Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Un lemme de descente

Arnaud Beauville et Yves Laszlo

Résumé – Soient A un anneau, f un élément simplifiable de A, $\widehat{\mathrm{A}}$ le séparé complété de A pour la topologie (f)-adique. Nous prouvons que la donnée d'un fibré vectoriel sur $\mathrm{Spec(A)}$ équivaut à celle d'un fibré sur l'ouvert $f \neq 0$ de $\mathrm{Spec(A)}$ et sur $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{A}})$, et d'un isomorphisme de leurs images réciproques sur l'ouvert $f \neq 0$ de $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{A}})$.

A descent lemma

Abstract – Let A be a ring, f a nonzero divisor in A, $\widehat{\mathrm{A}}$ the completion of A for the (f)-adic topology. We prove that the data of a vector bundle on $\mathrm{Spec(A)}$ is equivalent to the data of a vector bundle on the open subset $f \neq 0$ of $\mathrm{Spec(A)}$ and on $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{A}})$, together with an isomorphism of their pull back to the open subset $f \neq 0$ of $\mathrm{Spec}(\widehat{\mathrm{A}})$.

Abridged English Version: Let A be a ring, f a nonzero divisor in A, $\widehat{\mathrm{A}}$ the completion of A for the (f)-adic topology. We denote by A_f and $\widehat{\mathrm{A}}_f$ the ring of fractions $\mathrm{A}[1/f]$ and $\widehat{\mathrm{A}}[1/f]$. To any A-module we can associate an A_f-module $\mathrm{F} = \mathrm{M}_f$, an $\widehat{\mathrm{A}}$-module $\mathrm{G} = \widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ and an $\widehat{\mathrm{A}}_f$-isomorphism $\varphi : \widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{F} \to \mathrm{G}_f$. Conversely, can we recover an A-module from the data $(\mathrm{F}, \mathrm{G}, \varphi)$? This turns out to be true under the assumption that M is *f-regular*, i.e. that the homothety f_{M} is injective:

Theorem .– *Suppose given:*

– *an* A_f*-module* F *;*

– *an* f*-regular* $\widehat{\mathrm{A}}$*-module* G *;*

– *an* $\widehat{\mathrm{A}}_f$*-linear isomorphism* $\varphi : \widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}_f$ *.*

Then there exists a f*-regular* A*-module* M *and isomorphisms* $\alpha : \mathrm{M}_f \longrightarrow \mathrm{F}$*,* $\beta : \widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{G}$ *such that* φ *is the composition of*

$$\widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{F} \xrightarrow{1 \otimes \alpha^{-1}} \widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_f \xrightarrow{\ \beta_f\ } \mathrm{G}_f \ .$$

The triple $(\mathrm{M}, \alpha, \beta)$ *is uniquely determined up to a unique isomorphism.*

If F *and* G *are finitely generated* (resp. *flat,* resp. *projective and finitely generated*)*, then* M *has the same property.*

Though this looks like a classical descent problem, it does not seem to follow directly from Grothendieck's faithfully flat descent theory: if A is not noetherian, the map $\mathrm{A} \to \widehat{\mathrm{A}}$ is not flat.

Proof: Put $\mathrm{B} = \mathrm{A}_f \times \widehat{\mathrm{A}}$, and let $\rho : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ be the canonical map. The homomorphism ρ is *faithful*, which means that for each nonzero A-module M the B-module

$\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ is nonzero. This implies that a homomorphism $u:\mathrm{M}\to\mathrm{N}$ is surjective if and only if $u_{(\mathrm{B})}:\mathrm{M}_{(\mathrm{B})}\to\mathrm{N}_{(\mathrm{B})}$ is surjective.

