Sur les hypersurfaces dont les sections hyperplanes sont à module constant

ARNAUD BEAUVILLE

Introduction

Cette note a pour origine une question de L. Illusie (motivée par [I]) : quelles sont les hypersurfaces dont toutes les sections hyperplanes lisses sont isomorphes entre elles? La réponse est très simple : outre les hyperquadriques, ce sont (à un isomorphisme projectif près) *les hypersurfaces d'équation* $\sum T_i^{q+1} = 0$, *où* q *est une puissance de la caractéristique*.

Ce résultat est basé sur une étude infinitésimale. Au §1, nous examinons à quelle condition toutes les déformations au premier ordre d'une section hyperplane donnée sont triviales; nous en déduisons le théorème aux §2 et 3. On a besoin au §1 d'une propriété de *l'anneau jacobien* de l'hypersurface, et plus précisément de son socle; cette propriété est très simple lorsque le degré de l'hypersurface est premier à la caractéristique, mais elle m'a donné du fil à retordre dans le cas contraire. J'en ai profité pour décrire au §4 la structure de cet anneau, avec un peu plus de détails qu'il n'est nécessaire pour établir le théorème. D. Eisenbud et C. Huneke montrent dans l'appendice qu'on peut déduire ces résultats de théorèmes plus généraux d'algèbre commutative.

Je tiens à remercier D. Eisenbud de l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail, et C. Voisin à qui je suis redevable de l'essentiel du §3.

1. Déformations d'une section hyperplane

Soit k un corps algébriquement clos, de caractéristique $p \geq 0$. Soit X une hypersurface lisse de degré d dans l'espace projectif $\mathbf{P}_k^n (n \geq 2)$, d'équation $F(T_0, \ldots, T_n) = 0$. Nous noterons R l'anneau jacobien de X : c'est par définition l'anneau gradué quotient de $k[T_0, \ldots, T_n]$ par *l'idéal jacobien* $(F'_{T_0}, \ldots, F'_{T_n}, F)$.

Commençons par une remarque préliminaire. Considérons la suite exacte normale

$$0 \to T_X \to T_{\mathbf{P}|X} \to \mathcal{O}_X(d) \to 0.$$

Par produit tensoriel avec $\mathcal{O}_X(j)$, pour $j \in \mathbf{Z}$, on en déduit un homomorphisme de liaison $\partial_j : H^0(X, \mathcal{O}_X(d+j)) \to H^1(X, T_X(j))$.

Lemme 1. *L'homomorphisme ∂_j induit un homomorphisme de R_{d+j} dans $H^1(X, T_X(j))$, qui est injectif sauf si $n = 2$ et $j = d-3$.*

La suite exacte de cohomologie associée à la suite normale s'écrit

$$H^0(X, T_{\mathbf{P}}(j)_{|X}) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(d+j) \to H^1(X, T_X(j));$$

ainsi ∂_j annule l'image de $\pi : H^0(X, T_{\mathbf{P}}(j)_{|X}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(d+j))$, donc aussi celle de $\pi' : H^0(\mathbf{P}^n, T_{\mathbf{P}}(j) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(d+j))$. Les éléments de $H^0(\mathbf{P}^n, T_{\mathbf{P}}(j))$ sont de la forme $\sum A_i(T)\partial/\partial T_i$, avec deg $(A_i) = j+1$; l'homomorphisme π' associe à un tel champ de vecteurs le polynôme $\sum A_i(T)F'_{T_i}$. La première assertion du lemme en résulte.

A l'aide de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X(j) \to \mathcal{O}_X^{n+1}(j+1) \to T_{\mathbf{P}}(j)_{|X} \to 0,$$

on montre sans difficultés que l'homomorphisme $H^0(\mathbf{P}^n, T_{\mathbf{P}}(j)) \to H^0(X, T_{\mathbf{P}}(j)_{|X})$ est surjectif sauf pour $n = 2$ et $j = d-3$. Ce cas étant exclu, on en déduit qu'on a Ker ∂_j = Im π', d'où le lemme.

Rappelons que si $m = (a_0, \dots, a_n)$ est un point de $\mathbf{P}^n$, le *diviseur polaire* de m dans X est le diviseur découpé sur X par l'hypersurface $\sum a_i F'_{T_i} = 0$; son support est l'ensemble des points x de X tels que l'hyperplan tangent à X en x passe par m.

