DIVISEURS SPECIAUX ET INTERSECTION DE CYCLES DANS LA JACOBIENNE D'UNE COURBE ALGEBRIQUE

Arnaud BEAUVILLE

INTRODUCTION.

Dans les démonstrations de géométrie énumérative, le point clé est souvent le calcul des classes de cohomologie de certains cycles algébriques. Il n'est guère plus difficile de travailler, non pas dans la cohomologie, mais dans l'anneau de Chow des variétés considérées ; on obtient ainsi, outre le résultat numérique, une information géométrique qui peut être intéressante.

Dans ce travail, nous appliquons cette philosophie à la formule de Castelnuovo qui calcule le nombre de systèmes linéaires spéciaux sur une courbe générique, lorsque ce nombre est fini. Le résultat est la partie c) du théorème suivant.

THEOREME 1. *Soit C une courbe générale de genre g, et soient r, d deux entiers tels que $g = (r+1)(g+r-d)$.*

a) Il existe un nombre fini $N(g,r,d)$ de classes de diviseurs D_i sur C, de degré d, telles que $h^0(D_i) = r+1$.

b) On a $N(g,r,d) = g!\,\dfrac{1!\ldots\ldots r!}{(g+r-d)!\ldots(g+2r-d)!}$

c) La somme dans $\mathrm{Pic}(C)$ de ces diviseurs est un multiple entier du diviseur canonique.

On a donc $\sum_{i=1}^{N} D_i \equiv mK$, où $m = \dfrac{dN(g,r,d)}{2g-2}$ est entier.

La partie a) de ce théorème est un cas particulier du problème de Brill-Noether, récemment résolu par Griffiths-Harris [G-H] . La formule b) est due à Castelnuovo [C] . L'assertion c) m'a été signalée par E. Arbarello, comme conséquence de la conjecture suivante :

CONJECTURE (Franchetta) : *Soient $\mathcal{M}_g$ l'espace des modules (grossier) des courbes de genre g ($g \geq 2$), M_g son corps de fonctions, et C_g la courbe universelle sur M_g. Le groupe $\mathrm{Pic}(C_g)$ est engendré par la classe* *du diviseur canonique.*

La démonstration proposée par Franchetta [F] est malheureusement tout-à-fait incomplète (un gros "trou" figure au début du n°11, p.140), et on ne voit guère comment la sauver. C'est pourquoi il m'a paru intéressant de donner de l'assertion c) une démonstration directe, proche de la démonstration de la formule énumérative b). (*)

§ I. VARIETES DE DIVISEURS SPECIAUX DANS LES JACOBIENNES.

Toutes les variétés considérées dans cet article sont des variétés complexes. Si X est une variété lisse projective, on notera $CH(X) = \bigoplus_p CH^p(X)$ l'anneau de Chow de X (anneau des cycles algébriques modulo l'équivalence rationnelle, gradué par la codimension).

On fixe désormais une courbe algébrique C lisse, connexe, de genre g. Pour $d \in \mathbb{Z}$, on note J^d la variété des classes de diviseurs de degré d sur C (modulo équivalence linéaire) ; ainsi $J = J^0$ est la jacobienne de C, et J^d est isomorphe (non canoniquement) à J. On désigne par W^r_d la sous-variété de J^d formée des classes des diviseurs D tels que $h^0(D) \geq r+1$.

On note $C^{(d)}$ la d-ième puissance symétrique de C et $\varphi^d : C^{(d)} \longrightarrow J^d$ le morphisme canonique. Rappelons que φ^d est génériquement injectif pour $0 \leq d \leq g$; son image, qui n'est autre que W^0_d, est donc de dimension d.

Il sera commode dans ce qui suit d'identifier entre elles les variétés J^d ; on choisit pour cela un point P de C, et on identifie désormais J^d à J à l'aide de la translation par le diviseur dP. Avec cette convention, on note $w_p \in CH^p(J)$ la classe du cycle W^0_{g-p}. On notera aussi θ l'élément w_1 de Pic(J) : il définit la polarisation principale de J (théorème de Riemann).