Let us prove the unicity first. The canonical map $\mathrm{A}_f/\mathrm{A}\to\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}_f/\mathrm{A})$ is easily seen to be an isomorphism. Therefore we have an exact sequence

$$0\to\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{A}_f\longrightarrow\widehat{\mathrm{A}}_f/\widehat{\mathrm{A}}\to 0\ .$$

Let $(\mathrm{M},\alpha,\beta)$ be a triple as in the Theorem. Since M is f-regular one has $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/f^n\mathrm{A},\mathrm{M})=0$ for each n, and therefore $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{A}_f/\mathrm{A},\mathrm{M})=0$, so we get an exact sequence

$$0\to\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{M}_f\longrightarrow(\widehat{\mathrm{A}}_f\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M})/(\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M})\to 0\ .$$

Using the isomorphisms α and β we can write this as

$$0\to\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{F}\xrightarrow{\overline{\varphi}}\mathrm{G}_f/\mathrm{G}\to 0\ ,$$

where $\overline{\varphi}$ is deduced from φ in the obvious way. This implies the unicity assertion.

Conversely, starting from a triple $(\mathrm{F},\mathrm{G},\varphi)$, we consider the A-linear map $\overline{\varphi}:\mathrm{F}\to\mathrm{G}_f/\mathrm{G}$ deduced from φ; we claim that it is surjective. Since ρ is faithful and $\mathrm{A}_f\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{G}_f/\mathrm{G})=0$, it is enough to check this after tensor product with $\widehat{\mathrm{A}}$. But $1_{\widehat{\mathrm{A}}}\otimes\overline{\varphi}:\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{F}\longrightarrow\mathrm{G}_f/\mathrm{G}$ is the composition of the isomorphism φ and the canonical surjection $\pi:\mathrm{G}_f\to\mathrm{G}_f/\mathrm{G}$, hence our assertion.

We put $\mathrm{M}=\mathrm{Ker}\,\overline{\varphi}$, so that we have an exact sequence

$$0\to\mathrm{M}\xrightarrow{i}\mathrm{F}\xrightarrow{\overline{\varphi}}\mathrm{G}_f/\mathrm{G}\to 0\ .$$

By tensor product with A_f we see that $i_f:\mathrm{M}_f\to\mathrm{F}$ is an isomorphism: we denote it by α. One checks that $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\widehat{\mathrm{A}},\mathrm{G}_f/\mathrm{G})=0$, so tensor product with $\widehat{\mathrm{A}}$ gives an exact sequence

$$0\to\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\xrightarrow{1\otimes i}\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{F}\xrightarrow{\pi\circ\varphi}\mathrm{G}_f/\mathrm{G}\to 0\ ,$$

therefore the map $\beta:=\varphi\circ(1_{\widehat{\mathrm{A}}}\otimes i)$ is an isomorphism of $\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ onto G. By construction $\beta_f\circ(1_{\widehat{\mathrm{A}}}\otimes\alpha^{-1})$ coincides with φ.

The last assertions can be deduced without difficulty from the fact that ρ is faithful. ∎

Remarks.– 1) In categorical terms, the theorem can be formulated in the following elegant way (due to [F-R]). For each ring R, let us denote by $\mathbf{M}(\mathrm{R})$ the category of R-modules; for $f\in\mathrm{R}$, let $\mathbf{M}_f(\mathrm{R})$ be the full subcategory of $\mathbf{M}(\mathrm{R})$ whose objects are the f-regular R-modules. Then *the diagram of categories*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_f(\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathbf{M}_f(\widehat{\mathrm{A}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{M}(\mathrm{A}_f) & \longrightarrow & \mathbf{M}(\widehat{\mathrm{A}}_f) \end{array}$$

where the arrows are the natural base extension functors, *is cartesian.*

2) The theorem can be easily generalized to a global situation. Let us just mention here the following corollary, which was our original motivation (the proof we gave in [B-L] is rather sketchy). Let X be an algebraic curve over a field k, p a smooth rational point of C, z a local coordinate at p, R a k-algebra. Then *there is a functorial bijection between the set of isomorphism classes of triples* (E,τ,σ), *where* E *is a rank* r *vector bundle on* X_R *and* τ, σ *trivializations of* E *over* $(\mathrm{X}-p)_\mathrm{R}$ *and* D_R *respectively, and the group* $\mathbf{GL}_r\big(\mathrm{R}((z))\big)$.

