

LES SINGULARITES DU DIVISEUR Θ DE LA JACOBIENNE

INTERMEDIAIRE DE L'HYPERSURFACE CUBIQUE DANS \mathbb{P}^4

Arnaud BEAUVILLE

Centre de Mathématiques

Ecole Polytechnique

91128 Palaiseau

Introduction

La géométrie de l'hypersurface cubique de dimension 3 a été élucidée par Clemens et Griffiths [C-G] ; citons, parmi les résultats les plus frappants, le théorème de Torelli et le fait que la cubique n'est pas rationnelle (une partie des résultats de [C-G] avait été obtenue indépendamment par Tjurin [T2]). Clemens et Griffiths utilisaient des arguments délicats de dégénérescence ; Mumford a observé qu'on peut déduire l'irrationalité de la cubique de la théorie des variétés de Prym.

Nous donnons ici une approche différente des résultats de [C-G], basée également sur les variétés de Prym. Cette approche est moins générale, mais peut-être plus simple ; elle est entièrement algébrique et valable en toute caractéristique différente de deux. De manière précise, le résultat essentiel de cet exposé est le théorème suivant :

Théorème

Soient X une hypersurface cubique lisse dans \mathbb{P}^4 et Θ un diviseur thêta de sa jacobienne intermédiaire. Alors Θ a un seul point singulier, qui est un point triple ; le cône tangent à Θ en ce point est isomorphe au cône affine de base X.

De ce théorème résultent immédiatement le théorème de Torelli et (moins immédiatement) l'irrationalité de X. Cet énoncé est certainement

bien connu des experts ; cependant il ne figure pas, à ma connaissance, dans la littérature (voir [T2] pour une approximation).

La démonstration comporte deux parties. On déduit d'abord l'unicité de la singularité (§3) de la description (due à Mumford) des singularités du diviseur thêta d'une variété de Prym. La structure de cette singularité résulte assez aisément d'un des points clés de [C-G], la paramétrisation de Θ par les différences de droites (§5) ; celle-ci est établie en interprétant en termes de variétés de Prym la "surface de Fano", c'est-à-dire la variété des droites contenues dans X (§4).

Les deux premiers paragraphes contiennent les préliminaires nécessaires sur les variétés de Prym et l'hypersurface cubique.

Toutes les variétés considérées sont définies sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$.

§ 1 VARIETES DE PRYM

On rappelle dans ce paragraphe les résultats sur les variétés de Prym qui seront utilisés dans la suite, renvoyant à [M] pour les démonstrations.

Si Γ est une courbe lisse, on note $J^d \Gamma$, pour $d \in \mathbb{Z}$, la variété des classes de diviseurs de degré d sur Γ , modulo équivalence linéaire ; elle est isomorphe (non canoniquement) à la jacobienne $J\Gamma = J^0\Gamma$. Si D est un diviseur de degré d sur Γ , on note $[D]$ la classe de D dans $J^d\Gamma$.

Soient C une courbe lisse de genre g , $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$ un revêtement

double étale connexe. La courbe \tilde{C} est de genre $\tilde{g} = 2g - 1$. Soit σ l'involution de \tilde{C} qui échange les deux feuillets du revêtement π ; on notera encore σ l'endomorphisme induit sur $\text{Pic}(\tilde{C})$. L'application d'image directe $\pi_{\#} : \text{Div}(\tilde{C}) \longrightarrow \text{Div}(C)$ induit un homomorphisme $N : \text{Pic}(\tilde{C}) \longrightarrow \text{Pic}(C)$.

(P.1) Posons $P = (1-\sigma)(J\tilde{C}) = (\text{Ker } N)_0$; c'est une variété abélienne de dimension $g-1$, isomorphe à $J\tilde{C}/\pi_{\#} JC$. On dit que P est la variété de Prym associée à (\tilde{C}, C) .

(P.2) Le groupe $\text{Ker}(N)$ a deux composantes connexes, P_0 et P_1 , contenues dans $J\tilde{C}$, avec $P_0 = P$; on a $P_i = (1-\sigma)(J^i\tilde{C})$ pour $i = 0, 1$.

(P.3) Soit D un diviseur de degré d sur C ; il résulte de (P.2) que $N^{-1}([D])$ est réunion de deux sous-variétés P_0^D et P_1^D de $J^D\tilde{C}$ (isomorphes à P). Si $[\tilde{D}] \in P_0^D$ et si A est un diviseur sur \tilde{C} , la classe de $\tilde{D} + A - \sigma A$ appartient à P_i^D , avec $i \equiv \text{deg}(A) \pmod{2}$.

(P.4) Prenons $D = K$. On peut alors numéroter les deux composantes P_i^K de façon que, pour $[D] \in N^{-1}(K)$, on ait

$$[D] \in P_i^K \iff h^0(D) \equiv i \pmod{2}$$

Il est commode de considérer au lieu de P la variété P_0^K , qui lui est isomorphe, et qu'on notera P^* . On a donc ensemblistement

$$P^* = \{[D] \in J^{\tilde{g}-1}\tilde{C} \mid \pi_{\#} D \equiv K \text{ et } h^0(D) \text{ pair}\}$$

(P.5) Soit Θ^* le diviseur de P^* formé des classes de diviseurs effectifs, c'est-à-dire $\Theta^* = \{[D] \in J^{\tilde{g}-1}\tilde{C} \mid \pi_{\#} D \equiv K \text{ et } h^0(D) \text{ pair} \geq 2\}$. Lorsqu'on identifie P^* à P par translation, le diviseur Θ^* définit une polarisation principale sur P . Dans la suite on munira toujours P de cette polarisation.