Le théorème de Kleiman-Laksov [K-L] exprime le cycle W^r_d en fonction des w_p :

THEOREME 2. *Soient d,r des entiers positifs ; posons* $\rho = g-(r+1)(g-d+r)$.

a) Les composantes de W^r_d sont de dimension $\geq \rho$; il y a égalité si C est générique.

b) Si la variété W^r_d est pure de dimension ρ , sa classe dans $CH^{g-\rho}(J)$ est

(*) La conjecture est maintenant démontrée, comme conséquence de résultats topologiques de J. Harer.

$$[W_d^r] = \det \begin{vmatrix} w_{g+r-d} & \cdots\cdots & w_{g+2r-d} \\ \vdots & & \\ w_{g-d} & \cdots\cdots & w_{g+r-d} \end{vmatrix} .$$

COROLLAIRE. *Sous l'hypothèse b), la classe de W_d^r dans $H^{2g-2\rho}(J,\mathbb{Z})$ est* $\theta^{g-\rho} \dfrac{1!\ldots\ldots r!}{(g+r-d)!\ldots(g+2r-d)!}$.

Cela résulte de la formule de Poincaré : $w_p = \dfrac{\theta^p}{p!}$ dans $H^{2p}(J,\mathbb{Z})$ et d'un calcul facile de déterminant, cf. [K-L] .

On déduit aussitôt du corollaire la formule b) du théorème 1 (noter que $\deg\theta^g = g!$).

Pour obtenir le résultat plus précis c), il faut calculer dans CH(J), modulo une relation d'équivalence plus fine que l'équivalence homologique. Observons que pour toute variété abélienne A de dimension g, l'application qui associe à un O-cycle $\Sigma m_i[a_i]$ ($m_i \in \mathbb{Z}$, $a_i \in A$) l'élément $\Sigma m_i\, a_i$ de A définit par passage au quotient un homomorphisme $S : CH^g(A) \longrightarrow A$ (cf. [W]). Prenons A=J et plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 1, de sorte que W_d^r est un ensemble fini de diviseurs $D_1,\ldots,D_N$; on trouve alors $S(W_d^r) = \Sigma\, D_i - (Nd)P$. Pour déduire le théorème 1 c) du théorème 2, il s'agit donc de calculer les expressions $S(w_{p_1}\ldots w_{p_n})$ pour $p_1+\ldots+p_n = g$.

THEOREME 3. *Soient $p_1,\ldots,p_n$ des entiers positifs de somme g.* *On a : $S(w_{p_1}\ldots w_{p_n}) = M(g;p_1,\ldots,p_n)\ (K-(2g-2)P)$,* *où $M(g;p_1,\ldots,p_n)$ est un entier défini par*

$$M(g;p_1,\ldots,p_n) = \frac{(g-2)!}{p_1!\ldots p_n!}\,\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i(g-p_i)$$

Ce théorème, joint au théorème 2, entraîne qu'il existe un entier m tel que $\Sigma D_i - (Nd)P \equiv m(K-(2g-2)P)$. Cette formule étant valable pour tout point P de C, on en déduit $m = \dfrac{Nd}{2g-2}$ et $\Sigma\, D_i \equiv mK$, d'où le théorème 1 c). On notera qu'il n'est pas nécessaire pour cela de connaître la valeur de l'entier $M(g;p_1,\ldots,p_n)$.

REMARQUE. Il résulte de la démonstration que le théorème 1 c) est valable pour une courbe C quelconque, pourvu que la variété W_d^r soit finie (et $\rho = 0$). Sans cette hypothèse, W. Fulton m'a indiqué qu'il existe toujours un O-cycle effectif $\mathfrak{z}$ de W_d^r, bien défini à équivalence rationnelle près, dont la classe dans $CH^g(J)$ est donnée par la formule du th. 2 b) : on peut l'obtenir par exemple en écrivant C comme spécialisation d'une courbe générale. La somme des diviseurs de $\mathfrak{z}$ est alors un multiple entier du diviseur canonique.