Version française:

1. Introduction. – Soient A un anneau commutatif, f un élément simplifiable de A, $\widehat{\mathrm{A}}$ le séparé complété de A pour la topologie (f)-adique. Notons comme d'habitude A_f et $\widehat{\mathrm{A}}_f$ les anneaux de fractions $\mathrm{A}[1/f]$ et $\widehat{\mathrm{A}}[1/f]$. A chaque A-module M on associe un A_f-module $\mathrm{F}=\mathrm{M}_f$, un $\widehat{\mathrm{A}}$-module $\mathrm{G}=\widehat{\mathrm{A}}\otimes_\mathrm{A}\mathrm{M}$ et un $\widehat{\mathrm{A}}_f$-isomorphisme $\varphi:\widehat{\mathrm{A}}\otimes_\mathrm{A}\mathrm{F}\to\mathrm{G}_f$. Dans cette note nous considérons le problème inverse: peut-on reconstruire un A-module à partir des données $(\mathrm{F},\mathrm{G},\varphi)$?

Il s'agit d'un problème de descente tel que l'on en rencontre fréquemment en géométrie algébrique, où ce genre de technique joue un rôle fondamental. Cependant, comme nous l'ont fait observer V. Drinfeld et M. Rapoport, l'énoncé ne rentre pas directement dans le cadre de la descente fidèlement plate développée par A. Grothendieck. Dans celle-ci, la donnée de descente sur $\mathrm{F}\times\mathrm{G}$ n'est pas constituée seulement de l'isomorphisme φ, mais aussi d'un isomorphisme $\widehat{\mathrm{A}}\otimes_\mathrm{A}\mathrm{G}\to\mathrm{G}\otimes_\mathrm{A}\widehat{\mathrm{A}}$. Plus sérieusement, si A n'est pas noethérien, l'homomorphisme $\mathrm{A}\to\widehat{\mathrm{A}}$ n'est pas nécessairement plat [1], ce qui exclut tout recours à la descente fidèlement plate.

Il est possible que l'énoncé résulte d'une généralisation convenable de la théorie de Grothendieck. Nous nous contenterons ici d'une solution élémentaire du problème spécifique que nous venons de décrire. Cette approche était déjà indiquée dans [B-L, prop. 1.4], mais dans un cadre plus restreint, et avec fort peu de détails; c'est ce qui nous a semblé justifier cette note.

[1] Voir remarque 4 ci-dessous.

2. Homomorphismes fidèles. – Nous conservons les notations de l'introduction, qui se résument dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathrm{A}} & \longrightarrow & \widehat{\mathrm{A}}_f \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{A}_f \end{array} \quad .$$

Il est important de remarquer que *l'élément* f *est encore simplifiable dans* $\widehat{\mathrm{A}}$; on peut le voir par exemple en écrivant l'homothétie $f_{\widehat{\mathrm{A}}}$ comme la limite du système projectif d'applications injectives $\mathrm{A}/f^n\mathrm{A} \xrightarrow{\times f} \mathrm{A}/f^{n+1}\mathrm{A}$. Rappelons que par construction de $\widehat{\mathrm{A}}$, l'homomorphisme $\mathrm{A} \to \widehat{\mathrm{A}}$ induit pour tout n un *isomorphisme* $\mathrm{A}/f^n\mathrm{A} \longrightarrow \widehat{\mathrm{A}}/f^n\widehat{\mathrm{A}}$.

Disons qu'un homomorphisme d'anneaux $\rho : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est *fidèle* si pour tout A-module non nul M le B-module $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ est non nul.

Lemme 1 .– *Soit* M *un* A*-module dont tout élément est annulé par une puissance de* f *. Alors l'application canonique* $\mathrm{M} \to \widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ *est bijective. En particulier, l'homomorphisme* $\rho : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}_f \times \widehat{\mathrm{A}}$ *est fidèle.*

Pour tout entier n , notons $\mathrm{M}(n)$ le sous-module de M formé des éléments annulés par f^n . Puisque l'homomorphisme $\mathrm{A}/f^n\mathrm{A} \longrightarrow \widehat{\mathrm{A}}/f^n\widehat{\mathrm{A}}$ est bijectif, l'application canonique $\mathrm{M}(n) \longrightarrow \widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}(n)$ est un isomorphisme pour tout n ; on en déduit la première assertion du lemme par passage à la limite inductive. Comme l'hypothèse sur M équivaut à $\mathrm{M}_f = 0$, la seconde assertion en résulte. ■