Proposition 1. *On exclut le cas $p = d =$ dim $(X) = 3$. Soit H un hyperplan de $\mathbf{P}^n$, tel que la section hyperplane $Y = X \cap H$ de X soit lisse. Pour que toute déformation au premier ordre de Y dans X soit triviale en tant que déformation (non plongée) de Y, il faut et il suffit qu'il existe un point m de $\mathbf{P}^n$, non situé sur H, dont le diviseur polaire contienne Y.*

Démonstration. On peut supposer que H est défini par $T_0 = 0$. Toute déformation au premier ordre de Y dans X est découpée par l'hyperplan $T_0 = \epsilon L$ sur $k[\epsilon]$ ($\epsilon^2 = 0$), où L est une forme linéaire en $T_1, \dots, T_n$; une telle déformation est isomorphe à l'hypersurface dans $\mathbf{P}^{n-1}_{k[\epsilon]}$ d'équation

$$F(\epsilon L, T_1, \dots, T_n) = 0,$$

soit encore $F(0, T_1, \dots, T_n) + \epsilon F'_{T_0}(0, T_1, \dots, T_n)L(T_1, \dots, T_n) = 0$.

Posons $G(T_1, \dots, T_n) = F(0, T_1, \dots, T_n)$. Toute déformation de Y dans $\mathbf{P}^{n-1}$ est donnée par une équation de la forme $G(T_1, \dots, T_n) + \epsilon\Gamma(T_1, \dots, T_n) = 0$, où Γ est un polynôme homogène de degré d; pour que cette déformation soit triviale en tant que déformation non plongée de Y, il faut et il suffit que Γ appartienne au noyau de l'homomorphisme de liaison $\partial_0 : H^0(Y, \mathcal{O}_Y(d)) \to H^1(Y, T_Y)$ associé à la suite exacte normale

$$0 \to T_Y \to T_{\mathbf{P}|Y} \to \mathcal{O}_Y(d) \to 0.$$

Excluons d'abord le cas $d = n = 3$. D'après le lemme 1, la condition ci-dessus signifie encore que Γ s'annule dans l'anneau jacobien R de Y.

Revenant à la situation de la proposition, on voit que l'hypothèse que toute déformation au premier ordre de Y est triviale équivaut à dire que pour tout i le polynôme $T_i F'_{T_0}(0, T_1, \ldots, T_n)$ appartient à l'idéal jacobien de Y, ou encore que la classe de $F'_{T_0}(0, T_1, \ldots, T_n)$ dans R_{d-1} est annulée par l'idéal maximal de R. L'ensemble des éléments de R possédant cette propriété est un idéal homogène, le *socle* de R; nous verrons au §3 qu'il est engendré par deux éléments homogènes s et t, de degrés respectifs $d\left[\frac{n+1}{2}\right] - n$ et $n(d-2)$, avec $s = 0$ si d est premier à p. Ces deux nombres sont $\geq d$ (les cas $d = n = 3$ et $p = d = n - 1 = 3$ étant exclus), donc la classe de $F'_{T_0}(0, T_1, \ldots, T_n)$ dans R_{d-1} appartient au socle de R si et seulement si elle est nulle. Cela signifie qu'il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels qu'on ait

$$F'_{T_0}(0, T_1, \ldots, T_n) = \sum \alpha_i G'_{T_i}(T_1, \ldots, T_n) = \sum \alpha_i F'_{T_i}(0, T_1, \ldots, T_n),$$

ce qui revient à dire que le diviseur polaire dans X du point $(-1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ contient la section hyperplane Y.

Reste le cas $d = n = 3$ (de sorte que Y est une cubique plane). D'après la démonstration qui précède, la trivialité des déformations au premier ordre de Y se traduit par la condition $\partial_0(T_i F'_{T_0}(0, T_1, \ldots, T_n)) = 0$ pour tout i. Or l'application naturelle

$$H^1(Y, T_Y(-1)) \to \operatorname{Hom}(H^0(Y, \mathcal{O}_Y(1)), H^1(Y, T_Y))$$

est injective (elle s'identifie à l'isomorphisme $H^1(Y, \mathcal{O}_Y(-1)) \to H^0(Y, \mathcal{O}_Y(1))^*$ donné par la dualité de Serre). La condition ci-dessus équivaut donc à $\partial_{-1}(F'_{T_0}(0, T_1, \ldots, T_n)) = 0$, ce qui signifie d'après le lemme 1 que la classe de $F'_{T_0}(0, T_1, \ldots, T_n)$ dans R_{d-1} est nulle. On termine alors la démonstration comme dans le cas général.

2. Le résultat principal

Théorème. *Soit X une hypersurface lisse de degré $d \geq 3$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$ $(n \geq 3)$, d'équation $F(T_0, \ldots, T_n) = 0$, sur un corps* *algébriquement clos k de caractéristique $p \geq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Les sections hyperplanes lisses de X sont isomorphes entre elles.*

(ii) *Pour toute section hyperplane lisse Y de X, toute déformation au premier ordre de Y dans X est triviale en tant que déformation (non plongée) de Y.*

(iii) *Pour tout point m de $\mathbf{P}^n$, le diviseur polaire de m dans X est multiple d'une section hyperplane.*

(iv) *Le nombre $d-1$ est une puissance de p, et les dérivées partielles $F'_{T_0}, \ldots, F'_{T_n}$ sont des puissances de formes linéaires.*