§ II. CYCLES ALGEBRIQUES SUR LES VARIETES ABELIENNES.

Je regroupe dans ce paragraphe quelques résultats généraux utiles pour la suite. Je renvoie par exemple à [G] pour la définition des jacobiennes intermédiaires et de l'application d'Abel-Jacobi.

PROPOSITION 1. *Soit X une variété projective lisse. Pour $1 \leq p \leq \dim X$, notons $\Sigma^p(X)$ le sous-groupe de $CH^p(X)$ formé des cycles homologiquement équivalents à zéro, $J^p(X)$ la p-ième jacobienne intermédiaire de X et $\alpha^p : \Sigma^p(X) \longrightarrow J^p(X)$ l'application d'Abel-Jacobi. Soient $x \in \Sigma^p(X)$, $y \in \Sigma^q(X)$; on a alors $\alpha^{p+q}(xy) = 0$*

DEMONSTRATION : Pour tout cycle $y \in CH^q(X)$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Sigma^p(X) \arrow[r, "y"] \arrow[d, "\alpha^p"'] & \Sigma^{p+q}(X) \arrow[d, "\alpha^{p+q}"] \\ J^p(X) \arrow[r] & J^{p+q}(X) \end{tikzcd}$$

où la première flèche horizontale est l'intersection avec y, et la seconde est déduite du cup-produit avec la classe de y dans $H^{2q}(X, \mathbb{Z})$ ([G], 2.16). Lorsque y est homologiquement trivial, on a donc $\alpha^{p+q}(x\ y) = 0$ pour tout x dans $\Sigma^p(X)$.

Lorsque $p = \dim(X)$, le tore $J^p(X)$ est la variété d'Albanese de X, et α^p est l'homomorphisme canonique déduit du morphisme d'Albanese. Si X est elle-même une variété abélienne, Alb(X) est canoniquement isomorphe à X, et $\alpha^p : \Sigma^p(X) \to X$ n'est autre que la restriction à $\Sigma^p(X)$ de l'homomorphisme S défini au n° 2. Par conséquent :

PROPOSITION 2. *Soit A une variété abélienne, et soient x, y deux cycles sur A de dimensions complémentaires, homologiquement équivalents à zéro. On a $S(xy) = 0$.*

Les corollaires qui suivent se trouvent déjà dans [M]. Pour $a \in A$, on note T_a la translation $x \longmapsto x+a$ de A.

COROLLAIRE 1. *Soient x,y des cycles de dimensions complémentaires sur A. L'application $\alpha(x,y)$: $a \longmapsto S(x.(T_a^* y-y))$ est un endomorphisme de A, qui ne dépend que des classes de cohomologie de x et y.*

DEMONSTRATION : Notons d'abord que pour tout 0-cycle $\mathfrak{z} \in CH^g(A)$, on a

$$S(T_a^* \mathfrak{z}) = S(\mathfrak{z}) - (\deg \mathfrak{z})\ a$$

par conséquent : $S(x.T_a^* y) = S(T_{-a}^* x.y) - (\deg x.y)\ a$

et $S(x.(T_a^* y-y)) = S((T_{-a}^* x-x).y) - (\deg x.y)\ a$.

Il résulte alors de la prop.2 que cette expression est nulle lorsque x ou y est homologiquement trivial. Remplaçant y par $T_b^* y-y$, pour $b \in A$, on en déduit

$$S(x.(T_{a+b}^* y-T_a^* y-T_b^* y + y)) = 0,$$

ce qui prouve que $\alpha(x,y)$ est un homomorphisme.

