Bull. Soc. math. France,
119, 1991, p. 259–291.

FIBRÉS DE RANG DEUX SUR UNE COURBE, FIBRÉ DÉTERMINANT ET FONCTIONS THÊTA, II

PAR

ARNAUD BEAUVILLE (*)

RÉSUMÉ. — Soit $\mathcal{M}_d$ l'espace des modules des fibrés semi-stables de rang 2, de degré d et de déterminant fixé sur une courbe C. Le groupe de Picard de $\mathcal{M}_d$ est engendré par le fibré déterminant $\mathcal{L}$. Soit V l'espace des fonctions thêta du second ordre sur la jacobienne de C ; l'espace $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L})$ s'identifie à V. Nous définissons des homomorphismes $S^2V \to H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2)$ et $\Lambda^2 V \to H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$, qui sont bijectifs lorsque C n'admet pas de thêta-caractéristique spéciale. Nous construisons à l'aide des thêta-caractéristiques de C des bases de $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2)$ et $H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$, et calculons les homomorphismes ci-dessus dans ces bases.

ABSTRACT. — Let $\mathcal{M}_d$ be the moduli space of semi-stable vector bundles of rank 2, degree d and fixed determinant on a curve C. The Picard group of $\mathcal{M}_d$ is generated by the determinant bundle $\mathcal{L}$. Let V be the space of second order theta functions on the Jacobian of C ; the space $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L})$ is canonically isomorphic to V. We define homomorphisms $S^2V \to H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2)$ and $\Lambda^2 V \to H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$, which are bijective when C has no special theta-characteristic. We construct bases for $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2)$ and $H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$ in terms of the theta-characteristics of C, and compute the above homomorphisms using these bases.

Introduction

Soit C une surface de Riemann compacte de genre g. On associe à C, pour chaque paire d'entiers (r, d) avec $r \geq 1$, une variété projective $\mathcal{M}_{r,d}$ qui paramètre les fibrés holomorphes semi-stables sur C, de rang r et de degré d, de déterminant fixé (la notation officielle est $\mathcal{SU}_C(r, d)$). Une construction naturelle de fibré déterminant permet de définir sur cette variété un fibré en droites positif $\mathcal{L}$; tout fibré en droites sur $\mathcal{M}_{r,d}$ est un multiple de $\mathcal{L}$ [D–N].

(*) Texte reçu le 17 octobre 1990, révisé le 4 mars 1991.
A. BEAUVILLE, Université de Paris-Sud, Mathématique, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1991/259/$ 5.00

Les espaces de sections $H^0(\mathcal{M}_{r,d},\mathcal{L}^k)$ ont reçu récemment une attention considérable de la part des physiciens, en liaison avec la théorie conforme des champs et les polynômes de Jones [W]. Dans le cas $d=0$, une formule remarquable pour leur dimension a été proposée par E. Verlinde [V]; je n'arrive pas à savoir s'il en existe une démonstration mathématique. Elle est étendue dans [T] au cas $r=2$, $d=1$.

Dans cet article, nous continuons l'étude entreprise dans [B] de ces espaces dans des cas très particuliers ($r=2$, $k=1$ ou 2), du point de vue de la géométrie des espaces de modules. Nous nous bornons désormais au cas des fibrés de rang 2 ; nous omettrons l'indice r dans la notation. L'espace $\mathcal{M}_d$ est isomorphe à $\mathcal{M}_0$ si d est pair, à $\mathcal{M}_1$ si d est impair.

On a mis en évidence dans [B] un isomorphisme canonique (à un scalaire près) de $H^0(\mathcal{M}_0,\mathcal{L})$ sur l'espace V des fonctions thêta du second ordre sur la jacobienne de C. Nous considérons ici les espaces $H^0(\mathcal{M}_0,\mathcal{L}^2)$ et $H^0(\mathcal{M}_1,\mathcal{L})$. On a

$$\dim H^0(\mathcal{M}_0,\mathcal{L}^2)=2^{g-1}(2^g+1) \quad \text{et}$$

$$\dim H^0(\mathcal{M}_1,\mathcal{L})=2^{g-1}(2^g-1).$$

La première égalité est un cas particulier de la formule générale de Verlinde ; une démonstration rigoureuse en a été annoncée par A. Bertram. La seconde est démontrée dans [L]. Le but de cet article est d'expliquer les égalités

$$\begin{aligned} 2^{g-1}(2^g+1) &= \text{nombre de thêta-caractéristiques paires de } C\\ &= \dim S^2V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{g-1}(2^g-1) &= \text{nombre de thêta-caractéristiques impaires de } C\\ &= \dim \Lambda^2V. \end{aligned}$$

On associe d'abord à une thêta-caractéristique κ paire (resp. impaire) un diviseur D_κ sur $\mathcal{M}_0$ (resp. $\mathcal{M}_1$), formé des fibrés E tels qu'il existe une flèche non nulle $E\to E\otimes\kappa$ de trace nulle. On montre (§ 1) que D_κ est le diviseur des zéros d'une section d_κ de $H^0(\mathcal{M}_0,\mathcal{L}^2)$ (resp. $H^0(\mathcal{M}_1,\mathcal{L})$), et que ces sections forment une base de $H^0(\mathcal{M}_1,\mathcal{L})$ dans le cas impair, et de $H^0(\mathcal{M}_0,\mathcal{L}^2)$ dans le cas pair.

On construit ensuite des homomorphismes

$$\varphi_0^*: S^2V \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_0,\mathcal{L}^2), \quad \varphi_p^*: \Lambda^2V \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_1,\mathcal{L})$$

(le second dépend du choix d'un point p de C). Ces flèches sont des isomorphismes, sauf dans des cas spéciaux liés à l'annulation en 0 de fonctions thêta ou de leurs dérivées. Elles font correspondre la base (d_κ) de $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2)$ (resp. de $H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$) à la base naturelle (ξ_κ) de S^2V (resp. $\Lambda^2 V$) formée de vecteurs propres sous l'action du groupe de Heisenberg.

Cette étude fait appel à des propriétés relativement fines de la variété de Kummer de C, qui se plonge naturellement dans $\mathcal{M}_0$ mais aussi, après désingularisation, dans $\mathcal{M}_1$ (§ 3). Ces propriétés sont établies dans l'Appendice. On y résume aussi quelques applications de la théorie de Mumford, telles que la décomposition de S^2V et Λ^2V sous l'action du groupe de Heisenberg : ces résultats sont bien connus, mais je n'ai pas trouvé de référence adéquate.

Certains des résultats exposés ici sont assez anciens ; ceux qui concernent le cas impair doivent beaucoup à des conversations avec M.S. Narasimhan et S. Ramanan. C'est une discussion avec N. Hitchin qui m'a incité à rassembler ces idées un peu éparses ; je veux le remercier de l'intérêt qu'il a manifesté pour ces remarques.

0. Notations et rappels

0.1. — On considère dans cet article une courbe C projective et lisse sur $\mathbb{C}$, de genre $g \geq 2$; on note J sa jacobienne. Si F est un fibré sur C, on note parfois $h^0(C, F)$, ou simplement $h^0(F)$, la dimension de l'espace vectoriel $H^0(C, F)$.

Pour $\lambda \in \operatorname{Pic}(C)$, on désigne par $\mathcal{M}_\lambda$ l'espace des modules des fibrés semi-stables sur C, de rang 2 et de déterminant λ. C'est une variété projective, dont le groupe de Picard est isomorphe à $\mathbb{Z}$ (cf. [B]) ; on note $\mathcal{L}_\lambda$ le générateur ample de $\operatorname{Pic}(\mathcal{M}_\lambda)$. On écrira simplement $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{L}_0$ lorsque $\lambda = \mathcal{O}_C$, et $\mathcal{M}_p$, $\mathcal{L}_p$ lorsque $\lambda = \mathcal{O}_C(p)$ $(p \in C)$.

0.2. — Rappelons la définition de $\mathcal{L}_\lambda$ lorsque $\deg(\lambda)$ est pair (*loc. cit.*). Soit N un fibré en droites sur C, de degré $g - 1 - \frac{1}{2}\deg(\lambda)$; soit Δ_N la sous-variété réduite de $\mathcal{M}_\lambda$ formée des classes de fibrés E pour lesquels $H^0(C, E \otimes N)$ n'est pas nul. Alors Δ_N est un diviseur de Cartier dans $\mathcal{M}_\lambda$ et l'on a $\mathcal{L}_\lambda \cong \mathcal{O}(\Delta_N)$.

0.3. — Une propriété importante du faisceau $\mathcal{L}_\lambda$ est liée à la notion de fibré déterminant, que nous allons rappeler dans ce contexte.[1] Soient S une variété intègre et $\mathcal{F}$ un fibré sur $C \times S$. Notons r et q les projections de $C \times S$ sur C et S respectivement. Le *fibré déterminant* $\det Rq_*(\mathcal{F})$

[1] Contrairement à [B], j'ai adopté ici les conventions de [K–M], qui sont parfaitement naturelles mais conduisent hélas dans notre situation à des signes désagréables.

est défini de la manière suivante [K–M] : $Rq_*(\mathcal{F})$ est représenté dans la catégorie dérivée $D(S)$ par un complexe de fibrés

$$0 \to E \xrightarrow{u} F \to 0\,;$$

on note $\det Rq_*(\mathcal{F})$ le fibré en droites $\det(E) \otimes \det(F)^{-1}$. Il ne dépend pas du choix du complexe représentant $Rq_*(\mathcal{F})$.

Supposons de plus que u soit un isomorphisme au point générique de S : ce sera le cas si la restriction $\mathcal{F}_s$ de $\mathcal{F}$ à $C \times \{s\}$, pour s général dans S, satisfait à $h^0(\mathcal{F}_s) = h^1(\mathcal{F}_s) = 0$. Alors $\det u$ est une section non nulle de $(\det Rq_*(\mathcal{F}))^{-1}$; son diviseur est noté $-\operatorname{div} Rq_*(\mathcal{F})$. Son support est l'ensemble des points s de S tels que $h^0(\mathcal{F}_s) \geq 1$; sa multiplicité en un point s de S est toujours au moins égale à $h^0(\mathcal{F}_s)$.

0.4. — Soit maintenant h un morphisme de S dans $\mathcal{M}_\lambda$, et $\mathcal{E}$ un fibré de rang 2 sur $C \times S$, possédant la propriété suivante : pour tout point s de S, le fibré $\mathcal{E}_s$ est semi-stable de déterminant λ et sa classe dans $\mathcal{M}_\lambda$ est égale à $h(s)$ (nous dirons, pour abréger, que $\mathcal{E}$ est un *fibré de Poincaré* sur $C \times S$ relativement à h). Avec les notations de (0.2), le faisceau $h^*\mathcal{L}_\lambda$ est alors isomorphe à *l'inverse* du fibré déterminant $\det Rq_*(\mathcal{E} \otimes r^*N)$. Si le diviseur Δ_N ne contient pas $h(S)$, son image réciproque par h est le diviseur $-\operatorname{div} Rq_*(\mathcal{E} \otimes r^*N)$. On a $\operatorname{mult}_s(h^*\Delta_N) \geq h^0(\mathcal{E}_s \otimes N)$ pour tout $s \in S$.

0.5. — Les conventions pour les espaces et fibrés projectifs sont celles des EGA : si V est un espace vectoriel, la notation $\mathbb{P}(V)$ désigne l'espace des hyperplans de V ; si E est un fibré vectoriel sur une variété S, on note $\mathbb{P}(E)$ le fibré projectif dont la fibre en un point s de S est $\mathbb{P}(E_s)$.

1. Diviseur associé à une thêta-caractéristique

Pour tout fibré E sur C, nous noterons $\mathcal{E}nd_0(E)$ le sous-fibré de $\mathcal{E}nd(E)$ formé des endomorphismes de trace nulle. Conformément à l'Appendice (A.2), nous appellerons *thêta-caractéristique* de C un fibré en droites κ sur C tel que $\kappa^{\otimes 2} \cong K_C$.

LEMME 1.1.

a) *Soit E un fibré de rang 2 sur C, et soit κ une thêta-caractéristique de C. On a*

$$\dim H^0\big(C, \mathcal{E}nd_0(E) \otimes \kappa\big) \equiv \deg(E) + h^0(\kappa) \pmod 2.$$

b) *Si F est un autre fibré de rang 2 sur C, de même déterminant que E, on a*

$$\dim \operatorname{Hom}(E, F \otimes \kappa) \equiv \deg(E) \pmod 2.$$

Comme $\mathrm{Hom}(E, E \otimes \kappa)$ est somme directe de $H^0(C, \mathcal{E}nd_0(E) \otimes \kappa)$ et de $H^0(C, \kappa)$, l'assertion a) résulte de b).

Prouvons b). L'application $u \mapsto \Lambda^2 u$

$$\mathcal{H}om(E, F \otimes \kappa) \longrightarrow \mathcal{H}om(\Lambda^2 E, \Lambda^2(F \otimes \kappa)) \cong K_C$$

est une forme quadratique séparante sur le faisceau $\mathcal{H}om(E, F \otimes \kappa)$, à valeurs dans K_C. D'après [M2], la dimension $\pmod 2$ de $\mathrm{Hom}(E, F \otimes \kappa)$ est alors invariante par déformations de E et de F. Il suffit donc de démontrer b) lorsque E et F sont de la forme $L \oplus M$, avec L et M dans $\mathrm{Pic}(C)$. On a alors

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Hom}\big(E, F \otimes \kappa\big) &= 2h^0(\kappa) + h^0\big(\kappa \otimes L \otimes M^{-1}\big) + h^0\big(\kappa \otimes L^{-1} \otimes M\big) \\ &\equiv \chi\big(\kappa \otimes L \otimes M^{-1}\big) \pmod 2 \\ &\equiv \deg(E) \pmod 2. \quad \square \end{aligned}$$

1.2. — Soit κ une thêta-caractéristique de C. Nous désignerons par $D_\kappa^{(\lambda)}$ la sous-variété réduite de $\mathcal{M}_\lambda$ formée des classes de fibrés E pour lesquels $H^0(C, \mathcal{E}nd_0(E) \otimes \kappa)$ n'est pas nul ; s'il n'y a pas d'ambiguïté sur λ nous la noterons simplement D_κ. En vertu du LEMME 1.1, elle est égale à l'espace $\mathcal{M}_\lambda$ tout entier lorsque $h^0(\kappa)$ et $\deg(\lambda)$ n'ont pas la même parité. Nous ne considérerons donc les variétés $D_\kappa^{(\lambda)} \subset \mathcal{M}_\lambda$ que lorsque $h^0(\kappa) \equiv \deg(\lambda) \pmod 2$.

