Proceedings of the International Congress of Mathematicians
Berkeley, California, USA, 1986

L'approche géométrique du problème de Schottky

ARNAUD BEAUVILLE

1. Introduction. Le problème de Schottky est la recherche de caractérisations des jacobiennes parmi toutes les variétés abéliennes. Plus précisément, soit $\mathcal{A}_g$ ($= H_g/\operatorname{Sp}(2g,\mathbf{Z})$) l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées (complexes) de dimension g. Les jacobiennes forment une sous-variété $\mathcal{J}_g$ de $\mathcal{A}_g$, et il s'agit de trouver des équations de $\mathcal{J}_g$ (ou plutôt de son adhérence $\overline{\mathcal{J}}_g$) dans $\mathcal{A}_g$.

Ce problème a d'abord été étudié d'un point de vue analytique: on cherche à écrire des équations explicites de $\overline{\mathcal{J}}_g$ dans $\mathcal{A}_g$, définies par des formes modulaires sur H_g par exemple des polynômes en les thêta-constantes $\theta[{m \atop n}](0,\tau)$. Le premier résultat dans cette direction est dû à Schottky [**S**], qui mit en évidence une équation simple satisfaite par les thêta-constantes d'une jacobienne en genre 4. Le fait que cette équation caractérise les jacobiennes n'a été prouvé que récemment par Igusa ([**I**], cf. aussi [**F**]).

Vingt ans plus tard, en utilisant les variétés de Prym, Schottky et Jung donnèrent un procédé systématique pour écrire des polynômes en les thêta-constantes s'annulant sur $\mathcal{J}_g$, à partir d'identités satisfaites par les thêta-constantes générales [**S-J**]. Van Geemen a démontré que *$\overline{\mathcal{J}}_g$ est une composante irréductible de la sous-variété de $\mathcal{A}_g$ définie par ces équations* [**vG**]. Malheureusement on ne sait pas écrire explicitement l'ensemble de ces équations.

Dans cet exposé je vais considérer l'approche géométrique de ce problème. Ici il s'agit avant tout d'obtenir des *caractérisations géométriques* des jacobiennes, conduisant si possible à des équations plus ou moins explicites. Avant d'entrer dans le sujet, je voudrais mentionner que ce type de caractérisations a des applications à d'autres domaines de la géométrie algébrique, par exemple aux questions de rationalité. Soit en effet X une variété projective et lisse de dimension 3, satisfaisant à $H^0(X,\Omega^3_X)=0$. On associe à X une variété abélienne principalement polarisée, la jacobienne intermédiaire JX; si celle-ci n'appartient pas à $\overline{\mathcal{J}}_g$, la variété X ne peut être rationnelle (*critère de Clemens-Griffiths* [**C-G**]). On déduit de ce critère de nombreux exemples de variétés unirationnelles non rationnelles (cf. [**B2**]), et aussi un exemple de variété non rationnelle dont le produit avec un espace projectif est rationnel [**B-CT-S-SD**].

2. Singularités du diviseur Θ. Une application facile du théorème de Riemann montre qu'une jacobienne (JC, Θ) de dimension g satisfait à $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g-4$. Désignons par $\mathcal{N}_k^{(g)}$, ou simplement $\mathcal{N}_k$, la sous-variété de $\mathcal{A}_g$ formée des (A, Θ) tels que $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq k$; Andreotti et Mayer ont prouvé que $\overline{\mathcal{J}}_g$ *est une composante irréductible de* $\mathcal{N}_{g-4}$ [**A-M**]. Ils donnent également un procédé pour écrire des équations de $\mathcal{N}_{g-4}$ en termes des thêta-constantes et de leurs dérivées secondes.

L'ensemble $\mathcal{N}_{g-4}$ a d'autres composantes que les jacobiennes; une détermination complète de ces composantes serait fort utile (cf. §3). J'avais décrit ces composantes en genre 4 et 5, grâce au fait que les éléments de $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{A}_5$ sont des variétés de Prym [**B1**]. Cette description a été simplifiée par Donagi à l'aide de sa "construction tétragonale" [**Do**], puis étendue par Debarre [**D1**]. Debarre observe qu'il existe un moyen simple d'obtenir des éléments de $\mathcal{N}_{g-4}$: on part de deux variétés abéliennes A_1, A_2, munies de polarisations de degré 2; la polarisation produit sur $A_1 \times A_2$ se descend en une polarisation principale sur $(A_1 \times A_2)/K$, où K est un sous-groupe de $A_1 \times A_2$ convenablement choisi, isomorphe à $(\mathbf{Z}/2)^2$. Si $\dim A_1 = t$, $\dim A_2 = g-t$, on obtient ainsi une sous-variété irréductible de $\mathcal{A}_g$, notée $\mathcal{A}_{t,g-t}^{(2)}$; pour $2 \leq t \leq g/2$, c'est une composante de $\mathcal{N}_{g-4}$.