(v) *Le nombre $d-1$ est une puissance de p, et X est isomorphe à l'hypersurface de Fermat $\sum T_i^d = 0$.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Notons U l'ouvert de l'espace dual $(\mathbf{P}^n)^*$ formé des hyperplans transverses à X, et $\mathcal{M}$ l'espace des modules (grossier) des hypersurfaces de degré d dans $\mathbf{P}^{n-1}$; l'application qui associe à un hyperplan H de U la classe d'isomorphisme de $H \cap X$ est un morphisme $h : U \to \mathcal{M}$. L'hypothèse (i) signifie que h est constant. Soit $H \in U$, et soit $Y = H \cap X$; l'homomorphisme $\widehat{h}^* : \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M},Y} \to \widehat{\mathcal{O}}_{U,H}$ induit sur les anneaux locaux complétés annule l'idéal maximal. Or cet homomorphisme se factorise en $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M},Y} \xrightarrow{u} R \xrightarrow{v} \widehat{\mathcal{O}}_{U,H}$, où R est la k-algèbre locale complète qui représente les déformations formelles de Y. Comme u fait de R une $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M},Y}$-algèbre finie, on conclut que v annule l'idéal maximal de R, donc que l'application $T_{U,H} \to T_R$ induite sur les espaces tangents est nulle, ce qui n'est autre que la condition (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Nous excluons ici le cas $p = d = \dim (X) = 3$, qui est traité au paragraphe suivant. Compte tenu de la proposition 1, l'hypothèse (ii) implique que toute section hyperplane de X est composante d'un diviseur polaire. Un argument de dimension montre alors qu'un diviseur polaire quelconque contient une section hyperplane de X. Or le système linéaire des diviseurs polaires est sans point base (un tel point serait un point singulier de X), et définit un morphisme fini de X dans l'espace projectif dual $(\mathbf{P}^n)^*$; le théorème de Bertini [Z] entraîne donc qu'un diviseur polaire assez général dans X est de la forme $p^e D$, où D est intègre. Par suite D est une section hyperplane de X, ce qui implique (iii).

L'argument ci-dessus montre que $d-1$ est une puissance de p si la condition (iii) est satisfaite, d'où l'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (v) : Sous l'hypothèse (iv), il existe des formes linéaires

$L_0, \ldots, L_n$ sur $\mathbf{P}^n$ telles qu'on ait

$$F(T_0, \ldots, T_n) = T_0 L_0^q + \ldots + T_n L_n^q,$$

où $q = d - 1$ est une puissance de p.

Il est commode d'utiliser la notation matricielle: nous écrirons

$$T = \begin{pmatrix} T_0 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} L_0 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Il existe une matrice $A \in M_{n+1}(k)$ telle qu'on ait $L = AT$. La lissité de X signifie que les formes $L_0, \ldots, L_n$ sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que la matrice A est *inversible.*

Pour toute matrice $B = (b_{ij})$ sur k, convenons de noter $B^{(q)}$ la matrice (b_{ij}^q); le polynôme F s'écrit alors ${}^tTA^{(q)}T^{(q)}$. Une variante du théorème de Lang (cf. [S], théorème 1.10) affirme que si φ est un automorphisme d'un groupe algébrique G sur k, tout élément de G peut s'écrire sous la forme $\varphi(g)^{-1}g^{(q)}$ pour un élément $g \in G$ convenable. Appliquant ceci à l'automorphisme $g \mapsto {}^tg^{-1}$ de $GL_{n+1}(k)$, on en déduit que la matrice $A^{(q)}$ peut s'écrire ${}^tB\,B^{(q)}$, donc que le polynôme F s'écrit ${}^tU\,U^{(q)}$, avec $U = BT$. La matrice B fournit donc un isomorphisme linéaire de X sur l'hypersurface de Fermat, d'où (v).

Il est clair que (v) $\Rightarrow$ (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (i) : Si X vérifie la condition (iv), toute section hyperplane lisse de X la vérifie également, et donc est isomorphe à l'hypersurface de Fermat en vertu de l'implication (iv) $\Rightarrow$ (v) démontrée ci-dessus. CQFD

Remarque. Un raisonnement analogue à celui de la démonstration de (iv) $\Rightarrow$ (v) montre que les sections hyperplanes singulières de l'hypersurface de Fermat de degré $d = p^e + 1$ dans $\mathbf{P}^n$ sont isomorphes à l'hypersurface $\sum_{i=1}^{n-1} T_i^d = 0$ dans $\mathbf{P}^{n-1}$.

3. Le cas de l'hypersurface cubique dans $\mathbf{P}^4$

La proposition 1, et par conséquent la démonstration de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) du théorème, ne s'appliquent pas à l'hypersurface cubique dans $\mathbf{P}^4$ en caractéristique 3. Nous allons régler ce problème par une méthode *ad hoc*, qui utilise les propriétés particulières de ces hypersurfaces.

Soit donc X une hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}^4_k$, où la caractéristique de k est supposée $\neq 2$.