Le but de ce paragraphe est d'établir le résultat suivant.

THÉORÈME 1.2. — *Soient λ un élément de* $\mathrm{Pic}(C)$ *et κ une thêta-caractéristique de C. Notons $\mathcal{F}_\lambda$ le faisceau $\mathcal{L}_\lambda^2$ si* $\deg(\lambda)$ *est pair, $\mathcal{L}_\lambda$ si* $\deg(\lambda)$ *est impair. Il existe une section non nulle d_κ de $H^0(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$ telle que D_κ soit le diviseur des zéros de d_κ. Lorsque κ parcourt l'ensemble des thêta-caractéristiques telles que $h^0(\kappa) \equiv \deg(\lambda) \pmod 2$, les sections d_κ forment une base de $H^0(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$.*

Le fibré $\mathcal{F}_\lambda$ est l'unique élément de $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_\lambda)$ tel que $\mathcal{F}_\lambda^{-2}$ soit isomorphe au fibré canonique de $\mathcal{M}_\lambda$ (cf. par exemple [D–N]) ; c'est d'ailleurs sous cette forme qu'il apparaît dans la démonstration.

1.3. — La clé de celle-ci est de considérer les images réciproques des sous-variétés D_κ sur certaines variétés abéliennes associées à C. Soit $\pi : \widetilde{C} \to C$ un revêtement étale double (connexe) de C. Il lui correspond un fibré en droites η sur C tel que $\eta^2 \cong \mathcal{O}_C$. On notera σ l'involution de $\widetilde{C}$ qui échange les deux feuillets du revêtement.

LEMME 1.3. — *Soit M un fibré en droites sur $\widetilde{C}$, et soit κ une thêta-caractéristique sur C.*

a) *Si $h^0(C,\kappa\otimes\eta)\neq 0$, l'espace $H^0(C,\mathcal{E}nd_0(\pi_*M)\otimes\kappa)$ n'est pas nul.*

b) *Si $h^0(C,\kappa\otimes\eta)=0$, il existe un isomorphisme canonique*

$$H^0\big(C,\mathcal{E}nd_0(\pi_*M)\otimes\kappa\big)\xrightarrow{\ \sim\ } H^0\big(\widetilde{C},M\otimes\sigma^*M^{-1}\otimes\pi^*\kappa\big).$$

Considérons l'isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}\big(\pi_*M,\pi_*M\big)\longrightarrow \pi_*\,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}(\pi^*\pi_*M,M).$$

Le déterminant de π_*M est isomorphe à $\mathrm{Nm}(M)\otimes\eta$, donc celui de $\pi^*\pi_*M$ à $M\otimes\sigma^*M$. Par suite le noyau de l'homomorphisme canonique $\pi^*\pi_*M\to M$ est isomorphe à σ^*M. On en déduit une suite exacte

$$0\to\mathcal{O}_{\widetilde{C}}\longrightarrow\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}\big(\pi^*\pi_*M,M\big)\longrightarrow M\otimes\sigma^*M^{-1}\to 0,$$

d'où, par application de π_* et produit tensoriel avec κ,

$$(1.4)\quad 0\to\eta\otimes\kappa\longrightarrow\mathcal{E}nd_0(\pi_*M)\otimes\kappa\longrightarrow\pi_*\big(M\otimes\sigma^*M^{-1}\otimes\pi^*\kappa\big)\to 0.$$

Le lemme en résulte aussitôt. ∎

1.5. — La *variété de Prym* $P=\mathrm{Prym}(\widetilde{C},C)$ est l'image de l'endomorphisme $1-\sigma^*$ de $J(\widetilde{C})$. La polarisation principale de $J(\widetilde{C})$ induit sur P le double d'une polarisation principale. Plus précisément, soit N un fibré en droites sur $\widetilde{C}$ tel qu'on ait $\mathrm{Nm}(N)=K_C$ et que $h^0(N)$ soit pair ; le diviseur Θ_N sur $J(\widetilde{C})$ formé des fibrés L tels que $H^0(\widetilde{C},L\otimes N)\neq 0$ induit sur P le double d'un diviseur réduit Ξ_N, et celui-ci définit la polarisation principale de P.

Soit $\lambda\in\mathrm{Pic}(C)$; choisissons un élément $\tilde\lambda$ de $\mathrm{Pic}(\widetilde{C})$ tel que $\mathrm{Nm}\,\tilde\lambda=\lambda\otimes\eta$. Pour tout élément L de P, l'image directe $\pi_*(L\otimes\tilde\lambda)$ est un fibré de rang 2 sur C, de déterminant λ; on vérifie comme dans [B, lemme 1.2] qu'il est semi-stable. L'application $L\mapsto\pi_*(L\otimes\tilde\lambda)$ définit donc un morphisme h de P dans $\mathcal{M}_\lambda$.

LEMME 1.5. — *Supposons $h^0(\kappa)\equiv\deg(\lambda)\pmod 2$.*

a) *Si $h^0(C,\kappa\otimes\eta)\neq 0$, le diviseur D_κ de $\mathcal{M}_\lambda$ contient $h(P)$.*

b) *Si $h^0(C,\kappa\otimes\eta)=0$, le faisceau $N=\tilde\lambda\otimes\sigma^*\tilde\lambda^{-1}\otimes\pi^*\kappa$ satisfait à $\mathrm{Nm}(N)=K_C$ et $h^0(N)\equiv 0\pmod 2$; on a (ensemblistement) $h^{-1}(D_\kappa)=2_P^{-1}(\Xi_N)$.*

c) *La sous-variété D_κ est distincte de $\mathcal{M}_\lambda$.*

L'assertion a) résulte du LEMME 1.3 a).

Si M et R sont deux fibrés en droites sur $\widetilde{C}$, avec $\mathrm{Nm}(R) = K_C$, on déduit de [M2] la relation $h^0(M \otimes \sigma^* M^{-1} \otimes R) \equiv h^0(R) + \deg(M) \pmod 2$. Sous l'hypothèse b), on a $h^0(\pi^*\kappa) = h^0(\kappa)$, d'où

$$h^0(N) \equiv h^0(\pi^*\kappa) + \deg(\lambda) \equiv 0 \pmod 2.$$

Pour tout $L \in P$, le LEMME 1.3 fournit un isomorphisme canonique

$$H^0(C, \mathcal{E}nd_0(\pi_*(L \otimes \tilde{\lambda})) \otimes \kappa) \xrightarrow{\sim} H^0(\widetilde{C}, L^2 \otimes N).$$

L'assertion b) en résulte.

La thêta-caractéristique κ étant donnée, on peut trouver $\eta \in J_2$ tel que $h^0(\kappa \otimes \eta) = 0$; choisissant $\tilde{\lambda}$ comme ci-dessus, on déduit alors de b) que D_κ est distincte de $\mathcal{M}_\lambda$. $\square$

1.6. — Notons r et q les projections de $C \times \mathcal{M}_\lambda$ sur C et $\mathcal{M}_\lambda$ respectivement. Il n'existe pas nécessairement de fibré de Poincaré sur $C \times \mathcal{M}_\lambda$, mais il est bien connu qu'il existe toujours un fibré $\mathcal{E}nd_0$ sur $C \times \mathcal{M}_\lambda$ possédant la propriété universelle suivante : étant donnés une variété S, un morphisme $h : S \to \mathcal{M}_\lambda$ et un fibré de Poincaré $\mathcal{E}$ sur $C \times S$ relativement à h, le fibré $(1_C, h)^* \mathcal{E}nd_0$ est isomorphe à $\mathcal{E}nd_0(\mathcal{E})$ (cela résulte par exemple du lemme de descente 2.3 de [D–N]). Notons D'_κ le diviseur $-\operatorname{div} Rq_*(\mathcal{E}nd_0 \otimes r^*\kappa)$ (0.3). On a par construction $D_\kappa = (D'_\kappa)_{\mathrm{red}}$, de sorte que D_κ et D'_κ sont des diviseurs de $\mathcal{M}_\lambda$.

LEMME 1.6. — *Avec les notations de* (1.5), *on a* $h^* D'_\kappa = 2_P^*(2\,\Xi_N)$.

Choisissons un faisceau de Poincaré $\mathcal{L}$ sur $\widetilde{C} \times P$, normalisé de façon que $\mathrm{Nm}(\mathcal{L}) = \mathcal{O}_{C \times P}$. Notons r et q les projections de $C \times P$ sur C et P respectivement, $\tilde{r}$ et $\tilde{q}$ celles de $\widetilde{C} \times P$ sur $\widetilde{C}$ et P, et π' le morphisme $(\pi, 1_P) : \widetilde{C} \times P \to C \times P$. Le fibré $\mathcal{E} = \pi'_*(\mathcal{L} \otimes \tilde{r}^*\tilde{\lambda})$ sur $C \times P$ est un fibré de Poincaré relativement à h ; on déduit de la suite exacte (1.4) une suite exacte

$$0 \to r^*(\eta \otimes \kappa) \longrightarrow \mathcal{E}nd_0(\mathcal{E}) \otimes r^*\kappa \longrightarrow \pi'_*(\mathcal{L}^2 \otimes \tilde{r}^* N) \to 0,$$

d'où un isomorphisme $Rq_*(\mathcal{E}nd_0(\mathcal{E}) \otimes r^*\kappa) \to R\widetilde{q}_*(\mathcal{L}^2 \otimes \tilde{r}^* N)$.

L'égalité des diviseurs déterminants associés entraîne le lemme. $\square$

LEMME 1.7. — *On a* $D'_\kappa = 2D_\kappa$, $D_\kappa \in |\mathcal{F}_\lambda|$ *et* $h^* D_\kappa = 2_P^*\,\Xi_N$.

Un calcul facile, basé sur le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch et sur l'égalité $c_1(\mathcal{E}nd_0) = 0$, montre que l'élément $\det Rq_*(\mathcal{E}nd_0 \otimes r^* N)$

de $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_\lambda)$ est *indépendant de* $N \in \mathrm{Pic}(C)$. Prenons $N = \mathcal{O}_C$: le faisceau $q_*(\mathcal{E}nd_0)$ est nul, tandis que $R^1q_*(\mathcal{E}nd_0)$ s'identifie au fibré tangent $T_{\mathcal{M}_\lambda}$ (cf. [B, proposition 3.3]). Ainsi $\mathcal{O}(D'_\kappa)$ est isomorphe au fibré anti-canonique $K^{-1}_{\mathcal{M}_\lambda}$; autrement dit, on a $D'_\kappa \in |\mathcal{F}^2_\lambda|$.

Puisque $h^0(C, \mathcal{E}nd_0(E) \otimes \kappa)$ est pair pour tout fibré E de $\mathcal{M}_\lambda$ (LEMME 1.1.a)), les composantes de D'_κ apparaissent toutes avec une multiplicité ≥ 2 (0.4). Si $\deg(\lambda)$ est impair, la relation $D'_\kappa \in |\mathcal{L}^2_\lambda|$ implique donc $D'_\kappa = 2D_\kappa$ et $D_\kappa \in |\mathcal{L}_\lambda|$. Si $\deg(\lambda)$ est pair, la relation $D'_\kappa \in |\mathcal{L}^4_\lambda|$ implique ou bien $D'_\kappa = 2D_\kappa$ et $D_\kappa \in |\mathcal{L}^2_\lambda|$, ou bien $D'_\kappa = 4D_\kappa$ et $D_\kappa \in |\mathcal{L}_\lambda|$; mais le LEMME 1.6 montre que D'_κ est le double d'un diviseur réduit, ce qui exclut la seconde possibilité. La dernière formule résulte alors du LEMME 1.6. $\square$

1.8. — Nous avons donc démontré la première partie du théorème ; comme la dimension de l'espace $H^0(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$ est égale au nombre des thêta-caractéristiques de même parité que $\deg(\lambda)$, il suffit maintenant de prouver que les sections d_λ sont linéairement indépendantes. Considérons une relation linéaire $\Sigma a_\kappa d_\kappa = 0$ dans $H^0(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$, où κ parcourt l'ensemble des thêta-caractéristiques de même parité que $\deg(\lambda)$. Fixons un revêtement $\pi : \widetilde{C} \to C$ et un faisceau inversible $\tilde{\lambda}$ sur $\widetilde{C}$ comme ci-dessus.

Supposons d'abord $\deg(\lambda)$ impair. Notons ϑ^-_η l'ensemble des thêta-caractéristiques impaires telles que $h^0(\kappa \otimes \eta) = 0$. L'application

$$\kappa \mapsto N_\kappa = \tilde{\lambda} \otimes \sigma^* \tilde{\lambda}^{-1} \otimes \pi^* \kappa,$$

restreinte à ϑ^-_η, est injective. Par suite, les diviseurs Ξ_{N_κ} correspondant à deux éléments distincts de ϑ^-_η sont distincts, et ils diffèrent par une translation par un point d'ordre 2 de P. Les diviseurs $2^*_P\,\Xi_{N_\kappa}$, pour $\kappa \in \vartheta^-_\eta$, sont alors linéairement indépendants (PROPOSITION A.8). Il résulte donc du LEMME 1.7 qu'on a $a_\kappa = 0$ pour tout $\kappa \in \vartheta^-_\eta$. Il suffit pour conclure d'observer qu'étant données une thêta-caractéristique impaire κ et une thêta-caractéristique κ' telle que $h^0(\kappa') = 0$, le fibré en droites $\eta = \kappa' \otimes \kappa^{-1}$ satisfait à $\kappa \in \vartheta^-_\eta$.

