LE NOMBRE MINIMUM DE FIBRES SINGULIÈRES D'UNE COURBE STABLE SUR $\mathbb{P}^1$

par Arnaud BEAUVILLE

exposé n° 6

Cet exposé tente de répondre à la question suivante, posée par Szpiro. Une famille non constante de courbes stables de genre g sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ admet un certain nombre de fibres singulières ; quel est le plus petit nombre possible (en fonction de g) ?

Sauf mention du contraire, les variétés considérées sont complexes ; mais nous dirons quelques mots sur la situation en caractéristique p, qui est plus compliquée.

1. Résultats sans hypothèse de stabilité.

Si on enlève la condition de stabilité, le résultat est, je pense, bien connu :

PROPOSITION 1. 1) Toute famille de courbes sur $\mathbb{P}^1$, à modules variables, admet au moins 3 fibres singulières.

2) Pour tout $g \geqslant 1$, il existe une famille de courbes de genre g sur $\mathbb{P}^1$ à modules variables, admettant exactement 3 fibres singulières.

(par "famille de courbes" on entend un morphisme propre et plat $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ dont les fibres sont des courbes connexes ; "à modules variables" signifie que les fibres lisses de f ne sont pas toutes isomorphes - d'aucuns diraient "non isotriviale").

DÉMONSTRATION. Soit U le plus grand ouvert de $\mathbb{P}^1$ au-dessus duquel f est lisse, et soit $\tilde{U}$ son revêtement universel. Le système local $R^1f_*(\mathbb{Z})$ devient constant au-dessus de $\tilde{U}$. En en choisissant une base symplectique, on définit un morphisme de $\tilde{U}$ dans le demi-espace de Siegel H_g ; d'après le théorème de Torelli et l'hypothèse que la famille est à modules variables, ce morphisme n'est pas constant.

Puisque H_g est isomorphe à un domaine borné, ceci entraîne que U n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$ ni à $\mathbb{P}^1$ (théorème de Liouville), donc $\mathbb{P}^1 - U$ contient au moins trois points.

Pour $t \in \mathbb{P}^1$ et $n \geqslant 3$, considérons la courbe C_t d'équation affine $y^2 = x^n - ntx + (n-1)t$. Pour $t \neq 0, 1, \infty$, c'est une courbe hyperelliptique lisse, de genre $[\frac{n-1}{2}]$; on vérifie facilement que la famille $(C_t)_{t \in \mathbb{P}^1}$ est à modules variables. Ceci achève de prouver la proposition.

Que peut-on dire en caractéristique p ? La partie 2) de la proposition reste encore valable : si $p \neq 2$, on peut reprendre la construction précédente ; le cas $p = 2$ est laissé au lecteur en exercice. La partie 1) n'est plus valable en caractéristique p ; on a cependant le résultat suivant :

PROPOSITION 2. Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p. Si $p > 2g+1$, toute famille de courbes de genre g sur $\mathbb{P}^1_k$, à modules variables, admet au moins 3 fibres singulières.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que l'hypothèse $p > 2g+1$ entraîne qu'il existe un nombre premier ℓ, différent de p et de 2, tel que l'ordre du groupe $GL(2g;\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ ne soit pas divisible par p.

En effet, l'ordre de $GL(2g,\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est égal à $(\ell^{2g}-1)(\ell^{2g-1}-1)\ldots(\ell-1)\ell^{g(2g-1)}$. Il suffit de choisir ℓ de façon que sa classe modulo p soit un générateur du groupe cyclique $\mathbb{F}_p^*$, et soit donc d'ordre $p-1 > 2g$ (on peut choisir ℓ premier impair en vertu du théorème de la progression arithmétique).