COROLLAIRE 2. *Posons $g = \dim(A)$. Soient $p_1,\dots,p_n$ des entiers positifs de somme g, et soient*

$$x_1 \in CH^{p_1}(A),\dots,x_n \in CH^{p_n}(A),\ a_1,\dots,a_n \in A.$$

a) *On a*

$$S(T_{a_1}^* x_1 \,.\, \dots \,.\, T_{a_n}^* x_n) - S(x_1 \dots x_n) = \sum_i \alpha(x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_n, x_i)(a_i)$$

b) *Soit D un diviseur sur A ; supposons que pour $1 \le i \le n$, x_i soit homologiquement équivalent à D^{p_i}. On a alors*

$$S(T_{a_1}^* x_1 \,.\, \dots \,.\, T_{a_n}^* x_n) - S(x_1 \dots x_n) = - \frac{\deg D^g}{g} \sum_i p_i\ a_i$$

La formule a) résulte du cor.1 et de l'égalité

$$S(T_{a_1}^* x_1 \,.\, \dots \,.\, T_{a_n}^* x_n) = S((T_{a_1}^* x_1-x_1) \,.\, \dots \,.\, T_{a_n}^* x_n) +$$

$$+S(x_1.(T_{a_2}^* x_2-x_2)\dots T_{a_n}^* x_n) + S(x_1\dots x_{n-1}(T_{a_n}^* x_n-x_n)) + S(x_1\dots x_n).$$

En faisant dans la formule a) $x_i = D$ pour tout i, $a_1 = \dots = a_p = 0$, $a_{p+1} = \dots = a_g = a$, on obtient

$$\alpha(D^p,D^{g-p}) = (g-p)\ \alpha(D^{g-1},D) \ ;$$

en particulier, pour p = 0, on trouve

$$\alpha(D^{g-1},D) = \frac{1}{g}\ \alpha(1,D^g) = - \frac{1}{g}\ (\deg D^g)\,.\ \mathrm{Id}_A$$

d'où finalement $\alpha(D^p,D^{g-p}) = \frac{p-g}{g}\ (\deg D^g)\,.\ \mathrm{Id}_A$

En reportant cette égalité dans a), on obtient la formule b).

§ 3. DEMONSTRATION DU THEOREME 3.

a) Réduction à un calcul modulo torsion

Nous allons d'abord nous réduire à un résultat moins fort :

PROPOSITION 3. *Il existe un rationnel M tel qu'on ait* $S(w_{p_1}\dots w_{p_n}) = M(K-(2g-2)P)$ *dans* $J \otimes \mathbb{Q}$.

Montrons que la prop. 3 entraîne le théorème 3. Examinons pour cela l'effet d'un changement du point de base P. Soit P' un autre point de C ; posons $\alpha = P' - P$. La sous-variété W'_q de J définie comme au § 1 à l'aide du point P' est égale à $T^{-1}_{q\alpha}(W_p)$; sa classe w'_p dans $CH^p(J)$ (avec $p = g-q$) est donc $T^{*}_{(g-p)\alpha}\, w_p$. D'après le cor. 2b) du § 2, on a

$$S(w'_{p_1}\dots w'_{p_n}) - S(w_{p_1}\dots w_{p_n}) = -\frac{(g-1)!}{p_1!\dots p_n!}\sum_i p_i\,(g-p_i).\alpha \quad ;$$

d'autre part en appliquant la prop.3, on trouve que cette expression est égale à $-M(2g-2)\alpha$, d'où $M=\frac{(g-2)!}{p_1!\dots p_n!}\cdot\frac{1}{2}\sum p_i(g-p_i) = M(g;p_1,\dots,p_n)$.

LEMME 1. *Le nombre M est entier.*

DEMONSTRATION. Ecrivant $p_i(g-p_i) = p_i(g-1) - p_i(p_i-1)$, on obtient

$$2M = \frac{g!}{p_1!\dots p_n!} - \sum_i \frac{(g-2)!}{p_1!\dots(p_i-2)!\dots p_n!} \quad .$$

Par conséquent, 2M est le coefficient de $T^{p_1}\dots T^{p_n}$ dans le développement de

$$(T_1+\dots+T_n)^g-(T_1+\dots+T_n)^{g-2}(T_1^2+\dots+T_n^2) = 2(T_1+\dots+T_n)^{g-2}\sum_{i<j} T_i\,T_j \ ,$$

d'où le lemme.