Soit $\tilde{\Theta}$ le diviseur de $J^{\tilde{g}-1}\tilde{C}$ formé des classes de diviseurs effectifs

(diviseur thêta de Riemann) ; on a l'égalité entre diviseurs $\tilde{\Theta}|_{P^*} = 2 \Theta^*$.

(P.6) L'égalité précédente permet de calculer les singularités de Θ^* .

Un point $[D]$ de Θ^* est singulier dans l'un des deux cas suivants :

a) L'espace tangent à P^* en $[D]$ est contenu dans le cône tangent en $[D]$ à $\tilde{\Theta}$;

b) $[D]$ est un point singulier de multiplicité ≥ 4 de $\tilde{\Theta}$.

A l'aide du théorème de Riemann-Kempf, ces situations se traduisent comme suit :

a) On a $D \equiv \pi^* M + E$, où $|M|$ est un système linéaire mobile sur C et E un diviseur effectif sur \tilde{C} , tel que $\pi_* E \in |K-2M|$;

b) On a $h^0(D) \geq 4$.

Les singularités du type a) sont dites spéciales ; elles n'apparaissent pas lorsque la courbe C est générique. Les singularités du type b), qui apparaissent sur toutes les variétés de Prym de dimension ≥ 9 , seront dites (suivant Tjurin) stables.

§ 2 LA VARIÉTÉ DE PRYM ASSOCIÉE À L'HYPERSURFACE CUBIQUE

On fixe désormais une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbb{P}^4$, ainsi qu'une droite $\ell \subset X$. Nous ferons sur ℓ l'hypothèse de position générale suivante :

Pour toute droite $f \subset X$ rencontrant ℓ , le plan $\langle \ell, f \rangle$ découpe sur X trois droites distinctes.

Il n'est pas difficile de montrer qu'une droite générique de X vérifie cette condition (cf. [C-G] ou [Mu1]).

Soit X_ℓ la variété obtenue en éclatant ℓ dans X . La projection de

centre ℓ définit un morphisme $p : X_\ell \longrightarrow \mathbb{P}^2$, dont les fibres sont des coniques ; l'hypothèse de position générale entraîne que ces coniques sont lisses ou réunion de deux droites distinctes. On en déduit facilement (cf. [B1], ch.1) que l'ensemble des points t de \mathbb{P}^2 tels que la conique $p^{-1}(t)$ soit dégénérée est une courbe lisse C . Soit \tilde{C} la variété des droites contenues dans X et incidentes à ℓ ; la projection p définit un morphisme $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$, qui est un revêtement double étale (nous verrons plus loin que \tilde{C} est connexe). L'involution σ associée à une droite f de \tilde{C} la droite résiduelle de l'intersection $\langle \ell, f \rangle \cap X$.

Proposition 1 (Mumford) :

La jacobienne intermédiaire¹ JX est isomorphe (comme variété abélienne principalement polarisée) à la variété de Prym P associée à (\tilde{C}, C) .

Nous nous contenterons d'indiquer la définition de l'isomorphisme $u : P \longrightarrow JX$, renvoyant à [T3] ou [B1] pour une démonstration complète.

Puisque \tilde{C} paramètre une famille de courbes sur X , il existe une application d'Abel-Jacobi $\alpha : \tilde{C} \longrightarrow JX$ (définie à translation près), d'où un homomorphisme $a : J\tilde{C} \longrightarrow JX$. Comme la famille des fibres de p est paramétrée par \mathbb{P}^2 , l'application d'Abel-Jacobi qui lui correspond est constante ; ceci entraîne que a est nul sur $\pi^* JC$. On en déduit que a se factorise en

$$a : J\tilde{C} \xrightarrow{1-\sigma} P \xrightarrow{u} JX ;$$

u est l'homomorphisme cherché.

¹ Si $k \neq \mathbb{C}$, JX sera par définition le groupe des cycles de dimension 1 sur X algébriquement équivalents à zéro modulo équivalence rationnelle, muni de la structure de variété abélienne principalement polarisée définie dans [Mu3] ou [B1], ch.3.

Dans le reste de ce paragraphe, on va établir quelques propriétés des courbes C et \tilde{C} .

(i) La courbe C est une courbe plane lisse de degré 5. On a vu que C est lisse ; son degré est le nombre d'intersection $C \cdot d$, où d est une droite de \mathbb{P}^2 . Lorsque d est assez générale, la surface cubique $p^{-1}(d)$ est lisse ; dans une telle surface, il y a dix droites rencontrant une droite donnée, réparties en cinq paires de droites concourantes (représenter la surface comme un plan projectif éclaté en 6 points), donc C est de degré 5.

(ii) La courbe \tilde{C} est connexe ; elle admet un pinceau $|L|$ sans point base, de degré 5, tel que $\pi_{*} L \equiv H$.