Supposons maintenant $g \geqslant 2$. Notons $\mathbb{G}_m$ la droite affine (sur k) privée de l'origine. Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver qu'une famille $f : X \longrightarrow \mathbb{G}_m$ de courbes lisses de genre g est nécessairement isotriviale. Choisissons ℓ comme ci-dessus, et considérons le faisceau localement constant $R^1 f_*(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Il correspond à un homomorphisme :

$$\rho : \pi_1(\mathbb{G}_m, .) \longrightarrow GL(2g, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) .$$

Puisque $GL(2g,\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ est d'ordre premier à p, ρ se factorise à travers le π_1 modéré de $\mathbb{G}_m$; cela signifie qu'il existe un entier k tel que, pour la fibration $f' : X' \longrightarrow \mathbb{G}_m$ image réciproque de f par le morphisme $x \longmapsto x^k$, le faisceau $R^1 f'_*(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ soit constant. Or ce faisceau s'identifie au faisceau des points d'ordre ℓ de la jacobienne relative $\underline{\mathrm{Pic}}^{o}(X'/\mathbb{G}_m)$; le fait qu'il est constant entraîne que ce schéma abélien a <u>réduction semi-stable</u> en 0 et à l'infini ([D], cor. 5.18). Il en est de même par conséquent de la famille de courbes $f' : X' \longrightarrow \mathbb{G}_m$ ([D], prop. 5.7) ; autrement dit, il existe une fibration semi-stable $\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ qui prolonge f' . Ayant au plus 2 fibres singulières, la fibration $\tilde{f}$ est isotriviale ([S], Th. 3.3), et il en est de même de la fibration f .

Il reste à traiter le cas $g = 1$. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration en courbes de genre 1 , lisse en dehors de $\{0,\infty\}$. Quitte à remplacer f par la fibration jacobienne associée, on peut supposer que f admet une section. Considérons le morphisme classifiant $j : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$; il se factorise en $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{r} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{j'} \mathbb{P}^1$, où r est radiciel et où j' est séparable, ramifié en 0 , 1728 et à l'infini ; de plus, puisque $p > 3$, l'indice de ramification d'un point de $j'^{-1}(0)$ (resp. $j'^{-1}(1728)$) est divisible par 2 (resp. 3). Si on note n le degré de j' , la formule de Riemann-Hurwitz conduit à l'inégalité :

$$-2 \geqslant -2n + \frac{n}{2} + \frac{2n}{3} + n - 2$$

soit $n \leqslant 0$, d'où contradiction.

Il est facile de voir que la condition $p > 2g+1$ est nécessaire : en caractéristique $p > 2$, l'équation

$$y^2 = x^p + tx^{p-1} + 1 \qquad (t \in \mathbb{G}_m)$$

décrit une famille lisse sur $\mathbb{G}_m$, à modules variables, de courbes hyperelliptiques de genre g , avec $p = 2g+1$. Il est plus délicat de construire des familles lisses à modules variables sur la droite affine ; Raynaud m'a indiqué, en caractéristique 2 et en genre $g \geqslant 2$, la courbe d'équation $y^2 + y = x^{2g+1} + tx$ $(t \in \mathbb{A}^1)$. En caractéristique p , on peut de même considérer la courbe $y^p + y = x^{kp-1} + tx$ $(t \in \mathbb{A}^1)$.

Par contre l'argument de la proposition (modifié pour tenir compte de la caractéristique 2 ou 3) montre qu'il n'existe pas de famille lisse de courbes elliptiques, à modules variables, sur la droite affine.

2. Enoncé du théorème principal.

Nous ne considérons désormais que des familles $Y \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ stables. La surface Y peut avoir dans ce cas des points doubles (de type A_n). En les résolvant par éclatements successifs, on arrive à une fibration semi-stable $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$; cela signifiera pour nous, par définition, que :

(i) la surface X est lisse ;

(ii) les fibres sont des courbes connexes de genre $\geqslant 1$, ayant au plus des points doubles ordinaires ;

(iii) il n'existe pas de courbe exceptionnelle sur X contenue dans une fibre.

On dit qu'une telle fibration est triviale s'il existe une courbe C et un isomorphisme $u : X \longrightarrow C \times \mathbb{P}^1$ tel que $pr_2 \circ u = f$.

THÉORÈME. Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration semi-stable non triviale.

1) f admet au moins 4 fibres singulières.

2) Supposons que f ait exactement 4 fibres singulières. Alors la surface X est algébriquement simplement connexe et vérifie $p_g = 0$. Les composantes irréductibles des fibres singulières sont des courbes rationnelles (éventuellement singulières) ; les classes de ces composantes engendrent un hyperplan dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathrm{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q}$.