Lemme 2. *Il existe un hyperplan H dans $\mathbf{P}^4$ tel que la surface $H \cap X$ ait comme seule singularité un point double ordinaire.*

Dans la terminologie de [K], cela signifie que le plongement de X dans $\mathbf{P}^4$ est un *plongement de Lefschetz*; il suffit d'ailleurs de prouver qu'il existe un hyperplan H de X tel que la surface $H \cap X$ admette un point double ordinaire (loc. cit., 3.3 et 3.5).

Soit x un point de X. Dans un système de coordonnées affines $(t_1, \ldots, t_4)$ centré en x, l'équation de X s'écrit

$$F(t_1, \ldots, t_4) = h(t_1, \ldots, t_4) + q(t_1, \ldots, t_4) + g(t_1, \ldots, t_4),$$

avec deg $(h) = 1$, deg $(q) = 2$, deg $(g) = 3$.

L'hyperplan H_x d'équation $h = 0$ est l'hyperplan tangent en x à X, le cône quadratique Q_x dans H_x défini par $h = q = 0$ est le cône osculateur en x à X, et la variété G_x d'équation $h = q = g = 0$ est réunion des droites de X passant par x. Si x est assez général, G_x est formée de 6 droites distinctes [M]; il en résulte que le cône Q_x est de rang ≥ 2. Il s'agit de prouver que ce rang est 3 (pour x assez général).

Soit l une droite générale de X. D'après [M], la famille des droites rencontrant X est paramétrée par une courbe lisse connexe C_l. Si l'on avait $rg(Q_x) = 2$ pour x assez général dans X, l'ensemble G_x serait réunion de 3 droites coplanaires l_1, l_2, l_3 et de deux droites l'_1, l'_2 coplanaires avec l, ce qui contredirait l'irréductibilité de C_l.

Lemme 3. *Soit S une surface cubique dans $\mathbf{P}^3$, lisse ou admettant un seul point double ordinaire, et soit $\mathcal{J}(S)$ l'idéal jacobien de S. On a* dim $\mathcal{J}_3(S) = 16$.

Soit $F = 0$ une équation de S. L'idéal $\mathcal{J}_3(S)$ est engendré par les éléments F et $T_i F'_{T_j}$, pour $0 \leq i, j \leq 3$; il s'agit de prouver qu'il n'existe pas d'autre relation entre ces polynômes que la relation d'Euler. Si S est lisse et si le corps k est de caractéristique $\neq 3$, cette assertion est bien connu : elle résulte facilement de ce que la suite $(F'_{T_0}, \ldots, F'_{T_n})$ est régulière. La proposition 2 (c) ci-dessous entraîne alors le résultat en caractéristique 3 (pour S lisse).

On peut donc supposer que S admet un point double ordinaire, par exemple le point $s = (1, 0, 0, 0)$. L'équation de S est alors de la forme

$$F(T_0, \ldots, T_3) = T_0 Q(T_1, T_2, T_3) + G(T_1, T_2, T_3),$$

où Q est une forme quadratique non dégénérée, et G une forme cubique.

Soient α une constante et $L_0, \ldots, L_3$ des formes linéaires, telles qu'on ait

$$\sum L_i F'_{T_i} = \alpha F.$$

En considérant le coefficient de T_0^2 dans cette relation, on voit que les formes L_1, L_2, L_3 s'annulent en s; en ajoutant à cette relation un multiple de la relation d'Euler, on peut de plus supposer qu'il en est de même de L_0. En considérant le coefficient de T_0, puis le coefficient constant, on obtient

$$\sum_{i=1}^{3} L_i Q'_{T_i} = \alpha Q \quad ; \quad L_0 Q + \sum_{i=1}^{3} L_i G'_{T_i} = \alpha G.$$

Ces relations entraînent que le champ de vecteurs $\sum_{i=1}^{3} L_i \frac{\partial}{\partial T_i}$ sur $\mathbf{P}^2$ est tangent aux courbes $Q = 0$ et $G = 0$ en leurs points d'intersection. Or la lissité de S en dehors de s implique que ces deux courbes se coupent en 6 points distincts, en lesquels elles sont transverses; on conclut que les formes $L_i (1 \leq i \leq 3)$ s'annulent en ces 6 points, donc sont identiquement nulles. Les relations ci-dessus entraînent finalement $\alpha = 0$ et $L_0 = 0$, ce qui achève de prouver le lemme.

Démonstration du théorème (fin) : Il reste à vérifier qu'une hypersurface cubique de dimension 3 en caractéristique $\neq 2$ ne peut vérifier la condition (ii). Pour $\lambda \in k$, notons Y_λ la surface découpée sur X par l'hyperplan $T_0 = \lambda T_1$. En vertu du lemme 2, on peut supposer que Y_0 admet comme seule singularité un point double ordinaire s_0, et que Y_λ est lisse lorsque λ parcourt un ouvert V de la droite affine.