Il reste à éliminer la torsion. Soit $f : \mathscr{C} \longrightarrow S$ une famille de courbes lisses ; l'application $P \longmapsto S(w_{p_1}\dots w_{p_n}) - M(K-(2g-2)P)$ définit un morphisme de $\mathscr{C}$ dans le schéma de Picard Pic $(\mathscr{C}/S)$. D'après ce qui précède, ce morphisme est constant sur les fibres de f, et son image est de torsion ; pour un entier ℓ convenable, il définit donc une section du revêtement $S_\ell \longrightarrow S$ formé des points d'ordre ℓ de Pic $(\mathscr{C}/S)$.

Prenons maintenant pour S le schéma de Hilbert des courbes de genre g tricanoniques dans $\mathbb{P}^{5g-6}$ (de sorte que le quotient S/PGL(5g-5) est l'espace des modules $\mathcal{M}_g$), et pour $\mathcal{C}$ la courbe universelle. Alors S_ℓ est irréductible : en effet $S_\ell/PGL(5g-5)$ est un quotient de l'espace de Teichmüller. Le revêtement $S_\ell \to S$ ne peut donc avoir une section que pour $\ell=1$, ce qui prouve l'égalité $S(w_{p_1}\dots w_{p_n}) = M\,(K-(2g-2)P)$ dans $J(C)$ pour toute courbe C et tout point $P\in C$.

b) Réduction à un calcul sur C^p.

Nous calculons désormais dans $J \otimes \mathbb{Q}$. On a

$$S(w_{p_1}\dots w_{p_n}) = S((w_{p_1} - \frac{\theta^{p_1}}{p_1!})\dots w_{p_n}) + S(\frac{\theta^{p_1}}{p_1!}(w_{p_2} - \frac{\theta^{p_2}}{p_2!})\dots w_{p_n}) +$$

$$+ S(\frac{\theta^{p_1}}{p_1!}\dots(w_{p_n} - \frac{\theta^{p_n}}{p_n!})) + S(\frac{\theta^{p_1}}{p_1!}\dots\frac{\theta^{p_n}}{p_n!})$$

Le cycle $w_{p_i} - \frac{\theta^{p_i}}{p_i!}$ est homologiquement équivalent à zéro ; compte tenu de la prop.2, on trouve :

$$p_1!\dots p_n!\, S(w_{p_1}\dots w_{p_n}) = \sum_{i=1}^{n} S(\theta^{g-p_i}.(p_i!w_{p_i} - \theta^{p_i})) + S(\theta^g).$$

Pour démontrer la prop.3, il suffit donc de prouver que pour tout p, l'élément $S(w_{g-p}\,\theta^p)$ de $J \otimes \mathbb{Q}$ est multiple rationnel de $K-(2g-2)P$.

Fixons un entier positif $p \leq g$; notons simplement φ l'application φ^p de $C^{(p)}$ dans J. Soient $\pi : C^p \longrightarrow C^{(p)}$ l'application canonique, et $\rho = \varphi\circ\pi$. On a dans $CH^g(J) \otimes \mathbb{Q}$

$$w_{g-p}\,\theta^p = (\varphi_*1).\,\theta^p = \varphi_*\,\varphi^*\,\theta^p$$
$$= \frac{1}{p!}\,\varphi_*\pi_*\pi^*\varphi^*\,\theta^p = \frac{1}{p!}\,\rho_*(\rho^*\theta)^p\ .$$

Reste à calculer $\rho^*\theta$. On notera $p_i : C^p \longrightarrow C$ la i-ième projection, et Δ_{ij} le diviseur de C^p formé des points $(x_1,\dots,x_p)$ tels que $x_i=x_j$.