Les conditions imposées par 2) sont très contraignantes, à la fois pour la surface et pour le pinceau de courbes qu'elle doit contenir. La surface X peut être :

(i) une surface rationnelle ;

(ii) une surface elliptique sur $\mathbb{P}^1$, telle que la fibration elliptique admette exactement deux fibres multiples, de multiplicités premières entre elles, et que la surface fibrée en jacobiennes associée soit rationnelle (cf. [Do]) ;

(iii) une surface de type général (avec $p_g = 0$ et $\pi_1^{alg} = \{1\}$).

(Un exemple de surface du type (iii) vient d'être donné par R. Barlow).

Nous verrons plus loin un exemple de fibration semi-stable avec 4 fibres singulières ; les fibres sont de genre un, et la surface X rationnelle. Je ne connais pas d'exemple avec des fibres de genre $\geqslant 2$, et j'ai tendance à penser qu'il n'en existe pas.

3. Quelques lemmes.

Nous regroupons dans ce numéro quelques faits bien connus dont nous aurons besoin.

LEMME 1. Dans la situation du théorème, soient C une fibre singulière, N sa normalisée, g le genre de la fibre générique ; on note $g(N) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(N,\mathcal{O}_N)$ et $q = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathcal{O}_X)$.

a) On a $\operatorname{rg}_{\mathbb{Z}} H^1(C,\mathbb{Z}) = g + g(N)$.

b) On a $g(N) \geqslant q$.

DÉMONSTRATION. Notons $\pi : N \longrightarrow C$ le morphisme canonique, Σ l'ensemble des points doubles de C , $\mathbb{Z}_C$ (resp. $\mathbb{Z}_N$) le faisceau constant de fibre $\mathbb{Z}$ sur C (resp. N), $\mathbb{Z}(s)$ (resp. $\mathbb{C}(s)$) le faisceau sur C nul en dehors de s et de fibre $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{C}$) en s . Considérons les suites exactes :

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_C \longrightarrow \pi_*\mathbb{Z}_N \longrightarrow \bigoplus_{s\in\Sigma} \mathbb{Z}(s) \longrightarrow 0$$

$$(1') \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \pi_*\mathcal{O}_N \longrightarrow \bigoplus_{s\in\Sigma} \mathbb{C}(s) \longrightarrow 0 ,$$

ainsi que les suites exactes de cohomologie associées :

$$(2) \quad 0 \longrightarrow H^0(C,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(N,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^{\Sigma} \longrightarrow H^1(C,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(N,\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

$$(2') \quad 0 \longrightarrow H^0(C,\mathcal{O}_C) \longrightarrow H^0(N,\mathcal{O}_N) \longrightarrow \mathbb{C}^{\Sigma} \longrightarrow H^1(C,\mathcal{O}_C) \longrightarrow H^1(N,\mathcal{O}_N) \longrightarrow 0$$

Notant n le nombre de points doubles de C et c le nombre de ses composantes irréductibles, on en déduit :

$$(3) \qquad \operatorname{rg}_{\mathbb{Z}} H^1(C,\mathbb{Z}) = 2g(N) + n - c + 1$$

$$(3') \qquad g = g(N) + n - c + 1$$

d'où par soustraction l'assertion a).

Pour prouver b), il suffit de prouver que l'homomorphisme $J(N) \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$ est surjectif. Notons Q son conoyau et $\alpha : X \longrightarrow Q$ l'application déduite du morphisme d'Albanese. Par construction, l'image de la fibre C par α est réduite à un point ; le lemme de rigidité ([M], prop. 6.1) entraîne qu'il en est de même pour toutes les fibres de f , et plus précisément qu'il existe un morphisme $\beta : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Q$ tel que $\alpha = \beta \circ f$. Un tel morphisme étant nécessairement trivial, l'image de α est réduite à un point ; puisque $\alpha(X)$ engendre Q , on a $Q = \{0\}$, d'où l'assertion b).

Rappelons qu'on note $NS(X)_{\mathbb{Q}}$ le sous-espace vectoriel de $H^2(X,\mathbb{Q})$ engendré par les classes algébriques, et $\rho(X)$ sa dimension ("nombre de Picard").