Si $\deg(\lambda)$ est pair, le raisonnement précédent permet seulement de conclure qu'on a $a_\kappa h^* d_\kappa + a_{\kappa\otimes\eta} h^* d_{\kappa\otimes\eta} = 0$ pour toute thêta-caractéristique paire κ telle que $h^0(\kappa\otimes\eta) = 0$. Mais si en outre $h^0(\kappa) \geq 2$, on a $h^* d_{\kappa\otimes\eta} = 0$ et $h^* d_\kappa \neq 0$ d'après (1.5), d'où $a_\kappa = 0$. On en déduit comme ci-dessus que a_κ est nul pour toute thêta-caractéristique paire κ vérifiant $h^0(\kappa) \geq 2$.

1.9. — Il reste à traiter le cas $h^0(\kappa) = 0$. On peut supposer $\lambda = \mathcal{O}_C$ (cf. remarque 1.11 ci-dessous). Toute thêta-caractéristique κ sur C définit un diviseur thêta Θ_κ sur la jacobienne J de C (A.2). Soit i le morphisme de J dans $\mathcal{M}_0$ qui associe à L la classe du fibré semi-stable $L \oplus L^{-1}$.

LEMME 1.9. — *Soit κ une thêta-caractéristique paire. Si $h^0(\kappa) = 0$, on a $i^* D_\kappa = 2_J^* \Theta_\kappa$; si $h^0(\kappa) \neq 0$, le diviseur D_κ contient $i(J)$.*

On a $\mathcal{E}nd_0(L \oplus L^{-1}) = \mathcal{O}_C \oplus L^2 \oplus L^{-2}$ et par conséquent

$$i(L) \in D_\kappa \Longleftrightarrow h^0(\kappa \otimes L^2) + h^0(\kappa \otimes L^{-2}) + h^0(\kappa) \geq 1.$$

Cette inégalité est toujours vérifiée si $h^0(\kappa) \neq 0$; dans le cas contraire elle équivaut à $L^2 \in \Theta_\kappa$, c'est-à-dire $L \in 2_J^* \Theta_\kappa$. Comme les diviseurs $i^* D_\kappa$ et $2_J^* \Theta_\kappa$ appartiennent tous deux au système linéaire $|4\Theta_\kappa|$ (cf. LEMME 1.7 et [B]), on en déduit le lemme. ☐

1.10. — Comme les diviseurs $2_J^* \Theta_\kappa$ sont linéairement indépendants (PROPOSITION A.8), le LEMME 1.9 entraîne $a_\kappa = 0$ pour toute thêta-caractéristique κ avec $h^0(\kappa) = 0$; cela achève la démonstration du théorème. ☐

1.11 *Remarque.* — Soient λ, μ, ν trois éléments de $\mathrm{Pic}(C)$ tels que $\mu = \lambda \otimes \nu^2$. L'application $E \mapsto E \otimes \nu$ définit un isomorphisme $u : \mathcal{M}_\lambda \to \mathcal{M}_\mu$. Pour toute thêta-caractéristique κ de C, on a alors $u^* D_\kappa^{(\mu)} = D_\kappa^{(\lambda)}$. Il suffit en effet (compte tenu du THÉORÈME 1.2) de vérifier l'égalité ensembliste, et celle-ci résulte directement de la définition.

2. L'espace $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}_0^2)$

Dans ce paragraphe et le suivant, nous utilisons pour la jacobienne J de C les résultats et notations de l'Appendice ; en particulier, $\mathcal{L}_J$ désigne le faisceau $\mathcal{O}_J(2\Theta)$, où Θ est un diviseur thêta symétrique quelconque sur J, et V l'espace $H^0(J, \mathcal{L}_J)$. Rappelons d'autre part qu'on note $\mathcal{M}_0$ l'espace des modules des fibrés semi-stables sur C, de rang 2 et de déterminant trivial, et $\mathcal{L}_0$ le générateur ample de $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_0)$.

2.1. — Commençons par rappeler les résultats de [B] dont nous aurons besoin. Soit i le morphisme de J dans $\mathcal{M}_0$ qui associe à un fibré en droites L la classe du fibré $L \oplus L^{-1}$ (1.10). Il définit par passage au quotient un plongement de la variété de Kummer $\mathcal{K}$ de J dans $\mathcal{M}_0$. Le faisceau $i^* \mathcal{L}_0$ sur J est isomorphe à $\mathcal{L}_J$, et l'homomorphisme de restriction $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}_0) \to H^0(J, \mathcal{L}_J) = V$ est *bijectif.* Le système linéaire $|\mathcal{L}_0|$ définit donc un morphisme $\varphi_0 : \mathcal{M}_0 \to \mathbb{P}(V)$.

Soit κ une thêta-caractéristique de C. Pour tout fibré E de $\mathcal{M}_0$, le diviseur

$$\delta_\kappa(E) = \{L \in J \mid H^0(C, E \otimes \kappa \otimes L) \neq 0\}$$

appartient au système linéaire $|\mathcal{L}_J|$; on définit ainsi un morphisme $\delta_\kappa : \mathcal{M}_0 \to |\mathcal{L}_J| = \mathbb{P}(V^*)$.

D'autre part on associe à κ un élément ξ_κ de $V \otimes V$, qui définit un isomorphisme $\hat{\xi}_\kappa : V^* \to V$ (A.5 et A.6). Le diagramme

(2.2)
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}(V) \arrow[d, "\hat{\xi}_\kappa"] \\ \mathcal{M}_0 \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\delta_\kappa"'] & \\ & \mathbb{P}(V^*) \end{tikzcd}$$

est commutatif ; il induit par restriction à J le diagramme (6) de l'Appendice.

Soit E un fibré de $\mathcal{M}_0$; soit $\Delta_\kappa(E)$ la sous-variété réduite de $\mathcal{M}_0$ définie par

$$\Delta_\kappa(E) = \big\{G \in \mathcal{M}_0 \mid h^0(C, E \otimes \kappa \otimes G) \geq 1\big\}.$$

LEMME 2.3. — *$\Delta_\kappa(E)$ est un diviseur du système linéaire $|\mathcal{L}_0|$; son image réciproque $i^*\Delta_\kappa(E)$ sur J est égale à $\delta_\kappa(E)$.*

Prouvons la première assertion. En remplaçant $\mathcal{M}_0$ par un revêtement convenable, on peut supposer qu'il existe un fibré de Poincaré $\mathcal{E}$ sur $C \times \mathcal{M}_0$. Notons r et q les projections de $C \times \mathcal{M}_0$ sur C et $\mathcal{M}_0$. La sous-variété $\Delta_\kappa(E)$ coïncide ensemblistement avec le diviseur déterminant $\Delta'_\kappa(E) := -\operatorname{div} Rq_*(\mathcal{E} \otimes r^*(E \otimes \kappa))$. Le théorème de Riemann-Roch entraîne que le fibré $\mathcal{O}(\Delta'_\kappa(E))$ est indépendant de l'élément E de $\mathcal{M}_0$; il est donc isomorphe à $(\det Rq_*(\mathcal{E} \otimes \kappa))^{-2} \cong \mathcal{L}_0^2$. Pour tout fibré G de $\mathcal{M}_0$, le nombre $h^0(C, G \otimes E \otimes \kappa)$, égal à $\dim \operatorname{Hom}(G, E \otimes \kappa)$, est pair en vertu du LEMME 1.1.b) ; par suite toutes les composantes de $\Delta'_\kappa(E)$ apparaissent avec une multiplicité ≥ 2 (0.4). Ceci implique $\Delta'_\kappa(E) = 2\Delta_\kappa(E)$ et $\Delta_\kappa(E) \in |\mathcal{L}_0|$.

Il suffit dès lors de prouver la seconde assertion ensemblistement. Soit $L \in J$; pour que le fibré $L \oplus L^{-1}$ appartienne à $\Delta_\kappa(E)$, il faut et il suffit que l'un des deux espaces $H^0(C, E \otimes \kappa \otimes L)$ ou $H^0(C, E \otimes \kappa \otimes L^{-1})$ ne soit pas nul. Comme ces deux espaces ont même dimension, cela équivaut à $H^0(C, E \otimes \kappa \otimes L) \neq 0$, c'est-à-dire $L \in \delta_\kappa(E)$. $\square$

Le LEMME 2.3 assure que le diagramme suivant est commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{P}(V) \arrow[d, "\hat{\xi}_\kappa"] \\
\mathcal{M}_0 \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[r, "\Delta_\kappa"'] & \mathbb{P}(V^*).
\end{tikzcd}
\tag{2.4}
$$

Considérons le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
S^2V \arrow[r, "\varphi_0^*"] \arrow[dr, "\mu"'] & H^0(\mathcal{M}_0,\mathcal{L}_0^2) \arrow[d, "i^*"] \\
 & H^0(J,\mathcal{L}_J^2)
\end{tikzcd}
\tag{2.5}
$$

où $\mu : S^2H^0(J,\mathcal{L}_J) \to H^0(J,\mathcal{L}_J^2)$ est l'homomorphisme de multiplication. On a $\mu(\xi_\kappa)=0$ si $h^0(\kappa)\geq 2$, et $\mu(\xi_\kappa)=\theta_\kappa(2\cdot)$ à un scalaire non nul près si $h^0(\kappa)=0$ (A.9).

PROPOSITION 2.6.

a) *Soit κ une thêta-caractéristique paire de C. A un scalaire non nul près, on a*

$$
\begin{array}{llll}
\varphi_0^*\xi_\kappa = d_\kappa & \text{et} \quad i^*d_\kappa=\theta_\kappa(2\cdot) & \text{si} & h^0(\kappa)=0\,; \\
\varphi_0^*\xi_\kappa = 0 & \text{et} \quad i^*d_\kappa=0 & \text{si} & h^0(\kappa)\geq 2.
\end{array}
$$

b) *L'image de i^* est contenue dans $H^0(J,\mathcal{L}_J^2)^+$.*

c) *Les homomorphismes φ_0^* et μ ont le même noyau. Ils sont injectifs si et seulement si toutes les thêta-caractéristiques paires de C vérifient $h^0(\kappa)=0$ (c'est-à-dire si aucune thêta-constante de C ne s'annule). Dans ce cas les homomorphismes $\varphi_0^* : S^2V \to H^0(\mathcal{M}_0,\mathcal{L}_0^2)$ et $i^* : H^0(\mathcal{M}_0,\mathcal{L}_0^2)\to H^0(J,\mathcal{L}_J^2)^+$ sont bijectifs.*

Comme les sections d_κ forment une base de $H^0(\mathcal{M}_0,\mathcal{L}_0^2)$ (THÉORÈME 1.2), la proposition décrit complètement les homomorphismes du diagramme (2.5) : elle fournit en fait leurs matrices dans des bases appropriées.

Prouvons a). Identifions les espaces projectifs $|\mathcal{L}_0|$ et $\mathbb{P}(V^*)$ à l'aide de l'homomorphisme i^*. Considérons le diagramme (2.4) ; dire que la forme quadratique ξ_κ sur $\mathbb{P}(V)$ s'annule au point E de $\mathcal{M}_0$ signifie que $\varphi_0(E)$ est orthogonal à $\hat{\xi}(\varphi_0(E)) = \Delta_\kappa(E)$, autrement dit que E appartient à $\Delta_\kappa(E)$, c'est-à-dire que $H^0(C, \mathcal{E}nd(E)\otimes\kappa)$ n'est pas nul. Cette condition est toujours réalisée si $h^0(\kappa) \neq 0$; dans le cas contraire elle équivaut à $E \in D_\kappa$. Cela prouve la formule donnant $\varphi_0^*\xi_\kappa$; les assertions sur i^*d_κ résultent du LEMME 1.9.

Puisque les sections d_κ forment une base de $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}_0^2)$ (THÉORÈME 1.2), les assertions b) et c) résultent de a). □

3. L'espace $H^0(\mathcal{M}_p, \mathcal{L}_p)$

Dans ce paragraphe, nous fixons un point p de C. Nous notons $\mathcal{M}_p$ l'espace des modules des fibrés stables sur C de rang 2 et de déterminant $\mathcal{O}_C(p)$, et $\mathcal{L}_p$ le générateur ample de $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_p)$.

3.1. — Soit L un fibré en droites de degré 0 sur C. Notons $\mathbb{C}_p$ le faisceau gratte-ciel de fibre $\mathbb{C}$ au-dessus de p et 0 ailleurs. Choisissons un homomorphisme $v : L \oplus L^{-1} \to \mathbb{C}_p$ dont les restrictions à L et L^{-1} ne sont pas nulles ; deux tels homomorphismes se déduisent l'un de l'autre par un automorphisme de $L \oplus L^{-1}$. Le fibré $\mathrm{Ker}\, v$ est donc indépendant du choix de v ; notons F_L son dual. C'est un fibré de rang 2 sur C, de déterminant $\mathcal{O}_C(p)$, et l'on a une suite exacte

$$0 \to L \oplus L^{-1} \longrightarrow F_L \longrightarrow \mathbb{C}_p \to 0.$$

LEMME 3.2.

a) *Si $L^2 \not\cong \mathcal{O}_C$, le fibré F_L est stable.*

b) *Choisissons un homomorphisme surjectif $K_C(p) \otimes L^2 \to \mathbb{C}_p$, d'où une forme linéaire $\mathrm{ev}_L : H^0(C, K_C(p) \otimes L^2) \to \mathbb{C}$. Il existe une suite exacte*

$$0 \to L^{-1} \longrightarrow F_L \longrightarrow L(p) \to 0 ;$$

la classe d'extension de cette suite, vue par dualité de Serre comme élément de $H^0(C, K_C(p) \otimes L^2)^*$, est proportionnelle à ev_L.