Certaines propriétés de finitude descendent par un homomorphisme fidèle:

Lemme 2 .– *Soient* $\rho : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un homomorphisme fidèle,* M *,* N *deux* A*-modules,* $u : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *une application* A*-linéaire.*

a) *Si* $u_{(\mathrm{B})} : \mathrm{M}_{(\mathrm{B})} \to \mathrm{N}_{(\mathrm{B})}$ *est surjective, il en est de même de* u *.*

b) *Si le* B*-module* $\mathrm{M}_{(\mathrm{B})}$ *est de type fini, le* A*-module* M *est de type fini.*

c) *Si* M *est plat et le* B*-module* $\mathrm{M}_{(\mathrm{B})}$ *de présentation finie,* M *est de présentation finie (donc projectif).*

a) Le B-module $\operatorname{Coker} u_{(\mathrm{B})}$ est canoniquement isomorphe à $(\operatorname{Coker} u)_{(\mathrm{B})}$, d'où a); l'assertion b) résulte de a). Sous les hypothèses de c), M est de type fini (par b)); considérons une presentation

$$0 \to \mathrm{R} \to \mathrm{A}^n \to \mathrm{M} \to 0 \ .$$

Comme M est plat, on obtient par produit tensoriel avec B une suite exacte

$$0 \to \mathrm{R}_{(\mathrm{B})} \to \mathrm{B}^n \to \mathrm{M}_{(\mathrm{B})} \to 0 \ .$$

Puisque $\mathrm{M}_{(\mathrm{B})}$ est de présentation finie, $\mathrm{R}_{(\mathrm{B})}$ est de type fini, donc R est de type fini par b). ■

3. Le résultat principal. – Soit M un A-module; nous supposerons que M est *f-régulier*, c'est-à-dire que l'homothétie f_{M} est injective. Alors $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{A}/f\mathrm{A})$ est nul, de sorte que le $\widehat{\mathrm{A}}$-module $\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ est aussi f-régulier. Les $\widehat{\mathrm{A}}_f$-modules $(\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M})_f$ et $\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}_f$ sont naturellement isomorphes. Réciproquement:

Théorème .– *Supposons donnés:*

– *Un* A_f*-module* F *;*

– *un* $\widehat{\mathrm{A}}$*-module* f*-régulier* G *;*

– *un isomorphisme* $\widehat{\mathrm{A}}_f$*-linéaire* $\varphi:\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{F}\longrightarrow\mathrm{G}_f$ *.*

Il existe alors un A*-module* f*-régulier* M *et des isomorphismes* $\alpha:\mathrm{M}_f\longrightarrow\mathrm{F}$ *,* $\beta:\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{G}$ *tels que* φ *soit l'application composée*

$$\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{F}\xrightarrow{1\otimes\alpha^{-1}}\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}_f\xrightarrow{\beta_f}\mathrm{G}_f\ .$$

Le triplet $(\mathrm{M},\alpha,\beta)$ *est unique à un isomorphisme unique près.*

Si F *et* G *sont de type fini* (resp. *plat,* resp. *projectifs de type fini*)*,* M *a la même propriété.*

Prouvons d'abord l'assertion d'unicité. D'après le lemme 1 l'application canonique $\mathrm{A}_f/\mathrm{A}\to\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}_f/\mathrm{A})$ est un isomorphisme; on a donc une suite exacte

$$0\to\mathrm{A}\longrightarrow\mathrm{A}_f\longrightarrow\widehat{\mathrm{A}}_f/\widehat{\mathrm{A}}\to 0\ .$$

Soit $(\mathrm{M},\alpha,\beta)$ un triplet possédant les propriétés de l'énoncé. Puisque M est f-régulier, on a $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/f^n\mathrm{A},\mathrm{M})=0$ pour chaque n. Comme A_f/A s'identifie à la limite inductive des $\mathrm{A}/f^n\mathrm{A}$, on en déduit $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{A}_f/\mathrm{A},\mathrm{M})=0$, d'où une suite exacte

$$0\to\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{M}_f\longrightarrow(\widehat{\mathrm{A}}_f\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M})/(\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M})\to 0\ .$$

A l'aide des isomorphismes α et β celle-ci s'écrit

$$0\to\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{F}\xrightarrow{\overline{\varphi}}\mathrm{G}_f/\mathrm{G}\to 0\ ,$$

où $\overline{\varphi}$ est l'homomorphisme déduit de φ. L'assertion d'unicité résulte de là.