LEMME 2. <u>Soient</u> $C_1,\dots,C_p$ <u>les fibres réductibles de</u> f , <u>et soit</u> c_i <u>le nombre de composantes irréductibles de</u> C_i . <u>Les composantes des</u> C_i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ <u>engendrent dans</u> $NS(X)_{\mathbb{Q}}$ <u>un sous-espace de dimension</u> $1 + \sum_i (c_i-1)$; <u>en particulier</u>, <u>on a</u>

$$\rho(X) \geqslant 2 + \sum_i (c_i-1) .$$

DÉMONSTRATION. Soit P l'orthogonal de C dans $NS(X)_{\mathbb{Q}}$ (pour la forme d'intersection) ; munissons l'espace quotient $\bar{P} = P/\mathbb{Q}C$ de la forme φ induite par la forme d'intersection. Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, soit P_i le sous-espace de $NS(X)_{\mathbb{Q}}$ engendré par les composantes de C_i , et soit $\bar{P}_i = P_i/\mathbb{Q}C$ son image dans $\bar{P}$; on a $\dim \bar{P}_i = c_i-1$. Les sous-espaces $\bar{P}_i$ sont deux à deux orthogonaux dans $\bar{P}$, et la restriction de φ à $\bar{P}_i$ est non dégénérée (cf. par exemple [B], cor. VIII.4). Ceci entraîne que les sous-espaces $\bar{P}_i$ sont en somme directe, donc que

$$\dim \sum_i \bar{P}_i = \sum_i (c_i-1)$$

et par suite $\dim \sum_i P_i = 1 + \sum_i (c_i-1)$.

La dernière assertion résulte de ce que l'inclusion $P \subset NS(X)_{\mathbb{Q}}$ est stricte.

4. <u>Démonstration du théorème</u>.

Notons $C_1,\dots,C_r$ les fibres singulières de f ; nous supposons $r \leqslant 4$. Si $r < 4$, notons $C_{r+1},\dots,C_4$ des fibres <u>lisses</u> quelconques de f . On désigne par N_i la normalisée de C_i et par c_i le nombre de composantes irréductibles de C_i .

A. <u>Le calcul de base</u>.

Calculons la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique $\chi(X)$ de X . En désignant par C une fibre lisse de f , on a (par exemple d'après [B], lemme VI.4) :

$$\chi(X) = \chi(\mathbb{P}^1).\chi(C) + \sum_{i=1}^{4} (\chi(C_i)-\chi(C)) .$$

Calculons la différence $\chi(C_i) - \chi(C)$. On a :

$$b_o(C_i) = b_o(C) = 1 \text{ , d'où } b_o(C_i) - b_o(C) = 0$$

$$b_2(C_i) = c_i \text{ et } b_2(C) = 1 \text{ , d'où } b_2(C_i) - b_2(C) = c_i - 1$$

et d'après le lemme 1, a) : $b_1(C) - b_1(C_i) = g - g(N_i)$.

On obtient par conséquent

$$\chi(X) = 4 - 4g + \sum_{i=1}^{4} (g - g(N_i)) + \sum_{i=1}^{4} (c_i - 1) .$$

D'autre part on a

$$\chi(X) = 2 - 2b_1(X) + b_2(X) = 2 - 4q + b_2(X) .$$

En comparant, on obtient l'égalité

$$b_2(X) = 2 + \sum_i (c_i - 1) + \sum_i (q - g(N_i)) \qquad (*)$$

On déduit alors des lemmes 1 b) et 2 les inégalités

$$2 + \sum_i (c_i - 1) \leqslant \rho(X) \leqslant b_2(X) \leqslant 2 + \sum_i (c_i - 1) ;$$

les termes extrêmes étant égaux, on a en fait égalité. Ceci a plusieurs conséquences :

(i) On a $p_g(X) = 0$: cela résulte de l'égalité $\rho(X) = b_2(X)$.

(ii) Compte tenu du lemme 2 , l'égalité $\rho(X) = 2 + \sum_i (c_i - 1)$ signifie que les composantes des C_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ engendrent un hyperplan dans $NS(X)_{\mathbb{Q}}$.

(iii) On a $g(N_i) = q$ pour $1 \leqslant i \leqslant 4$ (à cause de l'égalité $b_2(X) = 2 + \sum_i (c_i - 1)$, comparée à $(*)$).