Supposons que F_L admette un fibré en droites quotient M de degré ≤ 0. Alors l'un des deux fibrés L ou L^{-1} s'injecte dans M, donc lui est égal. Supposons par exemple $M = L$; le fibré $F_L^* = \mathrm{Ker}\, v$ contient alors L^{-1}. Or puisque $L^2 \not\cong \mathcal{O}_C$, le fibré $L \oplus L^{-1}$ contient un seul sous-fibré isomorphe à L^{-1}, sur lequel v ne s'annule pas. Cela prouve a) .

Comme F_L contient L^{-1}, on a une suite exacte

$$0 \to L^{-1} \longrightarrow F_L \longrightarrow L(p) \to 0\,;$$

par construction, l'image réciproque de cette extension par la flèche $L \to L(p)$ est scindée, de sorte que la classe d'extension appartient au noyau de l'homomorphisme $H^1(C, L^{-2}(-p)) \to H^1(C, L^{-2})$. On en déduit b) par dualité . $\square$

La condition b) donne une autre définition du fibré F_L. On observera qu'elle entraîne que l'extension est triviale lorsque $L^2 \cong \mathcal{O}_C$: le fibré F_L est alors isomorphe à $L \oplus L(p)$.

Notons J_2 l'ensemble des points d'ordre 2 de J, et $\widehat{J}$ la variété obtenue en éclatant J le long de J_2. L'involution (-1_J) se prolonge à $\widehat{J}$, et le quotient de $\widehat{J}$ par cette involution est la variété de Kummer éclatée $\widehat{\mathcal{K}}$.

Proposition 3.3. — *L'application $L \mapsto [F_L]$ se prolonge en un morphisme $i_p : \widehat{J} \to \mathcal{M}_p$; celui-ci définit par passage au quotient un morphisme de $\widehat{\mathcal{K}}$ dans $\mathcal{M}_p$.*

Notons r et q les projections de $C \times J$ sur C et J respectivement. Soit $\mathcal{L}$ un fibré de Poincaré sur $C \times J$, que l'on peut normaliser en imposant à sa restriction à $\{p\} \times J$ d'être triviale. Posons $\mathcal{E} = q_*(r^*K_C(p) \otimes \mathcal{L}^2)$; c'est un fibré vectoriel de rang g sur J, dont la fibre en un point $[L]$ de J s'identifie canoniquement à $H^0(C, K_C \otimes L^2(p))$. Le fibré projectif $\mathbb{P}_J(\mathcal{E})$ paramètre les classes d'isomorphisme d'extensions

$$0 \to L^{-1} \longrightarrow F \longrightarrow L(p) \to 0,$$

avec $\deg(L) = 0$. On vérifie comme ci-dessus que le fibré F qui apparaît dans cette extension est toujours stable, d'où un morphisme $\mathbb{P}_J(\mathcal{E}) \to \mathcal{M}_p$.

De la suite exacte sur $C \times J$

$$0 \to r^*K_C \otimes \mathcal{L}^2 \longrightarrow r^*K_C(p) \otimes \mathcal{L}^2 \longrightarrow \mathcal{O}_{\{p\}\times J} \to 0,$$

on déduit par application de Rq_* une suite exacte

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_J \longrightarrow R^1q_*\big(r^*K_C \otimes \mathcal{L}^2\big) \to 0.$$

Le faisceau $R^1q_*(r^*K_C \otimes \mathcal{L}^2)$ est concentré sur le sous-ensemble J_2 des points d'ordre 2 de J ; de plus, en un point a de J_2, il est annulé par l'idéal maximal (cela résulte de ce que le faisceau $\mathcal{L}^2$ ne reste trivial dans aucune direction tangente à J en a), et donc isomorphe à $\mathbb{C}_a$. Notons $\mathfrak{m}_2$ l'idéal de J_2 dans J . On a donc défini un homomorphisme surjectif $\mathrm{ev} : \mathcal{E} \to \mathfrak{m}_2$, qui en un point $[L]$ de $J - J_2$ coïncide (à un scalaire près) avec la flèche ev_L.

On en déduit un plongement du fibré projectif $\mathbb{P}_J(\mathfrak{m}_2)$ — qui n'est autre que $\widehat{J}$ — dans $\mathbb{P}_J(\mathcal{E})$; l'image de ce plongement est formée des classes d'isomorphisme des extensions

$$0 \to L^{-1} \longrightarrow F_L \longrightarrow L(p) \to 0$$

pour L dans $J - J_2$, et de toutes les extensions

$$0 \to L^{-1} \longrightarrow F \longrightarrow L(p) \to 0$$

pour L dans J_2. La restriction à $\widehat{J}$ du morphisme $\mathbb{P}_J(\mathcal{E}) \to \mathcal{M}_p$ est le morphisme i_p cherché. La dernière assertion résulte de l'isomorphisme $F_L \cong F_{L^{-1}}$. ∎

3.4. — Soit F un élément de $\mathcal{M}_p$. Pour tout homomorphisme surjectif $u : F \to \mathbb{C}_p$, le fibré $\operatorname{Ker} u$ est semi-stable, de déterminant trivial. On définit ainsi un morphisme h de la droite projective $\mathbb{P}(F_p)$ (qui paramètre l'ensemble des homomorphismes surjectifs de F dans $\mathbb{C}_p$, modulo multiplication par les scalaires) dans l'espace des modules $\mathcal{M}_0$.

LEMME 3.4. — *L'image du morphisme composé*

$$\mathbb{P}(F_p) \xrightarrow{h} \mathcal{M}_0 \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{L}}} \mathbb{P}(V)$$

est une droite.

Il suffit de prouver que l'image réciproque par le morphisme h : $\mathbb{P}(F_p) \to \mathcal{M}_0$ du fibré $\mathcal{L}_0$ est isomorphe à $\mathcal{O}(1)$.

Posons pour alléger les notations $P = \mathbb{P}(F_p)$. Soient r et q les projections de $C \times P$ sur C et P respectivement, et soit $j_p : P \to C \times P$ le plongement $u \mapsto (p, u)$. Le fibré $j_p^* r^* F$ s'identifie à $F_p \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P$; on déduit donc de l'application canonique $F_p \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}_P(1)$ un homomorphisme surjectif $r^* F \to (j_p)_* \mathcal{O}_P(1)$. Soit $\mathcal{E}$ le noyau de cet homomorphisme ; c'est un fibré de Poincaré sur $C \times P$ relativement à h (0.4).

Soit N un fibré en droites de degré $(g-1)$ sur C ; on a $h^* \mathcal{L}_0 = (\det Rq_*(\mathcal{E} \otimes r^* N))^{-1}$ (0.4). De la suite exacte

$$0 \to \mathcal{E} \otimes r^* N \longrightarrow r^*(F \otimes N) \longrightarrow (j_p)^* \mathcal{O}_P(1) \to 0,$$

on déduit un isomorphisme $\det Rq_*(\mathcal{E} \otimes r^* N) \cong \mathcal{O}_P(-1)$, d'où le lemme. ∎

On associe ainsi à tout élément F de $\mathcal{M}_p$ une droite ℓ_F de $\mathbb{P}(V)$. L'application $F \mapsto \ell_F$ définit un morphisme de $\mathcal{M}_p$ dans la grassmannienne $\mathbb{G}(2, V)$ qui paramètre les droites de $\mathbb{P}(V)$ (et donc les quotients de dimension 2 de V). A l'aide du plongement de Plücker, on en déduit un morphisme $\varphi_p : \mathcal{M}_p \to \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.

Théorème 3.5. — *Le morphisme* $\varphi_p \circ i_p : \widehat{J} \to \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ *coïncide avec l'application de Gauss* γ_{D_p} *associée au champ de droites* D_p *sur* J (A.12).

Rappelons que D_p désigne le champ de droites sur J tangent à l'origine à la courbe C plongée dans J par le morphisme $q \mapsto \mathcal{O}_C(q-p)$.

Fixons un fibré en droites M de degré 1 sur C ; posons $P = \mathbb{P}(H^0(C, K_C \otimes M^2))$. A tout élément e de P on associe (via la dualité de Serre) une extension

$$0 \to M^{-1} \longrightarrow E_e \longrightarrow M \to 0.$$

Le système linéaire $|K_C \otimes M^2|$ est sans point base, donc définit un morphisme ψ de C dans P.

Lemme 3.6. — *Soit* e *un point de* P.

a) *Le fibré* E_e *est semi-stable.*

b) *Pour que* E_e *ne soit pas stable, il faut et il suffit que* e *appartienne à* $\psi(C)$. *Si* $e = \psi(q)$, *le fibré* E_e *est extension de* $M^{-1}(q)$ *par* $M(-q)$.

c) *Posons* $L = M(-p)$, *et supposons* $L^2 \not\cong \mathcal{O}_C$. *Pour que* E_e *soit contenu dans le fibré* F_L *associé à* L (3.1), *il faut et il suffit que* e *appartienne à la tangente à* $\psi(C)$ *au point* $\psi(p)$.

Soit L un sous-fibré en droites de E_e. Si $\deg(L) \geq 1$, la projection $L \to M$ doit être un isomorphisme, ce qui est impossible puisque l'extension n'est pas scindée : cela prouve a). Si $\deg(L) = 0$, il existe un point q de C tel que la projection $L \to M$ induise un isomorphisme de L sur $M(-q)$. Il en résulte comme dans le Lemme 3.2 que e est égal à $\psi(q)$. Dans ce cas le fibré $E_{\psi(q)}$ contient $M(-q)$, d'où b).

Prouvons c). La tangente à $\psi(C)$ au point $\psi(p)$ correspond au sous-espace $H^0(C, K_C \otimes L^2)$ de $H^0(C, K_C \otimes M^2)$ (qui est de codimension 2 par hypothèse). Elle paramètre les extensions

$$0 \to L^{-1}(-p) \longrightarrow E_e \longrightarrow L(p) \to 0$$

dont l'image réciproque par l'injection $L(-p) \to L(p)$ est scindée. Pour une telle extension, on a une suite exacte

$$0 \to L \oplus L^{-1} \longrightarrow E_e(p) \longrightarrow \mathbb{C}_{2p} \to 0,$$

où $\mathbb{C}_{2p}$ désigne le faisceau $\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_C(-2p)$. Le faisceau $\mathbb{C}_p$ s'injecte dans $\mathbb{C}_{2p}$; notons F son image réciproque dans $E_e(p)$. Il résulte de la suite exacte

$$0 \to L \oplus L^{-1} \longrightarrow F \longrightarrow \mathbb{C}_p \to 0$$

que F est isomorphe au fibré F_L ; l'injection $F_L \to E_e(p)$ fournit alors par dualité une injection de E_e dans F_L.

Inversement, si E_e est contenu dans F_L, il contient un sous-faisceau isomorphe à $L(-p)$, de sorte que l'image réciproque par l'injection $L(-p) \to L(p)$ de l'extension

$$0 \to L^{-1}(-p) \longrightarrow E_e \longrightarrow L(p) \to 0$$

est scindée. ∎

Soit $h : P \to \mathcal{M}_0$ le morphisme qui associe au point e la classe d'isomorphisme du fibré E_e.

Lemme 3.7 . — *Le morphisme $\varphi_{\mathcal{L}} \circ h : P \to \mathbb{P}(V)$ est un plongement linéaire.*

La démonstration est essentiellement la même que celle du Lemme 3.4. Notons r et q les projections de $C \times P$ sur C et P respectivement. Le théorème de Künneth fournit un isomorphisme de

$$H^1(C \times P, r^*M^{-2} \otimes q^*\mathcal{O}_P(1))$$

sur l'espace End $(H^0(C, K_C \otimes M^2))$. La classe de l'application identique définit donc sur $C \times P$ une extension canonique

$$0 \to r^*M^{-1} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow r^*M \otimes q^*\mathcal{O}_P(-1) \to 0$$

dont la restriction à $C \times \{e\}$, pour $e \in P$, est l'extension E_e associée à e.

Soit N un fibré en droites de degré $(g-1)$ sur C. Il s'agit de calculer le fibré $\det Rq_*(\mathcal{E} \otimes r^*N)$. Or les propriétés fonctorielles de Rq_* entraînent

$$Rq_*\big(r^*(M^{-1} \otimes N)\big) = \mathcal{O}_P \otimes_{\mathbb{C}} R\Gamma(M^{-1} \otimes N),$$

d'où $\det Rq_*\big(r^*(M^{-1} \otimes N)\big) = \mathcal{O}_P$;

$$Rq_*\big(r^*(M \otimes N) \otimes q^*\mathcal{O}_P(-1)\big) = \mathcal{O}_P(-1) \otimes_{\mathbb{C}} R\Gamma(M \otimes N),$$

d'où $\det Rq_*\big(r^*(M \otimes N) \otimes q^*\mathcal{O}_P(-1)\big) = \mathcal{O}_P(-1)$.

Il en résulte qu'on a $\det Rq_*(\mathcal{E} \otimes r^*N) = \mathcal{O}_P(-1)$, et par suite (0.4) $h^*\mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_P(1)$. Puisque $\varphi_{\mathcal{L}} \circ h$ est un morphisme, l'homomorphisme $(\varphi_{\mathcal{L}} \circ h)^* : V \to H^0(P, \mathcal{O}_P(1))$ est nécessairement surjectif, de sorte que $\varphi_{\mathcal{L}} \circ h$ est un plongement linéaire. ∎

3.8. — Démontrons maintenant le Théorème 3.5. Soit L un élément de J, tel que $L^2 \not\cong \mathcal{O}_C$; notons $[L]$ son image dans la variété de Kummer $\mathcal{K}$.

Il s'agit de prouver que la tangente à $\mathcal{K}$ en $[L]$ suivant la direction D_p coïncide avec la droite ℓ_{F_L} de $\mathbb{P}(V)$ associée au fibré F_L. Posons $M = L(p)$ et reprenons les notations des LEMMES 3.6 et 3.7. Identifions P à son image dans $\mathbb{P}(V)$. Le LEMME 3.6.b) exprime que la courbe $\psi(C)$ est contenue dans la variété de Kummer $\mathcal{K}$; plus précisément, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\ \alpha\ } & J \\ {\scriptstyle\psi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi_{\mathcal{L}_J}} \\ P & \longrightarrow & \mathbb{P}(V), \end{array}$$

où α est l'application qui associe à un point q de C la classe du fibré $M^{-1}(q)$, est commutatif.