Reprenant la démonstration de la proposition 1 (§1), on voit que l'hypothèse (ii) entraîne que pour tout i et pour tout $\lambda \in V$, le polynôme $T_i F'_{T_0}(0, T_1, \ldots, T_4)$ s'annule dans l'anneau jacobien $R(Y_\lambda)$. Il résulte du lemme 3 que les espaces $R_3(Y_\lambda)$ s'organisent en un fibré vectoriel au-dessus de $V \cup \{0\}$; par suite les polynômes $T_i F'_{T_0}(0, T_1, \ldots, T_4)$ s'annulent encore dans $R_3(Y_0)$. On en déduit que F'_{T_0} s'annule en s_0, donc que X est singulière en s_0, ce qui contredit l'hypothèse. CQFD

4. L'anneau jacobien en caractéristique p

Soit X une hypersurface lisse de degré d dans $\mathbf{P}^n$, définie par une équation $F(T_0, \ldots, T_n) = 0$. Rappelons qu'on appelle *idéal jacobien* de X l'idéal homogène $\mathcal{J}_X = (F'_{T_0}, \ldots, F'_{T_n}, F)$ de $k[T_0, \ldots, T_n]$, et *anneau jacobien* de X l'anneau gradué quotient $R = k[T_0, \ldots, T_n]/\mathcal{J}_X$. Dire que X est lisse signifie que R est un anneau artinien.

Le *socle* de R est l'idéal homogène de R formé des éléments annulés par l'idéal maximal. Il est de dimension un (sur k) si et seulement si R est un anneau de Gorenstein; dans ce cas il coïncide avec le composant homogène de plus haut degré de R. Soit τ ce degré; si $i+j=\tau$, la multiplication $R_i \otimes R_j \longrightarrow R_\tau$ est une dualité parfaite.

Si la caractéristique p de k ne divise pas d, l'anneau R est intersection complète (grâce à la relation d'Euler, l'idéal $\mathcal{J}_X$ est défini par la suite $(F'_{T_0},\ldots,F'_{T_n})$, qui est régulière puisque la sous-variété de k^{n+1} qu'elle définit est réduite à zéro). Alors R est un anneau artinien de Gorenstein, son socle est le composant homogène non nul de degré maximum de R, et ce degré est égal à $(n+1)(d-2)$. De plus la dimension des composants homogènes R_i de R ne dépend ni de p, ni de F, mais seulement des entiers d et n.

Nous supposerons désormais que p divise d.

Proposition 2. (a) *Le socle de R est de dimension 2. Il est engendré par des éléments homogènes s de degré $\sigma=([\frac{n}{2}]+1)d-n-1$ et t de degré $\tau=(n+1)(d-2)$.*

(b) *L'anneau quotient $R'=R/ks$ est un anneau de Gorenstein.*

(c) *Notons $R^{(0)}$ l'anneau jacobien d'une hypersurface lisse de degré d dans $\mathbf{P}^n_{\mathbf{C}}$. On a*

$$\dim_k R_i = \dim_{\mathbf{C}} R_i^{(0)},$$

sauf si n est pair et $i=\sigma$; dans ce cas on a $\dim_k R_\sigma - 1 = \dim_k R'_\sigma = \dim_{\mathbf{C}} R_\sigma^{(0)}$.

D. Eisenbud et C. Huneke savent déduire cette proposition d'un énoncé nettement plus général d'algèbre commutative; leur démonstration est esquissée en appendice. Je vais indiquer ici une démonstration géométrique de la proposition 2. Le cas $d=3$, $n=2$ demande quelques modifications, que je vais laisser au lecteur pour ne pas trop alourdir le texte. J'exclus donc ce cas dans la suite.

Démonstration : (1) La suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-d) \longrightarrow \Omega^1_{\mathbf{P}|X} \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow 0$$

fournit pour $1 \le q \le n-1$ une suite exacte

$$(S_q) \qquad 0 \longrightarrow \Omega_X^{n-q-1}(-d) \longrightarrow \Omega^{n-q}_{\mathbf{P}|X} \longrightarrow \Omega_X^{n-q} \longrightarrow 0,$$

à laquelle est associée une classe d'extension $\xi_q \in \mathrm{Ext}^1(\Omega_X^{n-q},\Omega_X^{n-q-1}(-d))$.