Inversement, partons d'un triplet $(\mathrm{F},\mathrm{G},\varphi)$, et considérons l'application A-linéaire $\overline{\varphi}:\mathrm{F}\to\mathrm{G}_f/\mathrm{G}$ déduite de φ; montrons qu'elle est surjective. Comme $\mathrm{A}_f\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{G}_f/\mathrm{G})$ est nul, il suffit d'après les lemmes 1 et 2 de vérifier que l'application $1_{\widehat{\mathrm{A}}}\otimes\overline{\varphi}:\widehat{\mathrm{A}}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{F}\longrightarrow\mathrm{G}_f/\mathrm{G}$ est surjective. Or elle est composée de l'isomorphisme φ et de la surjection canonique $\pi:\mathrm{G}_f\to\mathrm{G}_f/\mathrm{G}$, d'où notre assertion.

Posons $\mathrm{M} = \mathrm{Ker}\,\overline{\varphi}$, de sorte qu'on a une suite exacte

$$(1) \qquad 0 \to \mathrm{M} \xrightarrow{i} \mathrm{F} \xrightarrow{\overline{\varphi}} \mathrm{G}_f/\mathrm{G} \to 0 \, .$$

En prenant le produit tensoriel avec A_f on voit que $i_f : \mathrm{M}_f \to \mathrm{F}$ est un isomorphisme: notons-le α. Par le lemme 3 a) ci-dessous, on obtient par produit tensoriel avec $\widehat{\mathrm{A}}$ une suite exacte

$$0 \to \widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \xrightarrow{1 \otimes i} \widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{F} \xrightarrow{\pi \circ \varphi} \mathrm{G}_f/\mathrm{G} \to 0 \, ;$$

par suite l'application $\beta := \varphi \circ (1_{\widehat{\mathrm{A}}} \otimes i)$ est un isomorphisme de $\widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ sur G. Par construction $\beta_f \circ (1_{\widehat{\mathrm{A}}} \otimes \alpha^{-1})$ coïncide avec φ.

Si F et G sont de type fini, il en est de même de M par le lemme 2 b). Supposons que F et G soient plats sur A_f et $\widehat{\mathrm{A}}$ respectivement. Alors F est plat sur A ; pour tout A-module T, on déduit du lemme 3 b) ci-dessous et de la suite exacte (1) que $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{T})$ est nul, de sorte que M est plat. Si de plus F et G sont de présentation finie, M est projectif par le lemme 2 c). ∎

Lemme 3 .– *Soit* G *un* $\widehat{\mathrm{A}}$*-module* f*-régulier.*

a) *On a* $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\widehat{\mathrm{A}}, \mathrm{G}_f/\mathrm{G}) = 0$.

b) *Si* G *est plat (sur* $\widehat{\mathrm{A}}$ *), on a* $\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{A}}(\mathrm{T}, \mathrm{G}_f/\mathrm{G}) = 0$ *pour tout* A*-module* T *et* $i \geq 2$.

Comme G_f/G est la limite inductive des modules $\mathrm{G}/f^n\mathrm{G}$, il suffit de prouver les deux assertions en remplaçant G_f/G par $\mathrm{G}/f^n\mathrm{G}$. L'assertion a) pour $\mathrm{G} = \mathrm{A}$ résulte de la suite exacte

$$(2) \qquad 0 \to \mathrm{A} \xrightarrow{f^n} \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}/f^n\mathrm{A} \to 0 \, .$$

Dans le cas général, on choisit une présentation

$$0 \to \mathrm{N} \xrightarrow{j} (\mathrm{A}/f^n\mathrm{A})^{(\mathrm{I})} \xrightarrow{p} \mathrm{G}/f^n\mathrm{G} \to 0 \, ;$$

alors $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\widehat{\mathrm{A}}, \mathrm{G}/f^n\mathrm{G})$ est isomorphe à $\mathrm{Ker}(1_{\widehat{\mathrm{A}}} \otimes j) = \mathrm{Ker}\, j = 0$.