Considérons en effet l'application $g : \tilde{C} \rightarrow \ell$ qui associe à une droite de \tilde{C} son point d'intersection avec ℓ . L'hypothèse de position générale entraîne que g est un morphisme fini de degré 5 (par un point x de ℓ , il passe 5 droites de X distinctes de ℓ). Si la courbe \tilde{C} n'est pas connexe, elle est réunion de deux courbes isomorphes à C , et la restriction de g à l'une de ces courbes est de degré ≤ 2 : ceci entraîne que C est rationnelle ou hyperelliptique, d'où une contradiction.

Soit $x \in \ell$; posons $L = g^{*}[x]$. Le système $|L|$ est un pinceau sans point base ; le diviseur $\pi_{*}L$ est découpé sur C par la projection de l'hyperplan tangent en x à X , donc $\pi_{*} L \equiv H$.

Notons que (i) et (ii) impliquent $\dim(JX) = g(C) - 1 = 5$.

Nous noterons H le diviseur (de degré 5) découpé sur C par une droite de \mathbb{P}^2 .

(iii) Soit $|D|$ un système linéaire mobile sur C , de degré ≤ 5 . On a alors
 $D \equiv H - p$ ou $D \equiv H - p + q$, avec p, q dans C .

Supposons $\deg(D) = 5$; par Riemann-Roch, les coniques passant par D doivent former un pinceau, ce qui impose que 4 des points de D sont alignés, c'est-à-dire $D \equiv H - p + q$. Il en résulte aussitôt que tout g_4^1 sur C est de la forme $|H-p|$ pour $p \in C$, et que C n'admet pas de g_3^1 .

Notons η l'élément d'ordre deux de J_C associé au revêtement π , de sorte qu'on a $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \cong \mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(\eta)$.

(iv) On a $h^0(C, H+\eta) = 1$ et $h^0(\tilde{C}, \pi^*H) = 4$. En particulier, la classe de π^*H dans $J^{10} \tilde{C}$ appartient à P^* .

On a

$$\pi_* \pi^* \mathcal{O}_C(H) \cong \mathcal{O}_C(H) \otimes \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \cong \mathcal{O}_C(H) \oplus \mathcal{O}_C(H+\eta)$$

$$d'où \quad h^0(\tilde{C}, \pi^*H) = h^0(C, H) + h^0(C, H+\eta) ;$$

les deux égalités énoncées sont donc équivalentes.

On a $h^0(C, H+\eta) \leq 1$: en effet dans le cas contraire, on aurait d'après (iii) $\eta \equiv p - q$ ($p, q \in C$), d'où $2p \equiv 2q$, et C serait hyperelliptique. Il suffit donc de prouver l'inégalité $h^0(\pi^*H) \geq 4$. Puisque $H \equiv \pi_* L$ (cf. (ii)), on a $\pi^* H \equiv L + \sigma L$. Soient s, t deux sections de $\mathcal{O}_C(L)$ dont les diviseurs n'ont pas de point commun ; on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(\sigma L - L) \xrightarrow{(t, -s)} \mathcal{O}_C(\sigma L)^2 \xrightarrow{(s, t)} \mathcal{O}_C(\sigma L + L) \longrightarrow 0$$

d'où l'on déduit

$$h^0(\pi^*H) = h^0(L + \sigma L) \geq 2h^0(\sigma L) = 4,$$

ce qui achève la démonstration.

(v) Soit D un diviseur sur \tilde{C} tel que $h^0(D) \geq 2$ et $\pi_* D \equiv H$. On a alors $D \equiv L$ ou $D \equiv \sigma L$.

Le système linéaire $|\pi^* H|$, qui est sans point base, définit un morphisme $j : \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^3$, génériquement injectif. La relation $\pi^* H \equiv D + \sigma D$ signifie alors que $j(\tilde{C})$ est contenue dans une quadrique $Q_D \subset \mathbb{P}^3$, les deux systèmes de génératrices (éventuellement confondus) de Q_D découpant sur $j(\tilde{C})$ la partie mobile des systèmes $|D|$ et $|\sigma D|$. Puisque la courbe $j(\tilde{C})$ est de degré 10, elle est contenue dans une quadrique au plus ; on a donc $Q_D = Q_L$ et, puisque $|L|$ est sans point base, $|D| = |L|$ ou $|\sigma L|$.

§ 3 SINGULARITES DU DIVISEUR Θ

Proposition 2 :

Le diviseur Θ de JX a un seul point singulier.

En particulier, Θ est normal et irréductible.

En vertu de la prop. 1, il revient au même de considérer un diviseur thêta de P , ou encore le diviseur Θ^* de $P^*(P.5)$; nous allons montrer que celui-ci a un seul point singulier, à savoir $[\pi^* H]$. D'après (P.6), il y a deux types de singularités à étudier.

a) Singularités spéciales : Compte tenu du §2, (iii), les singularités spéciales de Θ^* correspondent aux diviseurs $\pi^*(H-p) + E$, avec $p \in C$ et $\pi_* E = 2p$, tels que $h^0(\pi^*(H-p)+E)$ soit pair. Si $\pi^{-1}(p) = \{p_1, p_2\}$, les diviseurs possibles sont $\pi^* H$ et $\pi^* H + p_i - \sigma p_i$ ($i = 1, 2$). Or $[\pi^* H]$ appartient à $P^*(\S 2, (iv))$, donc $[\pi^* H + p_i - \sigma p_i]$ n'appartient pas à $P^*(P.3)$: ainsi la seule singularité de ce type correspond au point $[\pi^* H]$.