Considérons en particulier la suite (S_1). Après produit tensoriel par $\mathcal{O}_X(j+n+1-d)$, elle s'identifie via les isomorphismes canoniques $T_X \cong \Omega_X^{n-2} \otimes K_X^{-1}$ et $T_{\mathbf{P}} \cong \Omega_{\mathbf{P}}^{n-1} \otimes K_{\mathbf{P}}^{-1}$ à la suite exacte normale

$$0 \to T_X(j-d) \to T_{\mathbf{P}}(j-d)_{|X} \to \mathcal{O}_X(j) \to 0.$$

En vertu du lemme 1 (§1), l'homomorphisme

$$\cup\xi_1 : H^0(X, \mathcal{O}_X(j)) \to H^1(X, \Omega_X^{n-2}(j+n+1-2d))$$

induit un homomorphisme (noté de la même manière)

$$R_j \to H^1(X, \Omega_X^{n-2}(j+n+1-2d)).$$

Considérons la suite d'homomorphismes

$$R_j \xrightarrow{\cup\xi_1} H^1(X, \Omega_X^{n-2}(j+n+1-2d)) \xrightarrow{\cup\xi_2} H^2(X, \Omega_X^{n-3}(j+n+1-3d)) \to \dots$$
$$\xrightarrow{\cup\xi_{n-2}} H^{n-2}(X, \Omega_X^1(j+n+1-(n-1)d)).$$

(2) Nous allons voir que sauf dans des cas exceptionnels, les homomorphismes $\cup\xi_i$ sont *bijectifs*.

Rappelons d'abord le lemme d'annulation de Bott: pour $1 \leq i \leq n-1$, les espaces $H^i(\mathbf{P}, \Omega_{\mathbf{P}}^q(k))$ sont nuls à l'exception des $H^q(\mathbf{P}, \Omega_{\mathbf{P}}^q)$, qui sont de dimension 1 (voir [D] pour une démonstration valable en toute caractéristique).

On déduit alors de la suite exacte

$$0 \to \Omega_{\mathbf{P}}^q(k-d) \to \Omega_{\mathbf{P}}^q(k) \to \Omega_{\mathbf{P}}^q(k)_{|X} \to 0$$

que les espaces $H^i(X, \Omega_{\mathbf{P}}^q(k)_{|X})$ sont nuls pour $1 \leq i \leq n-2$, sauf $H^{q-1}(X, \Omega_{\mathbf{P}}^q(d)_{|X})$ et $H^q(X, \Omega_{\mathbf{P}}^q|_X)$ qui sont de dimension 1. En considérant la suite exacte de cohomologie associée à la suite (S_i), on voit que *l'homomorphisme* $\cup\xi_i$ *est bijectif en dehors des cas suivants :* $n = 2i$ *et* $j = \sigma$ *ou* $\tau - \sigma$; $n = 2i \pm 1$ *et* $j = \sigma$ (l'injectivité de $\cup\xi_1$ provient du lemme 1 du §1).

(3) Pour $1 \leq q \leq n-1$, notons $\xi^{(q)}$ la classe d'extension $\xi_q \cdot \xi_{q-1} \cdot \dots \cdot \xi_1$; elle vit dans $\mathrm{Ext}^q(\Omega_X^{n-1}, \Omega_X^{n-q-1}(-qd))$, que l'on peut identifier à $H^q(X, \Omega_X^{n-q-1}(n+1-(q+1)d))$. Soient i, j des entiers distincts de σ, tels que $i + j = \tau$. Posons $k = i+n+1-2d = -j-n-1+(n-1)d$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R_i \otimes R_j & \xrightarrow{(\cup\xi_1)\otimes(\cup\xi^{(n-2)})} & H^1(X,\Omega_X^{n-2}(k)) \otimes H^{n-2}(X,\Omega_X^1(-k)) \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ R_\tau & \xrightarrow{\cup(\xi_1\, \xi^{(n-2)})} & H^{n-1}(X,\Omega_X^{n-1}). \end{array}$$

La flèche μ, définie par le cup-produit, induit la dualité de Serre; d'après (2), les homomorphismes $\cup\xi_1$ et $\cup\xi^{(n-2)}$ sont bijectifs. Prenant d'abord $i = 0$, on obtient que R_τ s'identifie au dual de R_0, donc est de dimension 1, et que la flèche $\cup(\xi_1 \cdot \xi^{(n-2)}) : R_\tau \to H^{n-1}(X,\Omega_X^{n-1})$ est bijective. On voit alors que *pour tout i distinct de σ ou $\tau-\sigma$, la multiplication $R_i \otimes R_{\tau-i} \to R_\tau$ définit une dualité parfaite.*

(4) Reste à considérer le cas $i = \sigma$. Supposons d'abord n pair, et posons $n = 2\nu$. L'homomorphisme $\cup\xi^{(\nu-1)} : R_\sigma \to H_\nu(X,\Omega_X^{\nu-1}(d))$ est bijectif d'après (2). On déduit de (S_ν) la suite exacte

$$H^{\nu-1}(X,\Omega_X^{\nu-1}) \xrightarrow{\alpha} H^{\nu-1}(X,\Omega_{\mathbf{P}}^\nu(d)_{|X}) \to H^{\nu-1}(X,\Omega_X^\nu(d)) \\ \xrightarrow{\cup\xi_\nu} H^\nu(X,\Omega_X^{\nu-1}) \to 0.$$