Prouvons b). Si G est plat sur $\widehat{\mathrm{A}}$, $\mathrm{G}/f^n\mathrm{G}$ est plat sur $\mathrm{A}/f^n\mathrm{A}$; il en résulte facilement que $\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{A}}(\mathrm{G}/f^n\mathrm{G}, \mathrm{T})$ est isomorphe à $(\mathrm{G}/f^n\mathrm{G}) \otimes_{\mathrm{A}/f^n\mathrm{A}} \mathrm{Tor}_i^{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/f^n\mathrm{A}, \mathrm{T})$ (utiliser une résolution plate de T). Mais à cause de la suite exacte (2), les modules $\mathrm{Tor}_i^{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/f^n\mathrm{A}, \mathrm{T})$ sont nuls pour $i \geq 2$. ∎

4. Remarques et compléments

Remarques .– 1) En termes de catégorie, le théorème admet la traduction élégante suivante (empruntée à [F-R]). Pour tout anneau R, notons $\mathbf{M}(\mathrm{R})$ la catégorie des

R-modules; pour $f \in \mathrm{R}$, soit $\mathbf{M}_f(\mathrm{R})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{M}(\mathrm{R})$ dont les objets sont les R-modules f-réguliers. Alors *le diagramme de catégories*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_f(\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathbf{M}_f(\widehat{\mathrm{A}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{M}(\mathrm{A}_f) & \longrightarrow & \mathbf{M}(\widehat{\mathrm{A}}_f) \end{array}$$

où les flèches sont les foncteurs naturels d'extension des scalaires, *est cartésien.*

2) Considérons le cas particulier où F et G sont des modules libres de rang r ; le théorème signifie alors que *la donnée d'un* A*-module* M *et de trivialisations* $\mathrm{A}_f^r \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_f$, $\widehat{\mathrm{A}}^r \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ *est équivalente à celle d'un élément du groupe linéaire* $\mathbf{GL}_r(\widehat{\mathrm{A}}_f)$.

3) Supposons que l'anneau quotient $\mathrm{B} := \mathrm{A}/f\mathrm{A}$ soit une algèbre formellement lisse (par exemple lisse) sur un anneau k. L'isomorphisme $\mathrm{B} \to \widehat{\mathrm{A}}/f\widehat{\mathrm{A}}$ se relève alors en un homomorphisme de k-algèbres $\varphi : \mathrm{B} \to \widehat{\mathrm{A}}$. L'homomorphisme $\tilde{\varphi} : \mathrm{B}[[z]] \to \widehat{\mathrm{A}}$ qui étend φ et applique z sur f induit un isomorphisme sur les gradués associés, donc est lui-même un isomorphisme de k-algèbres. Ainsi l'anneau $\widehat{\mathrm{A}}$ est isomorphe (non canoniquement) à l'algèbre de séries formelles $\mathrm{B}[[z]]$, et l'anneau $\widehat{\mathrm{A}}_f$ à l'anneau $\mathrm{B}((z))$.

4) Peut-on récupérer tout A-module M à partir des modules M_f, $\widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ et de l'isomorphisme $\widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}_f \to (\widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M})_f$? Le théorème donne une réponse positive à cette question lorsque M est f-régulier, et le lemme 1 lorsque tout élément de M est annulé par une puissance de f. Cependant la réponse est négative en général, car il se peut que l'application canonique $\mathrm{M} \to \mathrm{M}_f \times (\widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M})$ ne soit pas injective. Prenons par exemple pour A l'anneau des germes au voisinage de 0 de fonctions réelles de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, et pour f la fonction identique. L'anneau $\widehat{\mathrm{A}}$ s'identifie à l'anneau de séries formelles $\mathbf{R}[[t]]$, l'homomorphisme $\mathrm{A} \to \widehat{\mathrm{A}}$ est surjectif et son noyau est l'idéal $\mathfrak{p}$ des germes de fonctions plates. Soit φ un élément simplifiable de $\mathfrak{p}$; prenons $\mathrm{M} = \mathrm{A}/\varphi\mathrm{A}$. Comme φ est divisible par f le module M contient des éléments non nuls annulés par f, qui s'annulent dans M_f et dans $\widehat{\mathrm{A}} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} \cong \widehat{\mathrm{A}}$.

