. — *Soient X une surface lisse, B une courbe lisse de genre b, $p : X \to B$ un morphisme surjectif à fibres connexes, f le genre d'une fibre générale F de p. On a alors $q(X) \leqslant b+f$; en cas d'égalité, X est birationnellement équivalente à $B \times F$.*

Démonstration. — Notons L le corps des fonctions rationnelles sur B. On a une suite exacte de variétés abéliennes :

$$0 \to J(B) \to \mathrm{Pic}^0(X) \to P \to 0,$$

où P est la *partie fixe* (ou $L/\mathbb{C}$-trace) de la jacobienne de la fibre générique F_L (*voir* [*L*], chap. VIII); cela entraîne (*loc. cit.*) qu'il existe un homomorphisme injectif $\varphi : P_L \to J(F_L)$. On a en particulier $\dim(P) \leqslant f$, d'où l'inégalité $q(X) \leqslant b+f$.

Supposons qu'il y ait égalité. Alors φ est un isomorphisme, et il existe un ouvert non vide (de Zariski) $\cup$ de B tel que le schéma de Picard $Pic^0(X/B)$ soit *constant* au-dessus de $\cup$. Il en est donc de même, pour tout n, des systèmes locaux $R^1 p_* (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Quitte à rétrécir $\cup$, on peut supposer p lisse au-dessus de $\cup$; en choisissant une base symplectique de $R^1 p_* (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, pour n fixé $\geqslant 3$, on définit un morphisme de $\cup$ dans le schéma de modules fins des courbes de genre f et de niveau n. D'après le théorème de Torelli, l'image de ce morphisme est réduite à un point, ce qui signifie que la fibration p est triviale au-dessus de $\cup$, donc que X est birationnellement équivalente à $B \times F$.

THÉORÈME. — *Soit X une surface minimale de type général. On a alors $p_g \geqslant 2q-4$; en cas d'égalité, X est isomorphe au produit d'une courbe de genre 2 et d'une courbe de genre $\geqslant 2$.*

Démonstration. — Supposons que X vérifie l'inégalité $p_g \leqslant 2q-4$ (c'est-à-dire $\chi(\mathcal{O}_X) \leqslant q-3$). D'après Castelnuovo (*cf.* [B], X.8 et X.9), il existe une courbe lisse B, de genre $b \geqslant 2$, et un morphisme surjectif à fibres connexes $p : X \to B$. On a :

$\chi(\mathcal{O}_X) \geqslant (b-1)(f-1)$ (corollaire), $\geqslant (b-2)(f-2)+b+f-3 \geqslant q-3$ (lemme).

L'hypothèse entraîne qu'on a égalité, c'est-à-dire :

$$(b-2)(f-2)=0 \qquad \text{et} \qquad b+f=q;$$

le lemme entraîne alors que X est isomorphe à $B \times F$, l'une des courbes B ou F étant de genre 2.

BIBLIOGRAPHIE

[B] BEAUVILLE (A.). — Surfaces algébriques complexes, *Astérisque*, n° 54, 1978.

[C] COMESSATTI (A.). — Intorno alle superficie algebriche irregolari con $p_g \geqslant 2(p_a+2)$ e ad un problema analitico ad esse collegato, *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, vol. 46, 1922, p. 1-48.

[Ch] CHAFAREVITCH (I.) *et al.* — Algebraic surfaces, *Proc. of the Steklov Institute*, vol. 75, 1965.

[J] JONGMANS (F.). — Sur l'étude des surfaces algébriques caractérisées par la condition $p_g \geqslant 2(p_a+2)$, *Bull. Acad. Roy. de Belgique*, s.5, 36, 1950, p. 485-494.

[L] LANG (S.). — *Abelian varieties*, Interscience Wiley, New York, 1959.

[N] NOLLET (L.). — Sur l'étude des surfaces algébriques caractérisées par la condition $p_g \geqslant 2(p_a+2)$, *Bull. Acad. Roy. de Belgique*, s.5, 36, 1950, p. 897-905.

[R] ROSENBLATT (A.). — Sur les surfaces irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité $p_g \geqslant 2(p_a+2)$, *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, vol. 35, 1913, p. 237-244.

[S] SZPIRO (L.). — Sur le théorème de rigidité de Parsin et Arakelov. Journées de Géométrie algébrique de Rennes, *Astérisque*, n° 64, 1979, p. 169-202.