Prouvons que la flèche α est nulle. Par dualité de Serre, sa transposée s'identifie à l'homomorphisme de restriction $H^\nu(X,\Omega^\nu_{\mathbf{P}_{|X}}) \to H^\nu(X,\Omega_X^\nu)$. Notons $h_{\mathbf{P}}$ la classe dans $H^1(\mathbf{P},\Omega^1_{\mathbf{P}})$ d'une section hyperplane, et $h_X \in H^1(X,\Omega_X^1)$ sa restriction à X; l'élément $h_{\mathbf{P}}^q$ engendre $H^q(\mathbf{P},\Omega^q_{\mathbf{P}})$ pour tout q, et sa restriction h_X^q engendre $H^q(X,\Omega_X^q)$ pour $q < \nu$ [D]. Comme le degré de X est divisible par p, on a $h_X^\nu \cdot h_X^{\nu-1} = 0$ dans $H^{n-1}(X,\Omega_X^{n-1})$, d'où $h_X^\nu = 0$, ce qui prouve que la flèche α est nulle.

Par suite l'homomorphisme $\cup\xi^{(\nu)} : R_\sigma \to H^\nu(X,\Omega_X^{\nu-1})$ est surjectif, et son noyau est engendré par un élément non nul s de R_σ; d'autre part l'homomorphisme $\cup\xi^{(\nu-1)} : R_{\tau-\sigma} \to H^{\nu-1}(X,\Omega_X^\nu)$ est bijectif d'après (2). On déduit alors du diagramme

$$\begin{array}{ccc} R_\sigma\otimes R_{\tau-\sigma} & \to & H^\nu(X,\Omega_X^{\nu-1})\otimes H^{\nu-1}(X,\Omega_X^\nu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_\tau & \longrightarrow & H^{n-1}(X,\Omega_X^{n-1}) \end{array}$$

qu'on a $s \cdot R_{\tau-\sigma} = 0$, et que *la multiplication $R_\sigma \otimes R_{\tau-\sigma} \to R_\tau$ induit une dualité parfaite entre R_σ/ks et $R_{\tau-\sigma}$.* Compte tenu de (3), cela entraîne les assertions (a) et (b) dans le cas où n est pair.

(5) Traitons le cas n impair : posons $n = 2\nu + 1$. D'après (2), l'homomorphisme $\cup\xi^{(\nu-1)} : R_\sigma \to H^{\nu-1}(X, \Omega_X^{\nu+1}(d))$ est bijectif. La suite (S_ν) fournit une suite exacte

$$0 \to H^{\nu-1}(X, \Omega_X^{\nu-1}(d)) \xrightarrow{\cup\xi_\nu} H^\nu(X, \Omega_X^\nu) \xrightarrow{\beta} H^\nu(X, \Omega_{\mathbf{P}}^{\nu+1}(d)_{|X}).$$

Par dualité de Serre, la transposée de β s'identifie de nouveau à l'application de restriction $H^\nu(X, \Omega^\nu_{\mathbf{P}|X}) \to H^\nu(X, \Omega_X^\nu)$. Avec les notations de (4), on conclut donc que *l'homomorphisme* $\cup\xi^{(\nu)}$ *identifie* R_σ *à l'orthogonal de* h_X^ν *dans* $H^\nu(X, \Omega_X^\nu)$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R_\sigma \otimes R_\sigma & \longrightarrow & H^\nu(X, \Omega_X^\nu) \otimes H^\nu(X, \Omega_X^\nu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_\tau & \longrightarrow & H^{n-1}(X, \Omega_X^{n-1}) \end{array}$$

L'élément h_X^ν de $H^\nu(X, \Omega_X^\nu)$ est non nul [D], de carré nul puisque p divise d. Si s désigne l'élément correspondant de R_σ, il en résulte que la forme bilinéaire (symétrique) $m : R_\sigma \otimes R_\sigma \to R_\tau$ a pour noyau ks, et par suite induit une dualité parfaite $(R_\sigma/ks) \otimes (R_\sigma/ks) \to R_\tau$. Compte tenu de (3), cela entraîne les assertions (a) et (b) dans ce cas.

(6) Il reste à prouver l'assertion (c). Soit W l'anneau des vecteurs de Witt sur k, et soit $\mathcal{F}(T_0, \ldots, T_n)$ un polynôme homogène de degré d dont la réduction (mod p) est égale à F. Notons $\mathcal{X}$ l'hypersurface d'équation $\mathcal{F} = 0$ dans $\mathbf{P}_W^n$, et $\mathcal{R}$ la W-algèbre $W[T_0, \ldots, T_n]/(\mathcal{F}'_{T_0}, \ldots, \mathcal{F}'_{T_n}, \mathcal{F})$ (observons que $\mathcal{X}$ est nécessairement lisse sur W).