b) Singularités stables : Soit $[D]$ un élément de P^* tel que $h^0(D) \geq 4$; il s'agit de prouver $D \equiv \pi^* H$. Soient s, t deux sections de $\mathcal{O}_C(L)$ dont les diviseurs n'ont pas de point commun (cf. §2, (ii)) ; on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(D-L) \xrightarrow{(t, -s)} \mathcal{O}_C(D)^2 \xrightarrow{(s, t)} \mathcal{O}_C(D+L) \longrightarrow 0,$$

d'où l'on déduit :

$$h^0(D-L) + h^0(D+L) \geq 2 h^0(D) \geq 8.$$

D'autre part, on obtient par Riemann-Roch

$$h^0(D+L) = h^0(K-D-L) + 5 = h^0(\sigma D-L) + 5 = h^0(D-\sigma L) + 5,$$

d'où finalement $h^0(D-L) + h^0(D-\sigma L) \geq 3$.

Ainsi l'un des systèmes $|D-L|$ ou $|D-\sigma L|$ est un pinceau se projetant dans $|H|$, donc est égal à $|L|$ ou à $|\sigma L|$ (§2,(v)). Par conséquent D est linéairement équivalent à π^*H , $2L$ ou $2\sigma L$. Mais $2L \equiv \pi^*H + (L-\sigma L)$ et $2\sigma L \equiv \pi^*H + (\sigma L-L)$ n'appartiennent pas à P^* (P.3), donc $D \equiv \pi^*H$.

Corollaire : La variété X n'est pas rationnelle.

En effet la jacobienne intermédiaire d'une variété rationnelle est isomorphe à la jacobienne d'une courbe ou à un produit de telles jacobienes ([C-G], §3), ce qui entraîne que le lieu singulier du diviseur thêta est de codimension ≤ 4 . Puisque $\dim(JX) = 5$, la prop. 2 montre que X n'est pas rationnelle.

§ 4 LA SURFACE DE FANO

Un rôle fondamental dans l'étude de JX est joué par la surface de Fano F , c'est-à-dire la variété des droites contenues dans X . C'est une surface lisse et connexe : la lissité et l'assertion sur la dimension résultent, via la théorie des déformations, d'un calcul facile de fibré normal, cf.[C-G]. On déduit la connexité de F de celle de \tilde{C} (§2,(ii)) et du fait que \tilde{C} rencontre toute courbe tracée sur F (puisque ℓ rencontre tout diviseur de X).

Notre but dans ce paragraphe est d'interpréter la surface F en termes du revêtement $\pi : \tilde{C} \longrightarrow C$.

La projection de centre ℓ détermine un morphisme $q' : F - \{\ell\} \longrightarrow \mathbb{P}^2$. Notons $\varepsilon : F_\ell \longrightarrow F$ l'éclatement du point ℓ de F ; on vérifie sans peine que q' se prolonge en un morphisme $q : F_\ell \longrightarrow \mathbb{P}^2$.

Soit f une droite assez générale de F , de sorte que l'hyperplan engendré par ℓ et f coupe X suivant une surface lisse Σ_f . Considérons l'ensemble $D(f)$ des droites de \tilde{C} qui sont incidentes à f . La surface cubique Σ_f contient 5 paires de droites de \tilde{C} coplanaires, correspondant aux 5 coniques dégénérées au-dessus des 5 points de $p(f) \cap C$; dans chacune de ces paires, une et une seule des deux droites rencontre f . Autrement dit, l'image directe par π du diviseur $D(f) \subset \tilde{C}$ est le diviseur découpé sur C par la droite $q(f)$.

Soit S la sous-variété de $\tilde{C}^{(5)}$ formée des diviseurs effectifs D tels que $\pi_* D \equiv H$. Il résulte de ce qui précède que l'application $f \longrightarrow D(f)$ définit une application rationnelle $D : F_\ell \dashrightarrow S$, rendant commutatif le diagramme

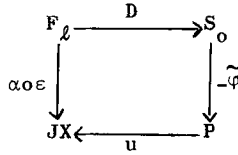
$$\begin{array}{ccc}
 F_\ell & \xrightarrow{D} & S \\
 q \searrow & & \swarrow \pi_* \\
 \mathbb{P}^2 = |H| & &
 \end{array}$$

Il résulte de (P.3) que S est réunion disjointe de deux sous-variétés S_0 et S_1 , échangées par σ (avec les notations de (P.3), un diviseur effectif D sur \tilde{C} appartient à S_1 si et seulement si $[D] \in P_1^H$). Nous noterons par convention S_0 celle de ces deux sous-variétés qui contient $D(F_\ell)$. Si $D_0 \in S_0$, l'application $D \longrightarrow [D - D_0]$ de S dans \tilde{C} induit une application $\tilde{\varphi} : S_0 \longrightarrow P$, qui ne dépend du choix de D_0 que par une translation.

Nous noterons $\alpha : F \longrightarrow JX$ l'application d'Abel-Jacobi de F (définie à translation près), et $u : P \longrightarrow JX$ l'isomorphisme de la prop. 1.

Proposition 3 :

L'application $D : F_\ell \longrightarrow S_0$ est un isomorphisme. Le diagramme



est commutatif à translation près.