LEMME 2. *Posons $D = K-(g-1-p)P$. On a dans $\mathrm{Pic}(C^p)$ l'égalité*

$$\rho^*\theta = \sum_i p_i^*D - \sum_{i<j}\Delta_{ij}\ .$$

DEMONSTRATION : Les deux expressions sont invariantes sous le groupe symétrique $\mathfrak{S}_p$; d'après les théorèmes du carré et du cube, il suffit de vérifier l'égalité du lemme après restriction à $C\times\{x_1\}\times\dots\times\{x_{p-1}\}$, pour tous points $x_1,\dots,x_{p-1}$ de C. Posant $\lambda = x_1+\dots+x_{p-1} - (p-1)P$, on est ramené à démontrer dans Pic(C) l'égalité

$$(\varphi^1)^* T_\lambda^* \theta = D - \sum_i x_i = K - (g-2)P - \lambda ,$$

qui est bien connue ([W], n° 41, th. 20), et facile : il suffit de la vérifier pour $\lambda = x-y$ $(x,y \in C)$, auquel cas elle résulte aussitôt de Riemann-Roch.

c) Le calcul.

Il s'agit donc de prouver que chaque terme du développement de $\rho_*(\sum_i p_i^* D - \sum_{i<j} \Delta_{ij})^p$ est multiple rationnel (dans $J \otimes \mathbb{Q}$) de $K-(2g-2)P$. Nous décrirons un tel terme par un graphe $\Gamma = (A,S)$, c'est-à-dire un ensemble d'arêtes A, un ensemble de sommets S et une application e de A dans l'ensemble des parties de S formées de un ou deux éléments. On prendra ici $S = [1,p]$; à un tel graphe on associe le cycle

$$t(\Gamma) = \prod_{a \in A} \Delta_{e(a)} ,$$

en posant par convention $\Delta_s = p_s^* D$ pour $s \in S$; on a $t(\Gamma) \in CH^q(C^p)$, avec $q = \mathrm{Card}(A)$. Il est clair que $(\sum_i p_i^* D - \sum_{i<j} \Delta_{ij})^p$ est combinaison linéaire à coefficients entiers de cycles $t(\Gamma)$, pour des graphes Γ ayant p arêtes.

Nous fixons dans ce qui suit un graphe Γ avec $\mathrm{Card}(A) = p$, tel que $t(\Gamma)$ soit non nul. Pour toute partie I de S, on note p_I la projection de C^S sur C^I, et $\delta_I : C \longrightarrow C^I$ l'application diagonale.

LEMME 3. *Pour toute composante connexe $\Gamma_\alpha = (A_\alpha, S_\alpha)$ de Γ, on a $\mathrm{Card}(A_\alpha) = \mathrm{Card}(S_\alpha)$.*

DEMONSTRATION : Pour $a \in A_\alpha$, le diviseur $\Delta_{e(a)}$ est l'image réciproque par la projection p_{S_α} d'un diviseur sur C^{S_α} ; par conséquent le cycle $\prod_{a \in A_\alpha} \Delta_{e(a)}$ est l'image réciproque d'un cycle non nul sur C^{S_α}, de codimension $\mathrm{Card}(A_\alpha)$. On a donc $\mathrm{Card}(A_\alpha) \leq \dim(C^{S_\alpha}) = \mathrm{Card}(S_\alpha)$.
Comme

$$p = \sum_\alpha \mathrm{Card}(A_\alpha) \leq \sum_\alpha \mathrm{Card}(S_\alpha) = p,$$

on a $\mathrm{Card}(A_\alpha) = \mathrm{Card}(S_\alpha)$ pour tout α .

Soit n un entier ≥ 1. On dit qu'un graphe $\Gamma = (A,S)$ est un circuit de longueur n si on peut écrire $A = \{a_1,\dots,a_n\}$, $S = \{s_1,\dots,s_n\}$ de façon que $e(a_i) = \{s_i, s_{i+1}\}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, et $e(a_n) = \{s_n, s_1\}$.

LEMME 4. *Soit* $\Gamma' = (B,T)$ *un circuit de longueur n. On a* $t(\Gamma') = p_T^*(\delta_T)_* E_n$, *avec* $E_n = -K$ *si* $n \geq 2$ *et* $E_1 = D$.