Il résulte de ce qui précède et du lemme de Nakayama que $\mathcal{R}_i$ est nul pour $i > \tau$, et que le W-module $\mathcal{R}_\tau$ est libre de rang un. Montrons que $\mathcal{R}_i$ est sans torsion (donc libre) pour $i \neq \sigma$: dans le cas contraire il contient un élément de torsion x dont la classe $\bar{x}$ dans $\mathcal{R}_i$ n'est pas nulle; on a nécessairement $x \cdot \mathcal{R}_{\tau-i} = 0$ dans $\mathcal{R}_\tau$, donc $\bar{x} \cdot \mathcal{R}_{\tau-i} = 0$, ce qui contredit (3) ou (4).

Si n est impair, on déduit de (5) que $\mathcal{R}_\sigma$ s'identifie à un sous-module du W-module $H^\nu(\mathcal{X}, \Omega^\nu)$; comme celui-ci est libre [D], il en est de même de $\mathcal{R}_\sigma$.

Enfin si n est pair, on déduit du lemme de Nakayama une suite exacte

$$0 \to \mathcal{T} \to \mathcal{R}_\sigma \to (\mathcal{R}_{\tau-\sigma})^* \to 0,$$

où $\mathcal{T}$ est un W-module monogène de torsion. Le W-module $\mathcal{R}_\sigma/\mathcal{T}$ est libre, et sa réduction (mod p) s'identifie à R_σ/ks.

L'assertion (c) résulte immédiatement de ces remarques. CQFD

APPENDICE

Ideals with a regular sequence as syzygy

DAVID EISENBUD and CRAIG HUNEKE

We sketch an alternate approach to Proposition 2, reducing it to results of Huneke and Ulrich [H-U] and Kustin [Ku] (results similar to those of Kustin were also obtained by M. Stillman). In [H-U] the authors work over a ring containing a field, but the results are general, and are done explicitly without this hypothesis in [Ku].

Assume that R is a local Nœtherian ring, that $x_1, \ldots, x_n$ is a regular sequence in R and that $f_1, \ldots, f_n$ are elements of R satisfying the relation

$$(*) \qquad x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n = 0.$$

We further set $I = (f_1, \ldots, f_n)$ and suppose that the grade of I is $n-1$, the largest possible value.

If f is a form in $k[x_1, \ldots, x_n]$ defining a nonsingular hypersurface, and if char(k) divides the degree of f, then Euler's relation shows that these hypotheses are satisfied by the partial derivatives of f in the localization of $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Theorem. *If grade$(I) = n-1$, then*

(i) *if n is odd, R/I is perfect of Cohen-Macaulay type* 2.

(ii) *if n is even, there exists an element $f \notin I$ such that*

$$I : (x_1, \ldots, x_n) = (I, f),$$

and $R/(I, f)$ is perfect of Cohen-Macaulay type 1.

Proof : The most interesting point is the identity of the element f : the relation (*) shows that the vector (f_i) is a linear combination of the syzygies of the x_i. Since the x_i form a regular sequence, their syzygies are given by the first map of the Koszul complex $k : \wedge^2 R^n \to \wedge^1 R^n$, so there exists a skew-symmetric matrix A such that $(f_i) = A(x_j)$. The element f is then the Pfaffian of A.

The result follows by specialization from the generic case, which is treated in [H-U], 5.8, 5.9 and 5.12, and in [Ku] . QED

Corollary. *If R is regular, $x_1, \ldots, x_n$ generate the maximal ideal, and g is an element of R such that $ht(I, g) = n$, then the socle of $R/(I, g)$ is two-dimensional.*

Proof : If n is odd, the corollary follows at once from (i). If n is even, it follows from (ii) because g must be a nonzero divisor mod(I, f).

Graded free resolutions for the generic forms of the ideals I and (I, f) as in the Theorem can be found in [Ku], Theorem 6.3. By local duality, this gives the degrees of the socle elements in the corollary (alternatively, one can use linkage, as was done in [H-U]). Applying this to the case of partial derivatives of the equation of a nonsingular hypersurface, one recovers the degree results of Beauville.

BIBLIOGRAPHIE

[D] P. Deligne, *Cohomologie des intersections complètes*, SGA 7 II, exp. 11, Lecture Notes **340**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1973).

[H-U] C. Huneke, B. Ulrich, *Divisor class groups and deformations*, Amer. J. of Math. **107** (1985), 1265-1303.

[I] L. Illusie, *Ordinarité des intersections complètes générales*, ce volume.

[K] N. Katz, *Pinceaux de Lefschetz: théorème d'existence*, SGA 7 II, exp. 17, Lecture Notes **340**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1973).

[Ku] A. Kustin, *The minimal free resolutions of the Huneke-Ulrich deviation two Gorenstein ideals*, J. of Algebra **100** (1986), 265-304.

[M] J. P. Murre, *Algebraic equivalence modulo rational equivalence on a cubic threefold*, Compositio math. **25** (1972), 161-206.

[S] R. Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **80** (1968).

[Z] O. Zariski, *Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces*, Publ. Math. Soc. Japan 4 (1958), 1-89.

Arnaud Beauville
Université Paris-Sud
Orsay