Par conséquent, la direction tangente en $\psi(p)$ à la courbe $\psi(C)$ est l'image par $\varphi_{\mathcal{L}_J}$ de la direction tangente à la courbe $\alpha(C)$ sur J au point $[L]$; la tangente à $\psi(C)$ en $\psi(p)$ est donc la tangente à $\mathcal{K}$ en $[L]$ suivant la direction D_p. D'après le LEMME 3.6.c), cette tangente est égale à la droite ℓ_{F_L}. La proposition en résulte. $\square$

COROLLAIRE 3.9. — *Le morphisme i_p induit un plongement de la variété de Kummer éclatée $\widehat{\mathcal{K}}$ dans $\mathcal{M}_p$, sauf si C est hyperelliptique et que p est un point de Weierstrass de C.*

En dehors du cas exceptionnel, γ_{D_p} induit un plongement de $\widehat{\mathcal{K}}$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2(V)$ (PROPOSITION A.17), de sorte que notre assertion résulte du THÉORÈME 3.5.

Supposons que C soit hyperelliptique et que p soit un point de Weierstrass ; notons σ l'involution hyperelliptique de C. Soient q, r deux points de C ; on supposera que les points p, q, r, σq, σr sont distincts. Soit L un fibré en droites sur C tel que $L^2 = \mathcal{O}_C(q - r)$; notons $\psi : C \to \mathbb{P}(H^0(C, K_C(p) \otimes L^2))$ le morphisme défini par le système linéaire $|K_C(p) \otimes L^2|$. Rappelons (LEMME 3.2) que le point $\psi(p)$ correspond par dualité de Serre à la classe de l'extension

$$0 \to L^{-1} \longrightarrow F_L \longrightarrow L(p) \to 0.$$

Comme $h^0(C, K_C(-q) \otimes L^2) = g - 1$, on a $\psi(p) = \psi(q)$; cela entraîne que l'image réciproque de l'extension ci-dessus par l'injection $L(p-q) \to L(p)$ est scindée, donc que F_L contient un sous-fibré isomorphe à $M := L(p-q)$. On a de même $\psi(p) = \psi(\sigma r)$, de sorte que le fibré $L(p - \sigma r)$, qui est isomorphe à M^{-1}, s'injecte dans F_L. On conclut que F_M est isomorphe à F_L ; on a ainsi construit une surface S dans $\mathcal{K}$ telle que la restriction de i_p à S soit de degré 2 sur son image. □

COROLLAIRE 3.10. — *Le faisceau* $\mathcal{L}_p := \varphi_p^*(\mathcal{O}_P(1))$ *est le générateur de* $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_p)$. *Son image réciproque sur* $\widehat{J}$ *est le faisceau* $\varepsilon^*\mathcal{L}_J^2(-E)$ (*où* $\varepsilon : \widehat{J} \to J$ *désigne l'éclatement de* J_2 *dans* J *et* E *le diviseur exceptionnel*).

La seconde assertion résulte du COROLLAIRE A.15. Comme le faisceau $\varepsilon^*\mathcal{L}_J^2(-E)$ n'est pas divisible dans $\mathrm{Pic}(\widehat{J})$, la première assertion en résulte. □

Dans ce qui suit, nous identifierons l'espace $H^0(\widehat{J}, \varepsilon^*\mathcal{L}_J^2(-E))$ au sous-espace de $H^0(J, \mathcal{L}_J^2)$ formé des sections de $\mathcal{L}_J^2$ qui s'annulent aux points d'ordre 2 de J.

COROLLAIRE 3.11. — *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^2 V \arrow[r, "\varphi_p^*"] \arrow[dr, "w_{D_p}"'] & H^0(\mathcal{M}_p, \mathcal{L}_p) \arrow[d, "i_p^*"] \\ & H^0(J, \mathcal{L}_J^2) \end{tikzcd} \tag{3.11}$$

est commutatif. □

D'après A.11 et A.12, on a $w_{D_p}(\xi_\kappa) = \theta_\kappa(2\cdot)$ à un scalaire non nul près si $h^0(\kappa(-p)) = 0$; dans le cas contraire $w_{D_p}(\xi_\kappa)$ est nul.

PROPOSITION 3.12.

a) *Soit* κ *une thêta-caractéristique impaire de* C. *A un scalaire non nul près, on a*

$$\varphi_p^*\xi_\kappa = d_\kappa \quad \textit{et} \quad i_p^* d_\kappa = \theta_\kappa(2\cdot) \quad \textit{si} \quad h^0(\kappa(-p)) = 0\,;$$

$$\varphi_p^*\xi_\kappa = 0 \quad \textit{et} \quad i_p^* d_\kappa = 0 \quad \textit{dans le cas contraire.}$$

b) *L'image de* i_p^* *est contenue dans* $H^0(J, \mathcal{L}_J^2)^-$.

c) *Les homomorphismes* φ_p^* *et* w_{D_p} *ont le même noyau. Ils sont injectifs si et seulement si toutes les thêta-caractéristiques impaires de* C *vérifient* $h^0(\kappa(-p)) = 0$. *Dans ce cas les homomorphismes*

$$\varphi_p^* : \Lambda^2 V \to H^0(\mathcal{M}_p, \mathcal{L}_p) \quad \textit{et} \quad i_p^* : H^0(\mathcal{M}_p, \mathcal{L}_p) \to H^0(J, \mathcal{L}_J^2)^-$$

sont bijectifs.

Tout comme dans le cas pair (Proposition 2.6), la proposition décrit précisément les homomorphismes du diagramme (3.11), puisqu'elle fournit leurs matrices dans des bases naturelles.

Prouvons a). Soit F un fibré de $\mathcal{M}_p$. Soient u et v deux homomorphismes de F dans $\mathbb{C}_p$, non proportionnels ; posons $E_u = \operatorname{Ker} u$, $E_v = \operatorname{Ker} v$. Dire que la forme alternée ξ_κ est orthogonale au bivecteur correspondant à la droite ℓ_F signifie que $\varphi_{\mathcal{L}}(E_u)$ est orthogonal à $\widehat{\xi}(\varphi_{\mathcal{L}}(E_v)) = \Delta_\kappa(E_v)$ (cf. diagramme (2.4)), c'est-à-dire que E_u appartient à $\Delta_\kappa(E_v)$; cela se traduit par la relation $\operatorname{Hom}(E_u, E_v \otimes \kappa) \neq 0$.

Supposons d'abord que κ admette une section non nulle s_κ qui s'annule en p. L'homomorphisme $1_F \otimes s_\kappa$ de F dans $F \otimes \kappa$ applique F dans $F(-p) \otimes \kappa$, donc en particulier E_u dans $E_v \otimes \kappa$; ainsi la forme ξ_κ s'annule en tout point F de $\mathcal{M}_p$, et l'on a $\varphi_p^* \xi_\kappa = 0$.

Supposons maintenant que κ admette à un scalaire près une unique section s_κ, et que celle-ci ne s'annule pas en p. Il s'agit de prouver que la relation $\operatorname{Hom}(E_u, E_v \otimes \kappa) \neq 0$ équivaut à $H^0(C, \mathcal{E}nd_0(F) \otimes \kappa) \neq 0$.

Si $H^0(C, \mathcal{E}nd_0(F) \otimes \kappa)$ n'est pas nul, on a $\dim \operatorname{Hom}(F, F \otimes \kappa) \geq 2$, et l'on peut trouver un homomorphisme non nul f de F dans $F \otimes \kappa$ tels que $v \circ f$ soit proportionnel à u ; alors f définit un élément non nul de $\operatorname{Hom}(E_u, E_v \otimes \kappa)$.

Inversement, si l'espace $\operatorname{Hom}(E_u, E_v \otimes \kappa)$ n'est pas nul, il est de dimension ≥ 2 (Lemme 1.1.b)). La définition de E_u et E_v donne par dualité des suites exactes

$$0 \to F(-p) \longrightarrow E_u \xrightarrow{\bar{u}} \mathbb{C}_p \to 0,$$

$$0 \to F(-p) \longrightarrow E_v \xrightarrow{\bar{v}} \mathbb{C}_p \to 0.$$

On peut trouver comme ci-dessus un homomorphisme g de E_u dans $E_v \otimes \kappa$ tel que $\bar{v} \circ g$ soit proportionnel à $\bar{u}$. Il induit un homomorphisme de $F(-p)$ dans $F(-p) \otimes \kappa$, d'où un élément g' de $\operatorname{Hom}(F, F \otimes \kappa)$. Un peu de chasse au diagramme montre que $v \circ g'$ doit être proportionnel à u ; par suite g' n'est pas proportionnel à $1_F \otimes s_\kappa$, et l'espace $H^0(C, \mathcal{E}nd_0(F) \otimes \kappa)$ n'est pas nul. On a donc prouvé les assertions de b) relatives à $\varphi_p^* \xi_\kappa$.

Lorsque aucune section non nulle de $H^0(C, \kappa)$ ne s'annule en p, on peut déduire de ce qui précède la valeur de $i_p^* d_\kappa$, grâce au Corollaire 3.11 et à (A.11). Supposons que κ admette une section non nulle s_κ qui s'annule en p ; il s'agit de prouver que le diviseur D_κ contient la variété de Kummer éclatée $\widehat{\mathcal{K}}$, c'est-à-dire que le fibré F_L associé à un élément arbitraire L de J satisfait à $H^0(C, \mathcal{E}nd_0(F_L) \otimes \kappa) \neq 0$. Considérons l'homomorphisme $f : L \oplus L^{-1} \to (L \otimes \kappa) \oplus (L^{-1} \otimes \kappa)$ défini par la matrice $\begin{pmatrix} 1_L \otimes s_\kappa & 0 \\ 0 & -1_L \otimes s_\kappa \end{pmatrix}$. Il est nul en p, donc induit un homomorphisme f' de $F_L(-p)$ dans $F_L(-p) \otimes \kappa$, et par suite un homomorphisme (non nul) f'' de F_L dans $F_L \otimes \kappa$. On a $\operatorname{Tr} f'' = \operatorname{Tr} f' = \operatorname{Tr} f = 0$, d'où notre assertion.

Puisque les sections d_κ forment une base de $H^0(\mathcal{M}_p, \mathcal{L}_p)$, les assertions b) et c) résultent de a). $\square$

3.13. — Notons ϑ_p l'ensemble des thêta-caractéristiques κ de C telles que $h^0(\kappa) = 1$ et que l'unique diviseur de $|\kappa|$ ne contienne pas p. Il résulte du Corollaire 3.11 et de la Proposition 3.12 que φ_p est composée du morphisme $\mathcal{M}_p \to \mathbb{P}(k^{\vartheta_p})$ défini par les sections $(d_\kappa)_{\kappa \in \vartheta_p}$ et d'un plongement linéaire de $\mathbb{P}(k^{\vartheta_p})$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Compte tenu de la remarque 1.11, on voit que si ϑ_q est contenu dans ϑ_p (ce qui est toujours le cas si p est générique), il existe un isomorphisme $u : \mathcal{M}_p \to \mathcal{M}_q$ et un endomorphisme v de $\Lambda^2 V$ tel qu'on ait $\varphi_q \circ u = v \circ \varphi_p$. Si $\vartheta_q = \vartheta_p$, on peut prendre pour v un automorphisme.

Pour p assez général, on peut donc considérer que le morphisme φ_p ne dépend pas de p (à automorphisme près), tout comme γ_{D_p} (A.13). Il n'en est pas de même du plongement i_p de $\widehat{\mathcal{K}}$ dans $\mathcal{M}_p$: l'isomorphisme $u : \mathcal{M}_p \to \mathcal{M}_q$ ci-dessus n'applique pas en général $i_p(\widehat{\mathcal{K}})$ sur $i_q(\widehat{\mathcal{K}})$.

3.14 *Remarque.* — Lorsque C est hyperelliptique, le fibré $\mathcal{L}_p$ est très ample : cela résulte de la description explicite de $\mathcal{M}_p$ donnée dans [D–R]. Il en est donc de même lorsque la courbe C est assez générale. Compte tenu de la Proposition 3.12, on voit que *lorsque C est générale et que le point p n'est situé sur aucun des diviseurs effectifs A_κ tels que $2A_\kappa \in |K_C|$, le morphisme φ_p est un plongement.*

Une étude plus poussée permet de montrer que φ_p est de degré 1 ou 2 sur son image, et que pour toute courbe C et tout point p assez général, ce degré est un. Il peut cependant être égal à 2, comme le montre l'exemple habituel où C est hyperelliptique et où p est un point de Weierstrass. Dans ce cas l'involution hyperelliptique σ définit une involution $F \mapsto \sigma^* F$ de $\mathcal{M}_p$; on vérifie sans peine que cette involution n'est pas triviale et satisfait à $\varphi_p \circ \sigma^* = \varphi_p$. L'image de $\widehat{\mathcal{K}}$ est contenue dans le lieu fixe de cette involution.

3.15 *Exemple.* — $g = 2$. Supposons d'abord que p ne soit pas un point de Weierstrass. Il résulte de [N-R] que le morphisme $\varphi_p : \mathcal{M}_p \to \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cong \mathbb{P}^5$ est un plongement ; son image est l'intersection de la grassmannienne $\mathbb{G}(2, V)$ et d'une autre quadrique. La variété de Kummer éclatée $\widehat{\mathcal{K}}$ (plongée par i_p) est la trace sur $\mathcal{M}_p$ d'une troisième quadrique.

Si p est un point de Weierstrass, l'image de φ_p est contenue dans un hyperplan $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^5$, et $\varphi_p : \mathcal{M}_p \to \mathbb{P}^4$ est un morphisme de degré 2 sur une quadrique, ramifié le long d'une surface de Del Pezzo S_4 (3.14). Dans ce cas l'image de $\widehat{\mathcal{K}}$ coïncide avec le lieu de ramification $S_4 \subset \mathcal{M}_p$; le morphisme i_p réalise $\widehat{\mathcal{K}}$ comme revêtement double de S_4.