B. <u>Démonstration de l'assertion</u> 1).

Supposons que f ait au plus 3 fibres singulières. La courbe C_4 étant alors lisse, on a $g(C_4) = q$ d'après ce qui précède, d'où $g = q$. On a donc $\dim J(N_i) = g$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, ce qui signifie que la jacobienne généralisée $J(C_i)$ est une variété abélienne (de dimension g). Les jacobiennes $J(f^{-1}(t))$, pour $t \in \mathbb{P}^1$, forment donc une famille de variétés abéliennes principalement polarisées sur $\mathbb{P}^1$ (autrement dit, <u>Pic</u>$^o(X/\mathbb{P}^1)$ est un schéma abélien sur $\mathbb{P}^1$) ; une telle famille est constante (on peut le voir en raisonnant comme dans la démonstration de la prop. 1). Par le théorème de Torelli, les fibres lisses de f sont toutes isomorphes. Puisque f est une fibration semi-stable sur $\mathbb{P}^1$, on en conclut que f est triviale, contrairement à l'hypothèse.

Nous supposons désormais que f a exactement 4 fibres singulières.

C. Le cas $q \geqslant 2$.

La surface X, satisfaisant à $p_g = 0$ et $q \geqslant 2$, est réglée ([B], lemme VI.1 et prop. VI.2) ; il existe donc une courbe lisse B de genre q et un morphisme $p : X \longrightarrow B$ dont les fibres F_b $(b \in B)$ sont rationnelles. Puisque $g(N_i) = q$, il résulte de la formule de Riemann-Hurwitz que C_i est réunion d'une section de p et d'un certain nombre de composantes des courbes F_b $(b \in B)$. Mais on a alors $C.F_b = 1$, ce qui entraîne que les fibres lisses de f sont des sections de p ; en particulier elles sont toutes isomorphes à B, ce qui permet comme plus haut d'aboutir à une contradiction.

Nous aurons besoin dans la suite de l'observation suivante :

LEMME 3. *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration semi-stable, et soit $r : \tilde{X} \longrightarrow X$ un revêtement étale connexe. Alors la fibration $f \circ r : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est semi-stable et admet le même nombre de fibres singulières que f.*

En effet, les fibres de $\tilde{f} = f \circ r$ sont des revêtements étales des fibres de f ; le seul point non trivial à démontrer est le fait qu'elles sont connexes. Si elles ne l'étaient pas, $\tilde{f}$ se factoriserait en $\tilde{X} \longrightarrow R \xrightarrow{u} \mathbb{P}^1$, où R est une courbe lisse et u un revêtement ramifié : la fibre de $\tilde{f}$ au-dessus d'un point de ramification de u serait non réduite, ce qui est absurde.

D. Le cas $q = 1$.

La fibration d'Albanese fournit encore un morphisme $p : X \longrightarrow B$ à fibres connexes, avec $g(B) = 1$ ([B], prop. V.15). Fixons un indice i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ et posons $C = C_i$, $N = N_i$. Puisque $g(N) = 1$, la courbe C est réunion de courbes rationnelles, contenues dans les fibres de p, et d'une courbe irréductible C', dont la normalisée N' est une courbe elliptique. Le morphisme p induit un revêtement étale $\pi : N' \longrightarrow B$.

Si π est de degré un, on peut appliquer le raisonnement de la partie C ; supposons donc $\deg(\pi) > 1$. Posons $\tilde{X} = X \times_B N'$ et notons $r : \tilde{X} \longrightarrow X$ la première projection. Posons $\tilde{C}' = r^{-1}(C')$, $\tilde{C} = r^{-1}(C)$; soit $\tilde{N}'$ (resp. $\tilde{N}$) la normalisée de $\tilde{C}'$ (resp. $\tilde{C}$), de sorte qu'on a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{N}' & \longrightarrow & N' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{C}' & \xrightarrow[r]{} & C' \end{array} .$$

Par construction, le revêtement étale $\tilde{N}' \longrightarrow N'$ admet une section ; puisque $\deg(r) > 1$, on a donc $g(\tilde{N}') \geqslant 2$. Ainsi la normalisée $\tilde{N}$ de la fibre $\tilde{C}$ de $\tilde{f}$ est de genre $\geqslant 2$.