Bien entendu l'anneau $\widehat{\mathrm{A}}$ n'est pas plat sur A (le A-module $\mathrm{Tor}_1^{\mathrm{A}}(\widehat{\mathrm{A}}, \mathrm{M})$ s'identifie à $\widehat{\mathrm{A}}$).

Soient X un schéma, $\mathrm{H} \subset \mathrm{X}$ un diviseur de Cartier effectif. Notons $\widehat{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}}$ l'algèbre (quasi-cohérente) complétée $\varprojlim \mathcal{O}_{\mathrm{X}}/\mathfrak{I}_{\mathrm{H}}^n$, et $\widehat{\mathrm{X}}$ le X-schéma affine $\mathrm{Spec}\,\widehat{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}}$. Posons $\mathrm{X}^* = \mathrm{X} - \mathrm{H}$, et notons $\widehat{\mathrm{X}}^*$ le produit fibré $\mathrm{X}^* \times_{\mathrm{X}} \widehat{\mathrm{X}}$, de sorte qu'on a un carré cartésien

$$
\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathrm{X}}^* & \xrightarrow{j'} & \widehat{\mathrm{X}} \\
{\scriptstyle i'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i} \\
\mathrm{X}^* & \xrightarrow{j} & \mathrm{X}
\end{array} \quad .
$$

Le théorème se généralise aussitôt à cette situation globale; contentons-nous de l'énoncer dans le cadre des fibrés vectoriels:

COROLLAIRE .– *Soient* F *et* G *des fibrés vectoriels sur* X^* *et* $\widehat{\mathrm{X}}$ *respectivement, et* $\varphi : i'^*\mathrm{F} \to j'^*\mathrm{G}$ *un isomorphisme. Il existe un fibré vectoriel* E *sur* X *et des isomorphismes* $\alpha : j^*\mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $\beta : i^*\mathrm{E} \to \mathrm{G}$ *tels que* $\varphi = j'^*\beta \circ i'^*\alpha^{-1}$. *Le triplet* $(\mathrm{E}, \alpha, \beta)$ *est uniquement déterminé à isomorphisme unique près.*

Soit $(\mathrm{U}_\iota)_{\iota \in \mathrm{I}}$ un recouvrement de X par des ouverts affines dans lesquels H est défini par une équation. Le théorème fournit dans chacun des U_ι une solution $(\mathrm{E}_\iota, \alpha_\iota, \beta_\iota)$; l'assertion d'unicité entraîne que ces solutions définissent par recollement un triplet $(\mathrm{E}, \alpha, \beta)$, unique à isomorphisme unique près. ∎

Exemple ([B-L], prop. 1.4) .– Soient X une courbe algébrique sur un corps k , p un point rationnel lisse de X , z une uniformisante de $\mathcal{O}_p$. Pour toute k-algèbre R , appliquons ce qui précède au schéma $\mathrm{X}_\mathrm{R} := \mathrm{X} \times_k \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$ et au diviseur de Cartier $\{p\} \times_k \mathrm{Spec}(\mathrm{R})$. L'algèbre $\widehat{\mathcal{O}_\mathrm{X}}$ s'identifie à $\mathrm{R}[[z]]$ (remarque ci-dessus); notons D_R son spectre. On déduit du corollaire *une bijection fonctorielle entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de triplets* $(\mathrm{E}, \tau, \sigma)$, *où* E *est un fibré vectoriel de rang* r *sur* X_R *et* τ , σ *des trivialisations de* E *au-dessus de* $(\mathrm{X} - p)_\mathrm{R}$ *et* D_R *respectivement, et le groupe* $\mathbf{GL}_r\big(\mathrm{R}((z))\big)$.

BIBLIOGRAPHIE

[B-L] A. BEAUVILLE, Y. LASZLO: *Conformal blocks and generalized theta functions.* Comm. Math. Phys. **164**, 385-419 (1994).

[F-R] D. FERRAND, M. RAYNAUD: *Fibres formelles d'un anneau local noethérien.* Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **3**, 295-311 (1970).

Mathématiques, Bât. 425, *Université Paris-Sud*, 91 405 ORSAY Cedex