Rappelons ici la démonstration de [B2] : la surface S est normale (cela résulte d'une étude locale due à Welters, cf.[B2], §2) ; le morphisme $\pi_{\mathbb{P}^2}$ est fini, de degré $\frac{1}{2} 2^5 = 16$; le morphisme q est fini (à cause de l'hypothèse de position générale sur ℓ), et son degré est égal au nombre de droites de Σ_f ne rencontrant pas ℓ , c'est-à-dire $27 - 10 - 1 = 16$.

Pour prouver la première assertion, il suffit donc de montrer que D est génériquement injectif, c'est-à-dire que les seules droites incidentes aux 5 droites de $D(f)$ (pour f assez générale) sont ℓ et f . Posons $D(f) = \sum_{i=1}^5 f_i$; on peut trouver un morphisme $\varepsilon : \Sigma_f \longrightarrow \mathbb{P}^2$, éclatement de 6 points p_1, \dots, p_6 de \mathbb{P}^2 en position générale, qui contracte f_i sur p_i pour $1 \leq i \leq 4$ et transforme f_5 en la droite $\langle p_4, p_5 \rangle$ (on obtient ε en projetant Σ_f sur $\ell \times f$, puis $\ell \times f$ sur \mathbb{P}^2 par projection stéréographique). Il est clair sur cette représentation qu'il n'y a que deux droites de Σ_f incidentes à f_1, \dots, f_5 , à savoir les transformés des coniques passant par p_1, \dots, p_4 et l'un des points p_5 ou p_6 .

Il reste à vérifier que, pour une droite générique f de F , on a à une constante près

$$\alpha(f) = - u \circ \tilde{\varphi}(D(f))$$

ou encore

$$2\alpha(f) + 2 u \circ \tilde{\varphi}(D(f)) = C^{te} ;$$

vu la définition de u (prop.1), il s'agit de prouver que l'élément $2\alpha(f) + \sum_i \alpha(f_i)$ de JX est indépendant de f . Or calculons dans $\text{Pic}(\Sigma_f)$ l'élément $2f + \sum_i f_i$; utilisons le morphisme $\varepsilon : \Sigma_f \longrightarrow \mathbb{P}^2$ considéré plus haut, en posant $\varepsilon^{-1}(p_i) = e_i$ ($1 \leq i \leq 6$), en notant h la classe dans $\text{Pic}(\Sigma_f)$ d'une section hyperplane et d celle de $\varepsilon^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$. On a $f_i = e_i$ pour $1 \leq i \leq 4$; $f_5 = d - e_5 - e_6$; et (par exemple) $f = 2d - \sum_{i \neq 5} e_i$ et $\ell = 2d - \sum_{i \neq 6} e_i$. On a donc

$$2\ell + 2f + \sum_i f_i = 9d - 3 \sum_j e_j = 3h.$$

On en déduit que le cycle $2f + \sum_i f_i$ est linéairement équivalent à $3h - 2\ell$ dans $\text{Pic}(\Sigma_f)$, donc aussi dans JX , ce qui achève la démonstration de la proposition.

Corollaire :

L'application d'Abel-Jacobi $\alpha : F \longrightarrow JX$ est un plongement.

Démonstration :

Si $D \in S_0$, la fibre $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{\varphi}(D))$ s'identifie au système linéaire $|D|$. On déduit alors du §2, (v) que $\tilde{\varphi}$ contracte une droite sur un point, et est un plongement en dehors de cette droite. Il résulte alors de la proposition que α est un plongement.

Remarque : Par spécialisation, il est facile de décrire $D(f)$ lorsque la droite f rencontre ℓ en un point x . En effet, les droites de F incidentes à ℓ et f sont d'une part les 4 droites de F passant par x distinctes de ℓ et f , et d'autre part la droite conjuguée de f par l'involution σ . On a donc $D(f) \equiv L - f + \sigma f$. Autrement dit, la restriction $\delta : \tilde{C} \longrightarrow S_0$ de D associe à un point x de \tilde{C} l'unique diviseur effectif de $|L + \sigma x - x|$. Ceci prouve en particulier que $|L|$ est contenu dans S_1 (et $|\sigma L|$ dans S_0).

Un autre point clé est le calcul de l'application tangente à α . Soit T l'espace tangent à l'origine de JX ; l'espace tangent de JX en un

point quelconque est canoniquement isomorphe à T . Pour tout f dans F , l'application $T_f(\alpha) : T_f(F) \longrightarrow T$ a pour image un sous-espace vectoriel de dimension 2 de T .

Proposition 4 ("théorème du fibré tangent") :

Il existe un isomorphisme de $\mathbb{P}(T)$ sur \mathbb{P}^4 tel que pour $f \in F$, l'image dans $\mathbb{P}(T)$ de $T_f(\alpha)$ s'identifie à la droite $f \subset \mathbb{P}^4$.

En d'autres termes, considérons sur F le fibré en droites projectives universel :

$$N = \{ (x, \ell) \in X \times F \mid x \in \ell \} ;$$

alors N s'identifie au fibré projectif tangent à F , de façon que l'application de ce fibré dans $\mathbb{P}(T)$ déduite de $T(\alpha)$ soit la première projection $N \longrightarrow \mathbb{P}^4$.

On peut déduire la prop.4 de la théorie des variétés de Prym, mais la démonstration est assez compliquée; je préfère renvoyer le lecteur à [T1], aux deux démonstrations de [C-G] et surtout à celle de [A-K], qui est la plus simple.