D'autre part, d'après le lemme 3, la fibration $\tilde{f}$ possède les propriétés (i) à (iii) de la partie A. On a donc $p_g(\tilde{X}) = 0$, d'où $q(\tilde{X}) = 1$ puisque $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \deg(r).\chi(\mathcal{O}_X) = 0$. Mais on a aussi (propriété (iii)) $g(\tilde{N}) = q(\tilde{X}) = 1$, d'où une contradiction avec ce qui précède.

E. Fin de la démonstration.

On a donc $q=0$. Notons que la propriété (iii) de A entraîne alors $g(N_i) = 0$, autrement dit les composantes irréductibles des fibres sont des courbes rationnelles. Il reste à montrer que X est algébriquement simplement connexe, c'est-à-dire n'admet pas de revêtement étale non trivial. Or soit $r : \tilde{X} \longrightarrow X$ un tel revêtement ; d'après le lemme 3 et la partie A , on a $p_g(\tilde{X}) = 0$, d'où $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \leqslant 1$. Mais d'autre part :

$$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \deg(r).\chi(\mathcal{O}_X) = \deg(r) \geqslant 2 ,$$

d'où une contradiction. Ceci achève la démonstration du théorème.

REMARQUE. Les lemmes 1 et 2 restent valables en caractéristique p , ainsi que la partie A de la démonstration et le début de B (il faut prendre $q = \frac{1}{2}b_1(X) = \dim \mathrm{Alb}(X)$; noter qu'on ne peut plus conclure $p_g(X) = 0$ de l'égalité $\rho(X) = b_2(X)$). On obtient donc, en caractéristique quelconque, le résultat suivant :

Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ une fibration semi-stable, admettant au plus 3 fibres singulières. Alors $\mathrm{Pic}^0(X/\mathbb{P}^1)$ est un schéma abélien sur $\mathbb{P}^1$. Autrement dit, les composantes d'une fibre singulière sont lisses, et le graphe d'intersection de ces composantes est un arbre.

Des fibrations semi-stables ayant cette dernière propriété ont été construites par Moret-Bailly [MB] ; ses exemples ont plus de trois fibres singulières. D'autre part Szpiro a montré qu'une fibration semi-stable non triviale sur $\mathbb{P}^1$ a (en caractéristique quelconque) au moins 3 fibres singulières [S].

5. <u>Exemples</u>.

EXEMPLE 1. Une fibration semi-stable avec 4 fibres singulières $(g=1)$. Il s'agit de la "cubique de Hesse", d'équation

$$C_t : (X^3+Y^3+Z^3) - 3t\, XYZ = 0 \qquad (t \in \mathbb{P}^1) .$$

Cette équation définit un pinceau de cubiques dans $\mathbb{P}^2$, admettant 9 points base distincts. Soient X la surface obtenue en éclatant ces 9 points dans $\mathbb{P}^2$, et $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme défini par le pinceau : c'est une fibration semi-stable, à fibres de genre 1 . Un calcul facile montre que f admet exactement 4 fibres singulières (pour $t = 1, \rho, \rho^2, \infty$, avec $\rho = e^{2i\pi/3}$), qui sont isomorphes à la réunion de 3 droites non concourantes dans $\mathbb{P}^2$.

Cette famille de cubiques a une propriété très particulière : les 9 points d'inflexion d'une courbe C_t lisse sont les points base du pinceau (la hessienne de C_t est elle-même une cubique du pinceau). En termes plus savants, on a construit la famille modulaire de courbes elliptiques sur $H/\Gamma(3) \cong \mathbb{P}^1 - \{1, \rho, \rho^2, \infty\}$.

EXEMPLE 2. Fibrations semi-stables avec 6 fibres singulières (g quelconque). On part d'une courbe lisse C, d'un morphisme $\varphi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ de degré n et d'un automorphisme u de $\mathbb{P}^1$. On fait les hypothèses suivantes :

(i) les points de ramification de φ sont tous d'indice 2 ;

(ii) le lieu de ramification R de φ dans $\mathbb{P}^1$ est stable par u, mais ne contient aucun point fixe de u.