Appendice : géométrie de la variété de Kummer

Thêta-caractéristiques et groupe de Heisenberg.

Nous rappelons dans cette section les définitions et résultats de base de [M1] .

A.1. — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$, et soit A une variété abélienne principalement polarisée sur k, de dimension g. Si Θ est un diviseur thêta symétrique sur A, le faisceau $\mathcal{O}_A(2\Theta)$ est indépendant du choix de Θ ; nous le noterons $\mathcal{L}_A$ (ou simplement $\mathcal{L}$), et nous désignerons par V le k-espace vectoriel $H^0(A, \mathcal{L})$. Nous noterons A_2 le groupe des points d'ordre 2 de A, et nous le munirons de la forme bilinéaire alternée $\langle\ ,\ \rangle : A_2 \times A_2 \to \{\pm 1\}$ définie par la polarisation principale. Pour $a \in A$, on note T_a la translation $x \mapsto x + a$ dans A.

On appelle *thêta-caractéristique* de la variété abélienne principalement polarisée A toute fonction $\kappa : A_2 \to \{\pm 1\}$ satisfaisant à

$$\kappa(a+b) = \kappa(a)\kappa(b)\langle a, b\rangle.$$

Le $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel A_2 opère sur l'ensemble $\vartheta(A)$ des thêta-caractéristiques de A par la formule

$$(a \cdot \kappa)(b) = \langle a, b\rangle \kappa(b) ;$$

cette action fait de $\vartheta(A)$ un espace affine sous A_2. Soit $\kappa \in \vartheta(A)$. Il existe un nombre $\varepsilon(\kappa) \in \{\pm 1\}$ tel que la fonction κ sur A_2 prend $2^{g-1}(2g+1)$ fois la valeur $\varepsilon(\kappa)$, et $2^{g-1}(2^g - 1)$ fois la valeur $-\varepsilon(\kappa)$. On dit que la thêta-caractéristique κ est *paire* si $\varepsilon(\kappa) = 1$, *impaire* dans le cas contraire. Pour $a \in A_2$, on a

$$\varepsilon(a \cdot \kappa) = \kappa(a)\varepsilon(\kappa). \tag{1}$$

A toute thêta-caractéristique κ de A est associé un diviseur thêta symétrique Θ_κ sur A, caractérisé par la formule

$$\kappa(a) = (-1)^{m_a(\Theta_\kappa) + m_0(\Theta_\kappa)},$$

où $m_a(\Theta_\kappa)$ désigne la multiplicité au point a du diviseur Θ_κ. On a $\Theta_{a\cdot\kappa} = T_a^*\Theta_\kappa$ pour tout $a \in A$, et

$$\varepsilon(\kappa) = m_0(\Theta_\kappa)\,;$$

par suite, κ est paire ou impaire suivant qu'une équation locale de Θ_κ à l'origine est paire ou impaire. Autrement dit, soit θ_κ une section non nulle de $\mathcal{O}_A(\Theta_\kappa)$, et soit ι l'unique isomorphisme de $(-1_A)^*\mathcal{O}_A(\Theta_\kappa)$ sur $\mathcal{O}_A(\Theta_\kappa)$ qui induit l'identité à l'origine (isomorphisme normalisé dans la terminologie de [M1]) ; on a

$$\iota\big((-1_A)^*\theta_\kappa\big) = \varepsilon(\kappa)\theta_\kappa. \tag{2}$$

A.2. — Supposons que A soit la jacobienne J d'une courbe lisse C de genre g, munie de sa polarisation principale. On appelle thêta-caractéristique de C un fibré en droites κ sur C tel que $\kappa^{\otimes 2} \cong K_C$. On associe à un tel fibré une thêta-caractéristique $\tilde{\kappa}$ de J en posant, pour $a \in J_2$,

$$\tilde{\kappa}(a) = (-1)^{h^0(\kappa\otimes a)+h^0(\kappa)}.$$

Cette correspondance permet d'identifier les thêta-caractéristiques de C et celles de J, ce que nous ferons désormais.

Le diviseur Θ_κ associé à κ est l'ensemble des éléments de J de la forme $\mathcal{O}_C(E) \otimes \kappa^{-1}$, où E est un diviseur effectif de degré $(g-1)$. On a $\varepsilon(\kappa) = (-1)^{h^0(\kappa)}$, de sorte que la parité de κ est par définition celle de $h^0(\kappa)$.

A.3. — Le *groupe de Heisenberg* (ou groupe thêta) H associé à $\mathcal{L}$ est formé des couples (a,φ), où a appartient à A et φ est un isomorphisme de $T_a^*\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}$. Il opère de manière évidente sur V. On a une suite exacte

$$0 \to k^* \longrightarrow H \xrightarrow{\ p\ } A_2 \to 0,$$

avec $p(a,\varphi) = a$. Si u, v sont deux éléments de H, le commutateur (u,v) est l'image dans H de l'élément $\langle p(u), p(v)\rangle$ de k^*.

Pour tout $\alpha \in H$, l'élément α^2 appartient au centre k^* de H ; notons-le $\|\alpha\|$. La fonction $\|\ \| : H \to k^*$ satisfait à

$$\begin{aligned} &\|\alpha\beta\| = \|\alpha\|\,\|\beta\|\big\langle p(\alpha), p(\beta)\big\rangle \quad \text{et} \\ &\|t\alpha\| = t^2\|\alpha\| \quad \text{pour tout } t \in k^*. \end{aligned} \tag{3}$$

Soit κ une thêta-caractéristique de A. Pour tout $\alpha \in H$, nous poserons $\chi_\kappa(\alpha) = \|\alpha\|\kappa(p(\alpha))$. Nous appellerons *caractère de poids* 2 de H un homomorphisme de H dans k^* qui induit sur le centre k^* de H le caractère $t \mapsto t^2$.

LEMME A.4. — *L'application $\kappa \mapsto \chi_\kappa$ définit une bijection de l'ensemble des thêta-caractéristiques de A sur l'ensemble des caractères de poids* 2 *de H.*

On déduit aussitôt des formules (3) que χ_κ est un caractère de poids 2. Inversement, soitχ un caractère de poids 2 de H. Pour tout $\alpha \in H$, le nombre $\chi(\alpha)\|\alpha\|^{-1}$ ne dépend que de l'image a de α dans A_2 ; notons-le $\kappa(a)$. Il résulte encore des formules (3) que κ est une thêta-caractéristique ; on a $\chi_\kappa = \chi$, d'où le lemme. ∎

La représentation de H dans $H^0(A,\mathcal{L})^{\otimes 2}$ et $H^0(A,\mathcal{L}^2)$.

Nous allons décrire la représentation de H sur le produit tensoriel $V^{\otimes 2}$. Notons p et q les deux projections de $A \times A$ sur A ; nous identifierons à l'aide du théorème de Künneth l'espace $V^{\otimes 2}$ à $H^0(A \times A, p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L})$.

Désignons par m et d les applications de $A \times A$ dans A définies par $m(a,b) = a+b$ et $d(a,b) = a-b$. Pour toute thêta-caractéristique κ, il résulte du théorème du carré que le diviseur $m^*\Theta_\kappa + d^*\Theta_\kappa$ appartient au système linéaire $|p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L}|$. Soit ξ_κ une section non nulle de $p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L}$ qui s'annule le long de ce diviseur. Si θ_κ est une section non nulle de $\mathcal{O}_A(\Theta_\kappa)$, on a à un scalaire près

$$\xi_\kappa(a,b) = \theta_\kappa(a+b)\theta_\kappa(a-b). \tag{4}$$

PROPOSITION A.5. — *Pour toute thêta-caractéristique κ de A, l'élément ξ_κ de $V^{\otimes 2}$ est un vecteur propre pour l'action de H, relativement au caractère ξ_κ. Ces vecteurs forment une base de $V^{\otimes 2}$. De plus, lorsque κ décrit l'ensemble des thêta-caractéristiques paires* (*resp. impaires*), *les vecteurs ξ_κ forment une base de S^2V* (*resp.* $\Lambda^2 V$).

Notons s l'automorphisme de $V^{\otimes 2}$ tel que $s(\varphi \otimes \psi) = \psi \otimes \varphi$. Il est induit par l'isomorphisme canonique de $q^*\mathcal{L} \otimes p^*\mathcal{L}$ sur $p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L}$, que nous noterons encore s. Soit κ une thêta-caractéristique de A ; notons M le fibré $\mathcal{O}_A(\Theta_\kappa)$. Soit i l'automorphisme de $A \times A$ qui échange les facteurs ; on a des isomorphismes canoniques

$$i^*\big(p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L}\big) = q^*\mathcal{L} \otimes p^*\mathcal{L} \quad \text{et}$$

$$i^*\big(m^*M \otimes d^*M\big) = m^*M \otimes d^*(-1_A)^*M.$$

Choisissons un isomorphisme u de $m^*M \otimes d^*M$ sur $p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L}$; notons

$$\iota : (-1_A)^*M \to M$$

l'isomorphisme normalisé (cf. A.1). Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} m^*M\otimes d^*(-1_A)^*M & \xrightarrow{i^*u} & q^*L\otimes p^*L \\ \Big\downarrow{\scriptstyle 1\otimes\iota} & & \Big\downarrow{\scriptstyle s} \\ m^*M\otimes d^*M & \xrightarrow{u} & p^*L\otimes q^*L \end{array}$$

est commutatif : en effet, il suffit de vérifier cette commutativité au-dessus de l'origine, où elle est immédiate. Compte tenu de la formule (1) de (A.1), on en déduit

$$s(\xi_\kappa)=\varepsilon(\kappa)\xi_\kappa. \tag{5}$$

On voit en particulier que ξ_κ est un tenseur symétrique si κ est paire, antisymétrique si κ est impaire.

L'action de H sur chaque facteur du produit tensoriel définit une action de $H\times H$ sur $V^{\otimes 2}$; l'action de H qui nous intéresse est celle déduite du plongement diagonal de H dans $H\times H$. Soit α un élément de H, et soit a son image dans A_2. Le diviseur de $(\alpha,1)\xi_\kappa$ est $T^*_{(a,0)}(m^*\Theta_\kappa+d^*\Theta_\kappa)=m^*\Theta_{a\cdot\kappa}+d^*\Theta_{a\cdot\kappa}$. Il existe donc un scalaire t tel qu'on ait $(\alpha,1)\xi_\kappa=t\xi_{a\cdot\kappa}$, et par conséquent, d'après (5),

$$s\big((\alpha,1)\xi_\kappa\big)=\varepsilon(a\cdot\kappa)(\alpha,1)\xi_\kappa.$$

On en déduit

$$(1,\alpha)\xi_\kappa=\big(s\circ(\alpha,1)\circ s\big)(\xi_\kappa)=\varepsilon(\kappa)\varepsilon(a\cdot\kappa)(\alpha,1)\xi_\kappa,$$

et, compte tenu de (1),

$$(\alpha,\alpha)\xi_\kappa=\varepsilon(\kappa)\varepsilon(a\cdot\kappa)(\alpha^2,1)\xi_\kappa=\kappa(a)\|\alpha\|\xi_\kappa=\chi_\kappa(\alpha)\xi_\kappa.$$

Comme la dimension de $V^{\otimes 2}$ est égale au nombre de thêta-caractéristiques, la proposition en résulte. $\square$

A.6 *Remarque.* — Soit G un groupe commutatif, et $\widehat{G}=\mathrm{Hom}(G,k^*)$ son dual de Pontryjagin. Notons $H(G)$ l'ensemble $k^*\times G\times\widehat{G}$, muni de la loi de groupe définie par

$$(t,a,\chi)(s,b,\omega)=(ts\omega(a),a+b,\chi\omega).$$

Prenons pour G un espace vectoriel de dimension g sur le corps $\mathbb{F}_2$; il existe alors un isomorphisme de $H(G)$ sur H qui induit l'identité sur k^*. Choisissons un tel isomorphisme (c'est-à-dire, dans la terminologie de [M1], une thêta-structure sur $(A, \mathcal{L})$). Il définit par passage au quotient un isomorphisme de $G \times \widehat{G}$ sur A_2.

Le groupe $H(G)$ opère alors sur V. Il existe une base $(\psi_b)_{b\in G}$ de V (unique à un scalaire multiplicatif près) telle qu'on ait

$$(t, a, \chi)\psi_b = t\chi(a+b)\psi_{b+a} \quad \text{pour } (t, a, \chi) \in H(G), b \in G.$$

Soient $c \in G$, $\gamma \in \widehat{G}$. L'application $(t, a, \chi) \mapsto t^2\gamma(a)\chi(c)$ est un caractère de poids 2 de $H(G)$; la thêta-caractéristique $\kappa = \kappa\left[\begin{smallmatrix} c \\ \gamma \end{smallmatrix}\right]$ correspondante est donnée (via l'isomorphisme $G \times \widehat{G} \to A_2$) par la formule

$$\kappa(a, \chi) = \gamma(a)\chi(a+c);$$

elle vérifie $\varepsilon(\kappa) = \gamma(c)$. L'élément

$$Q_\kappa = \sum_{b\in G} \gamma(b)\psi_b \otimes \psi_{b+c}$$

de $V^{\otimes 2}$ est un vecteur propre pour l'action de $H(G)$, relativement au caractère χ_κ ; il est donc proportionnel à ξ_κ.