DEMONSTRATION : Le cas n=1 étant évident, on peut supposer $n \geq 2$; il s'agit de prouver dans $CH^n(C^n)$ l'égalité
$\Delta_{12}\dots\Delta_{n-1,n}\ \Delta_{n,1} = -\delta_* K$, où $\delta : C \longrightarrow C^n$ est l'application diagonale.
On a

$$\Delta_{12}\ \dots\ \Delta_{n-1,n} = \delta_* 1 \text{ et } \delta_* 1 \,.\, \Delta_{n,1} = \delta_*(\delta^* \Delta_{n,1}) \ .$$

Or $\Delta_{n,1}$ est l'image réciproque par $p_{n,1} : C^n \longrightarrow C^2$ de la diagonale de CxC ; par suite $\delta^* \Delta_{n,1}$ est l'autointersection de la diagonale dans CxC, c'est-à-dire -K.

LEMME 5. *Soient* $I \subset S$, $i \in I$, $j \in S-I$ *et* $J = I \cup \{j\}$. *Pour tout diviseur* E *sur* C, *on a*

$$(p_I^*(\delta_I)_* E) \,.\, \Delta_{ij} = p_J^*(\delta_J)_*\ E$$

Il suffit de le démontrer lorsque E est réduit à un point ; la vérification est alors immédiate.

Nous pouvons maintenant calculer $t(\Gamma)$. Soit $\Gamma_\alpha = (A_\alpha, S_\alpha)$ une composante de Γ . C'est un graphe connexe de genre 1, c'est-à-dire réunion d'un circuit et d'arbres disjoints, rencontrant chacun le circuit en un point. Il résulte aussitôt des lemmes 4 et 5 qu'on a
$t(\Gamma_\alpha) = p_{S_\alpha}^* (\delta_{S_\alpha})_* E_n$. Par conséquent

$$t(\Gamma) = \prod_\alpha\ p_{S_\alpha}^* \ (\delta_{S_\alpha})_* \ E_\alpha,$$

où E_α est égal à D si le graphe Γ_α contient une arête à une seule extrémité et à -K dans le cas contraire.
On a alors

$$\rho_* \ t(\Gamma) = \sum_\alpha m_\alpha (E_\alpha - (\deg E_\alpha).P), \text{ avec } m_\alpha = \mathrm{Card}(S_\alpha) \,.\, \prod_{\beta \neq \alpha} \deg(E_\beta) \ ;$$

en effet, pour vérifier cette formule, on peut supposer que tous les E_α sont réduits à un point, auquel cas c'est immédiat. Compte tenu de la valeur des E_α, on trouve

$$\rho_* \, t(\Gamma) = M\ (K - (2g-2)P, \text{ avec } M = \Sigma \pm m_\alpha \in \mathbb{Z}.$$

Ceci achève de prouver la proposition 3, donc le théorème 3.

B I B L I O G R A P H I E

[C] G. Castelnuovo : Numero delle involuzioni giacenti sopra una curva di dato genere. Rend. Acad. Lincei, s.4, 5 (1889).

[F] A. Franchetta : Sulle serie lineari razionalmente determinate sulla curva a moduli generali di dato genere. Le Matematiche, Fasc. 11 (1954).

[G] P. Griffiths : Some transcendental methods in the study of algebraic cycles. Several complex variables II, Maryland 1970 - Springer Lecture Notes 185 (1971), 1-46.

[G-H] P. Griffiths, J. Harris : On the variety of special linear systems on a general algebraic curve. Duke Math. Journal 47 (1980), 233-272.

[K-L] S. Kleiman, D. Laksov : Another proof of the existence of special divisors. Acta Math. 132 (1974), 163-176.

[M] T. Matsusaka : On a characterization of a Jacobian variety. Mem. Coll. Sci. Kyoto, ser. A, (1959), 1-19.

[W] A. Weil : Courbes algébriques et variétés abéliennes. Hermann, Paris (1948).

Arnaud BEAUVILLE
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique

F-91128 PALAISEAU CEDEX.