Dans $C \times \mathbb{P}^1$, considérons les diviseurs Γ_φ et $\Gamma_{u\circ\varphi}$, graphes de φ et $u\circ\varphi$ respectivement. Ils sont linéairement équivalents, par exemple parce que le groupe $PGL(2)$ est une variété rationnelle. Il existe donc un revêtement double $\pi : X' \longrightarrow C \times \mathbb{P}^1$ ramifié le long de $\Gamma_\varphi \cup \Gamma_{u\circ\varphi}$. Notons $g : X' \longrightarrow \mathbb{P}^1$ le morphisme composé de π et de la seconde projection. Pour $t \in \mathbb{P}^1$, la fibre $g^{-1}(t)$ est un revêtement double de C, ramifié le long du diviseur $\varphi^{-1}(t) + \varphi^{-1}(u^{-1}(t))$. Ce diviseur est réduit sauf pour $t \in R$, ou lorsque t est un des deux points fixes de u ; dans ces deux cas, les points non réduits sont de multiplicité 2 .

Il en résulte que les fibres de g sont stables. En éclatant les points doubles de X' (à savoir les points au-dessus de $\Gamma_\varphi \cap \Gamma_{u\circ\varphi}$), on obtient une fibration semi-stable $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$, qui admet $\mathrm{Card}(R)+2$ fibres singulières. Le genre des fibres est $n-1+2g(C)$.

Nous allons maintenant construire des morphismes $\varphi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ satisfaisant à l'hypothèse (i), avec $\mathrm{Card}(R)=4$; il est clair qu'on peut ensuite trouver un automorphisme u de $\mathbb{P}^1$ satisfaisant à (ii). Si n est pair, soit $r : E \longrightarrow \mathbb{P}^1$ un revêtement double ramifié en 4 points (donc $g(E)=1$), et soit $s : C \longrightarrow E$ un revêtement étale de degré $\frac{n}{2}$; le morphisme $\varphi = r\circ s$, de degré n, répond à la question. La fibration semi-stable associée a 6 fibres singulières, et ses fibres sont de genre $n+1$.

Si n est impair, on montre de même qu'il existe un morphisme $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ de degré n, satisfaisant à (i), avec $\mathrm{Card}(R) = 4$ (on construit φ comme revêtement associé à un homomorphisme $\pi_1(\mathbb{P}^1-R) \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ convenable). On obtient ainsi une famille semi-stable de courbes de genre $n-1$, avec 6 fibres singulières.

REMARQUES. 1) En appliquant ce qui précède au morphisme $\varphi : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ de degré 4 défini par $\varphi(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$ (quotient de $\mathbb{P}^1$ par $(\mathbb{Z}/2)\times(\mathbb{Z}/2)$), qui satisfait à (i) avec $\mathrm{Card}(R) = 3$, on obtient une fibration semi-stable (sur $\mathbb{P}^1$) à fibres de genre 3 , avec 5 fibres singulières.

2) En considérant de même le morphisme de degré 2 $t \longmapsto t^2$ de $\mathbb{P}^1$ dans lui-même, on obtient une autre famille semi-stable de courbes elliptiques avec 4 fibres singulières, définie par l'équation

$$y^2 = (x^2-t)(x^2-\tfrac{1}{t}) \qquad (t \in \mathbb{P}^1) .$$

C'est la courbe modulaire pour un sous-groupe d'indice 2 dans $\Gamma(2)$, contenant $\Gamma(4)$.

Bibliographie

[B] A. BEAUVILLE.- Surfaces algébriques complexes. Astérisque n° 54 (1978).

[D] M. DESCHAMPS.- Réduction semi-stable. Exposé n° 1, ce volume.

[Do] I. DOLGACHEV.- Algebraic surfaces with $q = p_g = 0$. Notes du CIME (1977), à paraître (?).

[M] D. MUMFORD.- Geometric invariant theory. Springer-Verlag (1965).

[MB] L. MORET-BAILLY.- Famille de courbes et de variétés abéliennes sur $\mathbb{P}^1$. Exposés n° 7, 8, ce volume.

[S] L. SZPIRO.- Exposé n° 3, ce volume.

Arnaud BEAUVILLE
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 PALAISEAU Cédex