§ 5 LE CONE TANGENT DE Θ AU POINT SINGULIER

Proposition 5 :

Soit $\hat{\Phi} : F \times F \longrightarrow JX$ l'application définie par $\hat{\Phi}(x,y) = \alpha(x) - \alpha(y)$.

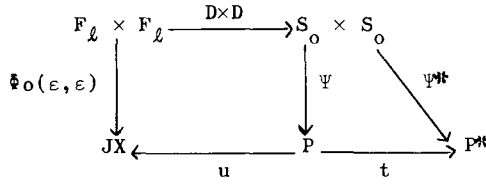
L'image de $\hat{\Phi}$ est un diviseur thêta de JX .

Démonstration :

Soit $(x,y) \in F \times F$. L'application tangente

$T_{x,y}(\hat{\Phi}) : T_x(F) \oplus T_y(F) \longrightarrow T$ est somme directe des applications $T_x(\alpha)$ et $-T_y(\alpha)$; il résulte aussitôt de la prop. 4 que $T_{x,y}(\hat{\Phi})$ est de rang 4 si (et seulement si) x et y ne se rencontrent pas. En particulier $\hat{\Phi}$ est génériquement finie, et son image est un diviseur de JX .

D'après la prop.3, on a un diagramme commutatif



où $\Psi(A, B) = [A - B]$ $\Psi^*(A, B) = [A + \sigma B]$

et où $t : P \longrightarrow P^*$ est la translation par $[\pi^*H]$.

Il est clair que l'image de Ψ^* est contenue dans Θ^* ; ainsi l'image de $\bar{\Phi}$ est contenue dans un diviseur Θ de JX , donc lui est égale puisque Θ est irréductible (prop.2).

Remarques :

1) Contrairement à α qui n'est définie qu'à translation près, l'application $\bar{\Phi}$ est canonique. On note dans la suite Θ son image ; c'est un diviseur thêta bien déterminé de JX (il correspond par l'isomorphisme $t \circ u^{-1}$ au diviseur Θ^* de P^*).

2) Soient s, t deux droites générales dans F , de sorte que l'hyperplan engendré par s et t coupe X suivant une surface lisse Σ . Soient f_1, \dots, f_5 les 5 droites de F incidentes à s et t ; notons t_i (resp. s_i) la droite résiduelle d'intersection du plan $\langle s, f_i \rangle$ (resp. $\langle t, f_i \rangle$) avec X . On a alors dans $\text{Pic}(\Sigma)$:

$$s + t_i = t + s_i = h - f_i$$

(h désignant la classe d'une section hyperplane), d'où $s - t = s_i - t_i$. On a par conséquent $\bar{\Phi}(s, t) = \bar{\Phi}(s_i, t_i)$ pour $1 \leq i \leq 5$; ainsi l'application

$$\bar{\Phi} : F \times F \longrightarrow \Theta \text{ est de degré } \geq 6.$$

Nous allons voir que $\bar{\Phi}$ est en fait de degré 6, de sorte que la fibre $\bar{\Phi}^{-1}(\bar{\Phi}(s, t))$ se compose de (s, t) et des cinq paires (s_i, t_i) . La configuration formée par les droites $(s, s_1, \dots, s_5 ; t, t_1, \dots, t_5)$ de Σ est appelée classiquement un "double six".

Proposition 6 :

Le diviseur Θ admet à l'origine un point triple ; lorsqu'on identifie $\mathbb{P}(T)$ à \mathbb{P}^4 par l'isomorphisme de la prop.4, la projectivisation du cône tangent à Θ en 0 est égale à X.

Démonstration :

Considérons le morphisme $\mathfrak{F} : F \times F \longrightarrow JX$. Puisque α est un plongement (corollaire à la prop.3), la fibre $\mathfrak{F}^{-1}(0)$ est la diagonale Δ de $F \times F$. Notons \hat{F}^2 , $\hat{\Theta}$ et \hat{J} les variétés obtenues en éclatant Δ dans $F \times F$, 0 dans Θ et 0 dans JX respectivement ; soient N , K et $\mathbb{P}(T)$ les diviseurs exceptionnels correspondants. Puisque $\mathfrak{F}^{-1}(0) = \Delta$, on déduit de \mathfrak{F} un morphisme $\hat{\mathfrak{F}} : \hat{F}^2 \longrightarrow \hat{J}$ qui se factorise à travers $\hat{\Theta}$, donnant lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 F^2 & \longrightarrow & \Theta & \hookrightarrow & JX \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \hat{F}^2 & \longrightarrow & \hat{\Theta} & \hookrightarrow & \hat{J} \\
 \cup & & \cup & & \cup \\
 N & \longrightarrow & K & \hookrightarrow & \mathbb{P}(T)
 \end{array}$$

On a par conséquent $\hat{\mathfrak{F}}(N) = K$. Or N est le fibré projectif tangent à F et $K \subset \mathbb{P}(T)$ est la projectivisation du cône tangent à Θ en 0 ; l'application $N \longrightarrow \mathbb{P}(T)$ induite par $\hat{\mathfrak{F}}$ est l'application projective associée à $T(\alpha)$. Identifions $\mathbb{P}(T)$ à \mathbb{P}^4 par l'isomorphisme de la prop.4 ; alors $\hat{\mathfrak{F}}(N)$ est réunion des droites contenues dans X (prop.4), de sorte que K coïncide ensemblistement avec X . ¹

Il reste à prouver que K est réduit. Rappelons (prop.4) que N s'identifie au fibré en droites projectives universel sur F , de façon que l'application $N \longrightarrow \mathbb{P}(T)$ induite par $\hat{\mathfrak{F}}$ soit la projection canonique ; en particulier, $\hat{\mathfrak{F}}$ est non ramifié de degré 6 au point générique η de N . Soient $n : \tilde{\Theta} \longrightarrow \hat{\Theta}$ la normalisation de $\hat{\Theta}$ et $\tilde{K} = n^{-1}(K)$, de sorte que

¹ Ceci suffit pour prouver le théorème de Torelli.