Cette égalité admet la traduction géométrique suivante. Notons $\varphi_{\mathcal{L}} : A \to \mathbb{P}(V)$ le morphisme défini par le système linéaire $|\mathcal{L}|$ (rappelons que la notation $\mathbb{P}(V)$ désigne l'espace des hyperplans de V). D'autre part, soit κ une thêta-caractéristique de A. Pour tout point a de A, le diviseur $T_a^*\Theta_\kappa + T_{-a}^*\Theta_\kappa$ appartient à $|2\Theta| = \mathbb{P}(V^*)$; on définit ainsi un morphisme $\delta_\kappa : A \to \mathbb{P}(V^*)$. On peut considérer ξ_κ comme une forme bilinéaire sur $V^* \otimes V^*$, symétrique ou alternée suivant la parité de κ. Ce qui précède entraîne qu'elle est inversible, c'est-à-dire qu'elle définit un isomorphisme $\hat{\xi}_\kappa : V^* \to V$; de plus, le diagramme

(6)
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}(V) \arrow[dd, "\hat{\xi}_\kappa"] \\ A \arrow[ur, "\varphi_{\mathcal{L}}"] \arrow[dr, "\delta_\kappa"'] & \\ & \mathbb{P}(V^*) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

A.7 *Exemple.* — Supposons $k = \mathbb{C}$. La variété A s'identifie alors au quotient de l'espace vectoriel complexe $T_0(A)$ par un réseau Γ ; la polarisation principale définit une forme bilinéaire alternée inversible sur Γ. Choisissons une *base symplectique* $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ de Γ. On sait que $(\gamma_1, \ldots, \gamma_g)$ est une base de $T_0(A)$, ce qui permet d'identifier cet espace à $\mathbb{C}^g$; il existe alors une matrice carrée τ symétrique d'ordre g, dont la partie imaginaire est positive séparante, telle que le réseau Γ soit égal à $\mathbb{Z}^g \oplus \tau(\mathbb{Z}^g)$. L'espace V s'identifie à l'espace des fonctions thêta d'ordre 2 relativement à Γ .

Posons $G = \mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g$; le groupe $\widehat{G}$ s'identifie canoniquement à G. La base $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g})$ définit un isomorphisme de $G \times G$ sur A_2, qui se prolonge naturellement en un isomorphisme de $H(G)$ sur H. Soit $b \in G$, et soit $\tilde{b}$ un représentant de b dans $\mathbb{Z}^g$. La fonction

$$\psi_b(z) = \sum_{m \in Z^g} \exp 2\pi i \Big({}^t(m + \tfrac{1}{2}\tilde{b})\tau\big(m + \tfrac{1}{2}\tilde{b}\big) + {}^t\big(m + \tfrac{1}{2}\tilde{b}\big)z \Big)$$

est une fonction thêta d'ordre 2, donc définit un élément ψ_b de V. La famille $(\psi_b)_{b \in G}$ est une base de V satisfaisant aux propriétés de (A.6).

Soient c, γ deux éléments de G, et soit $\kappa = \kappa\big[{c \atop \gamma}\big]$ la thêta-caractéristique associée (A.6). Le diviseur Θ_κ est défini par la fonction

$$\begin{aligned}\theta_\kappa(z) &= \theta \begin{bmatrix} c \\ \gamma \end{bmatrix} (z, \tau) \\ &= \sum_{m \in Z^g} \exp \pi i \Big({}^t\big(m + \tfrac{1}{2}\tilde{c}\big)t\big(m + \tfrac{1}{2}\tilde{c}\big) + {}^t\big(m + \tfrac{1}{2}\tilde{c}\big)\big(z + \tfrac{1}{2}\tilde{\gamma}\big)\Big),\end{aligned}$$

où $\tilde{c}$ et $\tilde{\gamma}$ ont la même signification que ci-dessus. La proportionalité de Q_κ et ξ_κ (A.6) n'est autre que la *formule d'addition*

$$\theta_\kappa(z+u)\theta_\kappa(z-u) = \sum_{b \in G} (-1)^{{}^t\tilde{b}\cdot\tilde{\gamma}} \psi_b(z)\psi_b(u).$$

A.8. — Considérons maintenant la représentation de H dans l'espace $H^0(A, \mathcal{L}^2)$. L'isomorphisme normalisé de $(-1_A)^*\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}$ définit une involution ι de $H^0(A, \mathcal{L}^2)$; nous désignerons par $H^0(A, \mathcal{L}^2)^+$ le sous-espace des sections invariantes, et par $H^0(A, \mathcal{L}^2)^-$ celui des sections anti-invariantes. Ils sont de dimension $2^{g-1}(2^g + 1)$ et $2^{g-1}(2^g - 1)$ respectivement. Par contre toutes les sections de $H^0(A, \mathcal{L}) = V$ sont invariantes.

Soit κ une thêta-caractéristique ; notons 2_A l'endomorphisme $a \mapsto 2a$ de A. Le diviseur $2_A^*\Theta_\kappa$ appartient au système linéaire $|\mathcal{L}^2|$; on peut donc considérer $2_A^*\theta_\kappa$ comme une section de $H^0(A, \mathcal{L}^2)$, bien définie à une constante près. Nous la noterons $\theta_\kappa(2\cdot)$.

Proposition A.8. — *Pour toute thêta-caractéristique κ de A, l'élément $\theta_\kappa(2\cdot)$ de $H^0(A,\mathcal{L}^2)$ est un vecteur propre pour l'action de H, relativement au caractère χ_κ. Ces sections forment une base de $H^0(A,\mathcal{L}^2)$. De plus, lorsque κ décrit l'ensemble des thêta-caractéristiques paires* (*resp. impaires*), *les sections $\theta_\kappa(2\cdot)$ forment une base de $H^0(A,\mathcal{L}^2)^+$* (*resp. $H^0(A,\mathcal{L}^2)^-$*).

L'application $\alpha \mapsto \alpha^{\otimes 2}$ est un homomorphisme de H dans le groupe de Heisenberg $H(\mathcal{L}^2)$; le groupe H opère sur $H^0(A,\mathcal{L}^2)$ à travers cet homomorphisme. Il est commode de considérer un élément de $H(\mathcal{L}^2)$ (resp. l'involution ι) comme un automorphisme de $\mathcal{L}^2$ au-dessus d'une translation de A (resp. de l'involution (-1_A)).

Soit $\alpha \in H$. Il existe un élément β de $H(\mathcal{L}^2)$ tel que $\alpha^{\otimes 2} = \beta^2$. L'application $\beta \mapsto \iota\beta\iota$ est un automorphisme de $H(\mathcal{L}^2)$ (noté δ_{-1} dans [M1]). Prouvons la formule

$$\beta\iota\beta\iota = \|\alpha\|. \tag{7}$$

Posons $G_4 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g$, et identifions le groupe $G_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ au sous-groupe $(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g$ de G_4. D'après [M1] (cf. p. 316–319), on peut identifier $H(\mathcal{L}^2)$ à $H(G_4)$ et H à $H(G_2)$ de façon qu'on ait

$$\delta_{-1}(t,a,\chi) = (t,-a,\chi^{-1}) \quad \text{pour } (t,a,\chi) \in H(G_4),$$
$$(s,b,\omega)^{\otimes 2} = \big(s^2,a,\chi(2\cdot)\big) \quad \text{pour } (s,b,\omega) \in H(G_2).$$

Soit alors $(t,a,\chi) \in H(G_4)$, et soit t' un scalaire tel que $t'^2 = t^2\chi(a)$. Notant encore χ la restriction de χ à $G_2 \subset G_4$, on a

$$(t,a,\chi)^2 = (t^2\chi(a),2a,\chi^2) = (t',2a,\chi)^{\otimes 2},$$

et

$$\|(t',2a,\chi)\| = t'^2\chi(2a) = t^2\chi(a)^3.$$

D'autre part on a $(t,a,\chi)\delta_{-1}(t,a,\chi) = (t^2\chi(a)^{-1},0,1)$, ce qui prouve (7).

Soit κ une thêta-caractéristique de A ; la formule (2) entraîne

$$\iota\theta_\kappa(2\cdot) = \varepsilon(\kappa)\theta_\kappa(2\cdot). \tag{8}$$

Posons $a = p(\alpha)$ et $b = p(\beta)$. On a

$$T_b^* 2_A^* \Theta_\kappa = 2_A^* T_a^* \Theta_\kappa = 2_A^* \Theta_{a\cdot\kappa},$$

de sorte que la section $\beta\theta_\kappa(2\cdot)$ est proportionnelle à $\theta_{a\cdot\kappa}(2\cdot)$. Cela implique

$$(\beta\iota\beta\iota)\theta_\kappa(2\cdot) = \varepsilon(a\cdot\kappa)\beta^2\theta_\kappa(2\cdot);$$

compte tenu de (7) et (1) on en déduit $\alpha^{\otimes 2}\theta_\kappa(2\cdot) = \chi_\kappa(\alpha)\theta_\kappa(2\cdot)$. Il en résulte que les sections $\theta_\kappa(2\cdot)$ sont linéairement indépendantes dans $H^0(A,\mathcal{L}^2)$, donc en forment une base puisque la dimension de cet espace est égale au nombre des thêta-caractéristiques. Enfin la formule (8) montre que $\theta_\kappa(2\cdot)$ est invariante ou antiinvariante suivant la parité de κ. ☐

L'homomorphisme $S^2V \to H^0(A,\mathcal{L}^2)$.

A.9. — Nous allons définir des homomorphismes de S^2V et Λ^2V dans $H^0(A,\mathcal{L}^2)$, compatibles avec l'action de H. D'après les Propositions A.5 et A.8, un tel homomorphisme applique le tenseur ξ_κ sur $\lambda_\kappa\theta_\kappa(2\cdot)$, avec $\lambda_\kappa \in k$; son noyau est engendré par les tenseurs ξ_κ pour lesquels $\lambda_\kappa = 0$, et son image par les sections $\theta_\kappa(2\cdot)$ pour les κ telles que $\lambda_\kappa \neq 0$.

Considérons d'abord le cas symétrique. L'application de multiplication $\mu : S^2V \to H^0(A,\mathcal{L}^2)$ est compatible avec l'action de H ; son image est contenue dans $H^0(A,\mathcal{L}^2)^+$. Via l'identification

$$V^{\otimes 2} \cong H^0(A\times A, p^*\mathcal{L}\otimes q^*\mathcal{L}),$$

μ est la restriction à S^2V de l'image réciproque

$$\delta^* : H^0(A\times A, p^*\mathcal{L}\otimes q^*\mathcal{L}) \to H^0(A,\mathcal{L}^2)$$

par l'application diagonale $\delta : A \to A\times A$. Soit κ une thêta-caractéristique paire. Par définition de ξ_κ (formule (4)), on a, à une constante non nulle près,

$$\mu(\xi_\kappa) = \theta_\kappa(2\cdot)\theta_\kappa(0).$$

Ainsi $\mu(\xi_\kappa)$ s'annule si et seulement si la *thêta-constante* $\theta_\kappa(0)$ est nulle. On obtient donc la proposition suivante, dûe à D. Mumford :

Proposition A.9.

a) *Le noyau de μ est engendré par les tenseurs ξ_κ, où κ parcourt l'ensemble des thêta-caractéristiques paires de A telles que $\theta_\kappa(0) = 0$.*

b) *L'image de μ admet pour base les sections $\theta_\kappa(2\cdot)$, où κ parcourt l'ensemble des thêta-caractéristiques paires de A telles que $\theta_\kappa(0) \neq 0$.*

c) *Si aucune des thêta-constantes $\theta_\kappa(0)$ (pour κ paire) ne s'annule, l'application $\mu : S^2V \to H^0(A,\mathcal{L}^2)^+$ est bijective.* ☐

L'homomorphisme $w_D : \Lambda^2 V \to H^0(A, \mathcal{L}^2)$ *et l'application de Gauss.*

A.10. — Commençons par quelques généralités. Soient X une variété algébrique et L un fibré en droites sur X. Soient s, t deux sections de L; alors $t^{\otimes 2} d(s/t)$ est une section régulière de $L^2 \otimes \Omega^1_X$. On définit ainsi un homomorphisme $w : \Lambda^2 H^0(X, L) \to H^0(X, L^2 \otimes \Omega^1_X)$, appelé application de Wahl. Si D est un champ de vecteurs sur X, on en déduit un homomorphisme

$$w_D : \Lambda^2 H^0(X, L) \longrightarrow H^0(X, L^2).$$

Revenons à notre variété abélienne principalement polarisée A. Pour tout $D \in H^0(A, T_A)$, on dispose d'un homomorphisme

$$w_D : \Lambda^2 V \longrightarrow H^0(A, \mathcal{L}^2)\,;$$

en termes de fonctions thêta, il satisfait à $w_D(\theta \wedge \varphi) = D\theta \cdot \varphi - \theta \cdot D\varphi$. Il est compatible à l'action de H, et son image est contenue dans le sous-espace $H^0(A, \mathcal{L}^2)^-$.

Soit κ une thêta-caractéristique impaire. Par définition de ξ_κ, on a, à une constante non nulle près,

$$w_D(\xi_\kappa) = \theta_\kappa(2\cdot) D\theta_\kappa(0);$$

ainsi la section $w_D(\xi_\kappa)$ s'annule si et seulement si le champ de vecteurs D est tangent au diviseur Θ_κ à l'origine. Par conséquent :

Proposition A.11.

a) *Le noyau de* w_D *est engendré par les bivecteurs* ξ_κ, *où* κ *parcourt l'ensemble des thêta-caractéristiques impaires de* A *telles que* D *soit tangent à* Θ_κ *à l'origine.*

b) *L'image de* w_D *admet pour base la famille des sections* $\theta_\kappa(2\cdot)$, *où* κ *parcourt l'ensemble des thêta-caractéristiques impaires de* A *telles que* $D(0) \notin T_0(\Theta_\kappa)$.

c) *Lorsque* D *est assez général, la dimension de* $\operatorname{Ker} w_D$ *est égale au nombre de thêta-caractéristiques impaires de* A *pour lesquelles la multiplicité de* Θ_κ *à l'origine est* ≥ 3. *En particulier, si* Θ_κ *est lisse à l'origine pour toute thêta-caractéristique impaire* κ, *l'application* w_D : $\Lambda^2 V \to H^0(A, \mathcal{L}^2)^-$ *est bijective* (*pour* D *assez général*). ∎

A.12 *Exemple.* — Considérons le cas où A est la jacobienne J d'une courbe C (A.2). L'espace $H^0(J, T_J)$ s'identifie canoniquement au dual de $H^0(C, K_C)$; pour tout point p de C, l'application $\omega \mapsto \omega(p)$ définit donc un champ de vecteurs D_p sur C, bien défini à un scalaire non nul près (plus correctement, un *champ de droites* sur J). Le vecteur $D_p(0)$ est tangent à la courbe C plongée dans J par le morphisme $q \mapsto \mathcal{O}_C(q-p)$.