$\hat{\Theta}$ et sa restriction à N se factorisent comme suit :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \hat{\mathbb{F}}^2 & \xrightarrow{g} & \tilde{\Theta} & \xrightarrow{n} & \hat{\Theta} & \longleftarrow & \hat{J} \\
 U & & U & & U & & U \\
 N & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{K} & \xrightarrow{\nu} & K & \longleftarrow & \mathbb{P}(T)
 \end{array}$$

Alors g est non ramifié en η , donc étale puisque $\tilde{\Theta}$ est normal ;

on a $\deg(\hat{\Theta}) = \deg(g) = \deg(\gamma) \leq \deg(\nu\gamma) = 6$.

Puisque $\deg(\hat{\Theta}) \geq 6$ (remarque 2), on en déduit $\deg(\hat{\Theta}) = 6$ et $\deg(\nu) = 1$. D'autre part on a $\hat{\Theta}^*(\mathbb{P}(T)) = N$, d'où $g^* \tilde{K} = N$; comme $\tilde{\Theta}$ est normal, ceci entraîne que le diviseur \tilde{K} est réduit. Notons A (resp. \tilde{A}) l'anneau local de $\hat{\Theta}$ (resp. $\tilde{\Theta}$) au point générique de K (resp. \tilde{K}), et \mathfrak{m} (resp. $\tilde{\mathfrak{m}}$) son idéal maximal ; soit π une équation de K dans A . Alors \tilde{A} est un anneau de valuation discrète, et π en est une uniformisante (puisque le diviseur $\nu^* K$ est réduit) ; de plus, comme $\deg(\nu) = 1$, l'extension $A/\mathfrak{m} \longrightarrow \tilde{A}/\tilde{\mathfrak{m}}$ est un isomorphisme. Ces propriétés entraînent $A = \tilde{A}$: en effet on a $\pi \in \mathfrak{m}$, d'où $\pi \tilde{A} = \mathfrak{m} \tilde{A} = \tilde{\mathfrak{m}}$; on en déduit que l'application $A/\mathfrak{m} \longrightarrow \tilde{A}/\tilde{\mathfrak{m}}$ déduite de l'injection $A \longrightarrow \tilde{A}$ est bijective, et on conclut à l'aide du lemme de Nakayama. Par suite K est génériquement réduit, donc réduit puisque c'est une hypersurface, ce qui achève la démonstration.

Des propositions 2 et 6 résulte le théorème énoncé dans l'introduction :

Théorème :

Un diviseur thêta de JX admet un seul point singulier, qui est un point triple ; le cône tangent au diviseur en ce point est isomorphe au cône affine de base X .

Corollaire ("théorème de Torelli") :

La jacobienne intermédiaire JX , munie de sa polarisation principale, détermine la cubique X .

§ 6 COMPLEMENTS

D'autres résultats de [C-G] s'obtiennent facilement à l'aide des variétés de Prym.

Proposition 7 :

La classe de cohomologie de la surface $\alpha(F)$ dans $H^6(JX)$ est $\frac{\oplus^3}{3!}$.

(on note $H^*(JX)$ la cohomologie entière si $k = \mathbb{C}, \ell$ -adique sinon.)

On déduit cette proposition de la prop.3 et d'un calcul cohomologique, cf.[B2].

Proposition 8 :

L'application $\Phi : F \times F \longrightarrow \oplus$ est génériquement finie de degré 6.

Nous avons déjà obtenu ce résultat au cours de la démonstration de la prop.6. Nous indiquerons ici assez rapidement deux autres démonstrations possibles, qui n'utilisent pas le théorème du fibré tangent.

2ème Démonstration :

Il s'agit de montrer l'assertion analogue pour l'application $\Psi^* : S_0 \times S_0 \longrightarrow \oplus^*$. Notons que lorsqu'un diviseur E sur \tilde{C} est de la forme $A + \sigma B$, avec $A, B \in S_0$, le diviseur $\pi_{**} E \in |2H|$ correspond à une conique dégénérée. Inversement, considérons un diviseur effectif E sur \tilde{C} tel que $\pi_{**} E$ soit découpé par une conique dégénérée ; on peut écrire $E = A + B'$, avec A, B' dans S . Observons maintenant que $\Psi^*(S_i \times S_j)$ est contenu dans P^* si et seulement si $i \neq j$ (puisque $[\pi_{**}H] \in P^*$) ; on peut donc supposer $A \in S_0, B' \in S_1$, d'où $E = A + \sigma B$, avec $A, B \in S_0$. De plus cette écriture est unique si la conique dégénérée est de rang 2 et si son sommet n'est pas situé sur C .