Traduisons dans cet exemple les conditions de la Proposition A.11. Soit κ une thêta-caractéristique impaire de C (A.2). La multiplicité en 0 du diviseur Θ_κ est $h^0(\kappa)$; en particulier, Θ_κ est lisse à l'origine si et seulement si $h^0(\kappa)=1$. Supposons cette condition satisfaite ; identifions l'espace projectif tangent à l'origine de J avec $\mathbb{P}(H^0(C,K_C))$, et notons $\varphi_K : C \to \mathbb{P}(H^0(C,K_C))$ l'application canonique. Dire que D_p est tangent à Θ_κ en 0 signifie alors que le point $\varphi_K(p)$ appartient à l'hyperplan de $\mathbb{P}(H^0(C,K_C))$ engendré par l'unique diviseur A_κ de $|\kappa|$. Comme cet hyperplan découpe sur C le diviseur $2A_\kappa$, cela signifie simplement que p appartient au support de A_κ. Ainsi *la relation* $D\theta_\kappa(0) \neq 0$ *équivaut à* $h^0(\kappa(-p))=0$.

A.13. — L'application w_D admet l'interprétation géométrique suivante. Notons $\mathcal{K}$ la variété de Kummer de A ; c'est l'image de A par le morphisme $\varphi_{\mathcal{L}} : A \to \mathbb{P}(V)$. Pour tout point a de $A - A_2$, notons $\gamma_D(a)$ la tangente à $\mathcal{K}$ en $\varphi_{\mathcal{L}}(a)$ suivant la direction D. On définit ainsi, via le plongement de Plücker, une application rationnelle γ_D de A dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. On a alors $\gamma_D^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)=\mathcal{L}^2$, et l'homomorphisme $\gamma_D^* : \Lambda^2 V \to H^0(A,\mathcal{L}^2)$ n'est autre que w_D. Remarquons qu'on a $\gamma_{\lambda D}=\gamma_D$ pour tout scalaire non nul λ; autrement dit, l'application γ_D ne dépend que du *champ de droites* sur A défini par D.

Notons ϑ_D l'ensemble des thêta-caractéristiques impaires κ de A telles que D ne soit pas tangent à Θ_κ à l'origine. Il résulte de ce qui précède et de la Proposition A.11 que γ_D est composée de l'application rationnelle $A \to \mathbb{P}(k^{\vartheta_D})$ défini par les sections $(\theta_\kappa(2\cdot))_{\kappa\in\vartheta_D}$ et d'un plongement linéaire de $\mathbb{P}(k^{\vartheta_D})$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. En particulier, si $\vartheta_D=\vartheta_{D'}$, il existe un automorphisme u de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ tel qu'on ait $\gamma_{D'}=u\circ\gamma_D$. Nous allons utiliser cette remarque pour étudier la structure de l'application γ_D. Par construction, celle-ci définit par passage au quotient une application rationnelle de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, que nous noterons encore abusivement γ_D ; nous noterons $\widehat{\mathcal{K}}$ la variété (lisse) obtenue en éclatant les points singuliers de $\mathcal{K}$.

Proposition A.14. — *Pour tous les champs de droites D sur A sauf un nombre fini, l'application γ_D définit un plongement de $\widehat{\mathcal{K}}$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.*

a) *L'ensemble exceptionnel.*

Considérons les ensembles I de thêta-caractéristiques impaires telles que l'intersection des sous-espaces $T_0(\Theta_\kappa)$ pour $\kappa \in I$ soit une droite ℓ_I. On obtient ainsi un ensemble fini de droites ℓ_I dans $T_0(A)$; nous supposons dans la suite que $D(0)$ n'appartient à aucune de ces droites. Cela implique qu'il existe un champ de vecteurs D' non proportionnel à D tel que $D\theta_\kappa(0)$ s'annule si et seulement si $D'\theta_\kappa(0)$ s'annule ; d'après la remarque précédant la proposition, l'application $\gamma_{D'}$ se déduit de γ_D par un automorphisme de $\mathbb{P}(\Lambda^2(V))$.

b) *La restriction de* γ_D *à* $\mathcal{K} - \mathrm{Sing}(\mathcal{K})$ *est un plongement.*

Soient x, y deux points distincts de $\mathcal{K}$ tels que $\gamma_D(x) = \gamma_D(y)$. D'après a), on a aussi $\gamma_{D'}(x) = \gamma_{D'}(y)$. La droite $\vartheta\langle x, y\rangle$ est alors tangente à $\mathcal{K}$ en x suivant les directions D et D', ce qui est impossible.

D'autre part, un calcul élémentaire montre que $T_x(\gamma_D)$ n'annule pas les vecteurs de $T_x(\mathcal{K})$ non proportionnels à D, et l'on conclut comme ci-dessus que $T_x(\gamma_D)$ est injective.

c) *Étude de* γ_D *au voisinage d'un point d'ordre* 2.

Soit a un point d'ordre 2 de A, et soit $(u_1, \ldots, u_g)$ un système de coordonnées locales sur A en a, tel que $D = \partial/\partial u_1$ et $(-1_A)^* u_i = -u_i$ pour tout i. Soit φ_0 une section de $\mathcal{L}$ qui ne s'annule pas en a. Puisque le système linéaire $|\mathcal{L}|$ plonge le quotient $A/\{\pm 1_A\}$ dans $\mathbb{P}(V)$, il existe des sections φ_{ij} de $\mathcal{L}$ telles qu'on ait

$$\frac{\varphi_{ij}}{\varphi_0} = u_i u_j + \text{ termes de degré } \geq 4.$$

On en déduit que le terme linéaire du développement de Taylor de $\varphi_0 D\varphi_{1j} - \varphi_{1j} D\varphi_0$ à l'origine est proportionnel à u_j. Soit $\widehat{A}$ la variété obtenue en éclatant les points d'ordre 2 de A, et E_a le diviseur exceptionnel au-dessus de a. Ce qui précède entraîne que l'homomorphisme de restriction $\mathrm{Im}\, w_D \to H^0(E_a, \mathcal{O}_{E_a}(1))$ est surjectif. Par conséquent l'application γ_D définit un morphisme de $\widehat{A}$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, et la restriction de ce morphisme à E_a est un plongement linéaire.

On vérifie aussitôt que l'image d'un point de E_a, correspondant à une direction tangente Δ, est la droite passant par $\varphi_{\mathcal{L}}(a)$, de vecteur directeur $D\Delta\varphi_{\mathcal{L}}(a)$. Dès lors l'argument de b) s'applique encore pour montrer que $\gamma_D(E_a)$ ne peut rencontrer $\gamma_D(\widehat{A} - E_a)$. Ainsi le morphisme $\gamma_D : \widehat{\mathcal{K}} \to \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ est injectif.

d) *Étude au voisinage d'un point de* E_a.

Soit δ un point de E_a, correspondant à une direction tangente Δ. On peut supposer d'après a) que Δ n'est pas proportionnel à D, et choisir les coordonnées locales $(u_1, \ldots, u_g)$ de façon que $\Delta = \partial/\partial u_g$. Au voisinage de δ, on peut trouver des coordonnées locales $(v_1, \ldots, v_{g-1}, u_g)$ telles que $u_i = v_g v_i$ pour $1 \leq i < g$; on en déduit des coordonnées locales $(v_1, \ldots, v_g)$ sur $\widehat{\mathcal{K}}$, avec $v_g = u_g^2$. Dans ces coordonnées, le terme linéaire du développement de Taylor de $\varphi_0 D\varphi_{1j} - \varphi_{1j} D\varphi_0$ en δ est proportionnel à v_j pour $j < g$, et celui de $\varphi_0 D\varphi_{gg} - \varphi_{gg} D\varphi_0$ est proportionnel à v_g. Par suite γ_D est un plongement au voisinage de δ, ce qui entraîne la proposition. $\square$

COROLLAIRE A.15. — *Notons $\varepsilon : \widehat{A} \to A$ l'éclatement de A le long de A_2, et E le diviseur exceptionnel. L'image réciproque de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ par le morphisme $\gamma_D : \widehat{A} \to \mathbb{P}(\Lambda^2(V))$ est le faisceau $\varepsilon^*\mathcal{L}^2(-E)$.* $\square$

A.16 *Remarque.* — Notons $\mathfrak{m}_2$ l'idéal de A_2 dans A. L'espace

$$H^0(\widehat{A}, \varepsilon^*\mathcal{L}^2(-E))$$

s'identifie canoniquement à $H^0(A, \mathfrak{m}_2\mathcal{L}^2)$, c'est-à-dire au sous-espace de $H^0(A, \mathcal{L}^2)$ formé des sections qui s'annulent aux points d'ordre 2. Nous allons voir que *cet espace est engendré par les sections $\theta_\kappa(2\cdot)$* qui s'annulent à l'origine (c'est-à-dire telles que κ soit impaire, ou que κ soit paire et que la thêta-constante $\theta_\kappa(0)$ s'annule).

Soit en effet $\mathfrak{m}$ l'idéal de 0 dans A, et soit λ une thêta-caractéristique de A. On a $\mathfrak{m}_2\mathcal{L}^2 \cong 2_A^*(\mathfrak{m}\mathcal{O}_A(\Theta_\lambda))$; comme le faisceau $(2_A)_*\mathcal{O}_A$ est somme directe des éléments d'ordre 2 de $\operatorname{Pic}(A)$, le faisceau $(2_A)_*(\mathfrak{m}_2\mathcal{L}^2)$ est somme directe des faisceaux $\mathfrak{m}\mathcal{O}_A(\Theta_\kappa)$ pour $\kappa \in \vartheta(A)$, et $H^0(A, \mathfrak{m}_2\mathcal{L}^2)$ est somme directe des espaces $2_A^* H^0(A, \mathfrak{m}\mathcal{O}_A(\Theta_\kappa))$, ce qui est exactement notre assertion. On voit en particulier que $H^0(A, \mathfrak{m}_2\mathcal{L}^2)$ *contient $H^0(A, \mathcal{L}^2)^-$ et que ces deux espaces sont égaux si et seulement si aucune thêta-constante de A ne s'annule.*

PROPOSITION A.17. — *Supposons que A soit la jacobienne d'une courbe C ; soit p un point de C, et soit D_p le champ de droites sur J associé à p* (A.12). *L'application de Gauss γ_{D_p} définit un plongement de $\widehat{\mathcal{K}}$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, sauf si C est hyperelliptique et p est un point de Weierstrass de C.*

Vu la définition de l'ensemble exceptionnel dans la démonstration de la PROPOSITION 14, il s'agit de prouver que la droite $D_p(0)$ n'est pas l'intersection des espaces $T_0(\Theta_\kappa)$ qui la contiennent. Avec les notations de (A.12), cela signifie que le point $\varphi_K(p)$ n'est pas l'intersection des hyperplans de $\mathbb{P}(H^0(C, K_C))$ engendré par les diviseurs A_κ contenant p, tels que $2A_\kappa \in |K_C|$ et $h^0(A_\kappa) = 1$. Or si C n'est pas hyperelliptique, cette intersection contient la tangente à $\varphi_K(C)$ en p ; si C est hyperelliptique et si p n'est pas un point de Weierstrass, il n'appartient à aucun des A_κ.

Lorsque C est hyperelliptique et que p est un point de Weierstrass, l'application $\gamma_{D_p} : \widehat{\mathcal{K}} \to \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ n'est pas injective (3.9) : si q et r sont deux points de C distincts de p et L un élément de J tel que

$L^2 = \mathcal{O}_C(q-r)$, les fibrés L et $L(p-q)$ ont même image par γ_{D_p} (mais des images distinctes dans $\mathcal{K}$). $\square$

A.18 *Remarque.* — Il semble probable que le cas ci-dessus (A jacobienne hyperelliptique, D champ de droites associé à un point de Weierstrass) est le seul où γ_D ne plonge pas $\widehat{\mathcal{K}}$ dans $\mathbb{P}(V)$. Cela résulterait d'une variante (affaiblie) de la conjecture de la trisécante, qui énonce que l'existence d'une trisécante à la variété de Kummer caractérise les jacobiennes.

BIBLIOGRAPHIE

[B] Beauville (A.). — Fibrés de rang 2 sur une courbe, fibré déterminant et fonctions thêta, *Bull. Soc. Math. France*, t. **116**, 1988, p. 431–448.

[D–N] Drezet (J.-M.) et Narasimhan (M.S.). — Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques, *Invent. Math.*, t. **97**, 1989, p. 53–94.

[D–R] Desale (R.V.) et Ramanan (S.). — Classification of vector bundles of rank 2 on hyperelliptic curves, *Invent. Math.*, t. **38**, 1976, p. 181–185.

[K–M] Knudsen (F.) et Mumford (D.). — The projectivity of the moduli space of stable curves, I, *Math. Scand.*, t. **39**, 1976, p. 19–55.

[L] Laszlo (Y.). — Dimension de l'espace des sections du diviseur thêta généralisé, *Bull. Soc. Math. France*, t. **119**, 1991, p. 293–306.

[M1] Mumford (D.). — On the equations defining Abelian varieties, *Invent. Math.*, t. **1**, 1966, p. 287–354.

[M2] Mumford (D.). — Theta characteristics of an algebraic curve, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, t. **4**, 1971, p. 181–192.

[N–R] Narasimhan (M.S.) et Ramanan (S.). — Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface, *Ann. of Math.*, t. **89**, 1969, p. 19–51.

[T] Thaddeus (M.). — *Conformal field theory and the cohomology of the moduli space of stable bundles.* — Preprint, 1990.

[V] Verlinde (E.). — Fusion rules and modular transformations in 2D-conformal field theory, *Nuclear Phys.*, t. **B300**, 1988, p. 360.

[W] Witten (E.). — Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.*, t. **121**, 1989, p. 351–399.