Par conséquent la fibre $(\Psi^*)^{-1}(D)$, pour D assez général dans P^* , s'identifie à l'ensemble des diviseurs $E \in |D|$ pour lesquels $\pi_{**} E$ est découpé par une conique dégénérée. Or le système $\pi_{**}|D| \subset |2H|$ est découpé sur C par un pinceau quadratiques de coniques défini par une équation de la forme

$\lambda^2 p + \lambda \mu q + \mu^2 r = 0$, avec $(\lambda:\mu) \in \mathbb{P}^1$ et $p, q, r \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$. Un tel pin-
 ceau, s'il contient une conique lisse, admet 6 coniques dégénérées (définies
 par l'équation $\det(\lambda^2 p + \lambda \mu q + \mu^2 r) = 0$ sur \mathbb{P}^1), d'où le résultat.

3ème Démonstration :

En utilisant la prop. 7, on a dans $H^2(JX)$:

$$\phi_* 1 = (\deg \phi) \odot = \frac{\odot^3}{3!} * \frac{\odot^3}{3!}$$

où $*$ désigne le produit de Pontrjagin dans $H^*(JX)$.

Par déformation, il suffit de calculer ce produit pour la jacobien-
 ne d'une courbe Γ de genre 5. Dans ce cas $\frac{\odot^3}{3!}$ est la classe de $\varphi(\Gamma^{(2)})$, où
 $\varphi : \Gamma^{(2)} \longrightarrow J\Gamma$ est l'application canonique (définie à translation près).
 Considérons l'application $\Xi : \Gamma^{(2)} \times \Gamma^{(2)} \longrightarrow J\Gamma$ définie par $\Xi(A,B) = \varphi(A) + \varphi(B)$;
 son image est un diviseur thêta de $J\Gamma$, et on a donc

$$\Xi_* 1 = (\deg \Xi) \odot = \frac{\odot^3}{3!} * \frac{\odot^3}{3!},$$

d'où $\deg \phi = \deg \Xi = \binom{4}{2} = 6.$

Proposition 9 :

L'application $Alb(F) \longrightarrow JX$ déduite de l'application d'Abel-Jacobi
 $\alpha : F \longrightarrow JX$ est un isomorphisme.

Démonstration (d'après [Mu3]) :

Nous admettons ici l'égalité $q(F) = 5$, déjà connue de Fano, pour
 laquelle on peut renvoyer par exemple à [A-K].

Compte tenu de la prop.3, il s'agit de montrer que l'application
 $a : Alb(S_0) \longrightarrow \mathbb{P}$ déduite de $\tilde{\varphi} : S_0 \longrightarrow P$ est un isomorphisme. Considérons
 l'application $\delta : \tilde{C} \longrightarrow S_0$ qui associe à $x \in \tilde{C}$ l'unique diviseur de $|L + \sigma x - x|$
 (cf. §4, remarque) ; soit $d : J\tilde{C} \longrightarrow Alb(S_0)$ l'homomorphisme correspondant.
 On a $\tilde{\varphi} \circ \delta(x) = [\sigma x - x + C^{te}]$, de sorte que l'homomorphisme composé

$$J\tilde{C} \xrightarrow{d} Alb(S_0) \xrightarrow{a} P$$

est égal à $\sigma-1$. Ceci entraîne que a est surjectif, donc une isogénie (puisque $q(S_0) = q(F) = 5$) ; de plus $\text{Ker}(a_0) = \pi^*JC$ est connexe, donc $\text{Ker}(a)$ est connexe et a est un isomorphisme.

Bibliographie :

- [A-K] A. Altman et S. Kleiman : Foundations of the theory of Fano Schemes. *Compositio Mathematica* 34 (1977) 3-47.
- [B1] A. Beauville : Variétés de Prym et jacobienes intermédiaires. *Annales ENS* 10 (1977) 309-391.
- [B2] A. Beauville : Sous-variétés spéciales des variétés de Prym. *Compositio Mathematica*, à paraître.
- [C-G] H. Clemens et P. Griffiths : The intermediate Jacobian of the cubic threefold. *Annals of Math.* 95 (1972) 281-356.
- [M] D. Mumford : Prym varieties I. *Contributions to Analysis*, Academic Press, New-York (1974).
- [Mu1] J.P. Murre : Algebraic equivalence modulo rational equivalence on a cubic threefold. *Compositio Mathematica* 25 (1972) 161-206.
- [Mu2] J.P. Murre : Reduction of the proof of the non-rationality of a nonsingular cubic threefold to a result of Mumford. *Compositio Mathematica* 27 (1973) 63-82.
- [Mu3] J.P. Murre : Some results on cubic threefolds. *Classification of algebraic varieties and compact complex manifolds*, Springer-Verlag Lecture Notes 412 (1974) 140-164.
- [T1] A.N. Tjurin : On the Fano surface of a nonsingular cubic in \mathbb{P}^4 . *Math. USSR Izvestija* 4 (1970) 1207-1214.
- [T2] A.N. Tjurin : The geometry of the Fano surface of a nonsingular cubic $F \subset \mathbb{P}^4$ and Torelli theorems for Fano surfaces and cubics. *Math. USSR. Izvestija* 5 (1971) 517-546.
- [T3] A.N. Tjurin : Five Lectures on three-dimensional varieties. *Russian Math. Surveys* 27 (1972) 1-53.