Debarre définit encore deux autres composantes de $\mathcal{N}_{g-4}$, appelées $\mathcal{E}_{g,0}$ et $\mathcal{E}_{g,1}$, et formées de variétés de Prym (on a $\mathcal{E}_{g,1} \subset \mathcal{A}_{1,g-1}^{(2)}$). Il montre que toute variété de Prym irréductible appartenant à $\mathcal{N}_{g-4}$ est dans l'une des composantes $\overline{\mathcal{J}}_g$, $\mathcal{E}_{g,0}$, $\mathcal{E}_{g,1}$ ou $\mathcal{A}_{t,g-t}^{(2)}$ pour $2 \leq t \leq g/2$.

3. Réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a$ et trisécantes. Cette approche remonte à l'article [**We**], où A. Weil observe que pour une jacobienne (JC, Θ) et pour $p, q \in C$, l'intersection $\Theta \cap \Theta_{p-q}$ est réductible; plus précisément, on a

$$\Theta \cap \Theta_{p-q} \subset \Theta_{p-r} \cup \Theta_{s-q}$$

quels que soient les points distincts p, q, r, s de C. Ceci conduit à considérer, pour une variété abélienne principalement polarisée quelconque (A, Θ), les conditions suivantes:

(i) *Il existe un élément non nul a de A tel que $\Theta \cap \Theta_a$ ne soit pas intègre.*

(ii) *Il existe des éléments distincts non nuls a, x, y de A tels qu'on ait (schématiquement) $\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.*

(iii) *Il existe a, x, y comme ci-dessus, et des scalaires λ, μ, ν non tous nuls, tels qu'on ait l'identité*[1]

$$\lambda\theta(z)\theta(z-x-y) + \mu\theta(z-a)\theta(z+a-x-y) + \nu\theta(z-x)\theta(z-y) = 0.$$

Soit $\psi\colon A \to \mathbf{P}^N$ le morphisme associé au système linéaire $|2\Theta|$; son image est la variété de Kummer $K(A, \Theta)$, isomorphe à $A/\{\pm 1\}$ lorsque (A, Θ) est irréductible. A cause de la formule d'addition de Riemann, la condition (iii) se

[1] Il faut modifier légèrement cette condition lorsque $a = x + y$.

traduit géométriquement comme suit: pour tout $\varsigma \in A$ tel que $2\varsigma = x + y$, les points $\psi(\varsigma)$, $\psi(\varsigma - a)$ et $\psi(\varsigma - x)$ de $\mathbf{P}^N$ sont alignés; autrement dit,

(iv) *La variété de Kummer* $K(A, \Theta)$ *admet une trisécante.*

Il est facile de voir que les conditions (ii) à (iv) sont équivalentes, et entraînent (i). Ces conditions sont en fait étroitement reliées à la condition d'Andreotti-Mayer:

THÉORÈME [**B-D1**]. (1) *Les conditions équivalentes* (ii) *à* (iv) *entraînent* $(A, \Theta) \in \mathcal{N}_{g-4}$ (*c'est-à-dire* $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g - 4$);

(2) *La condition* (i) *entraîne* $(A, \Theta) \in \mathcal{N}_{g-4}$ *ou* $(A, \Theta) \in \mathcal{A}^{(2)}_{1,g-1}$ (*cf.* §2).

Compte tenu du théorème d'Andreotti-Mayer, on obtient aussitôt:

COROLLAIRE. $\overline{\mathcal{J}}_g$ *est une composante de l'ensemble des* $(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g$ *vérifiant l'une des conditions* (i) *à* (iv).

Ainsi l'existence d'une trisécante pour $K(A, \Theta)$ entraîne $(A, \Theta) \in \mathcal{N}_{g-4}$. Il est intéressant de tester les conditions (i) et (ii) sur les composantes de $\mathcal{N}_{g-4}$ décrites au §2. Pour toutes ces composantes sauf $\mathcal{E}_{g,0}$, les variétés abéliennes correspondantes possèdent la propriété (i); par contre elles ne vérifient pas (ii), au moins génériquement—à l'exception bien sûr des jacobiennes. Ceci conduit à conjecturer que la condition (ii) caractérise les jacobiennes (*conjecture de la trisécante*). Des résultats partiels ont été obtenus dans cette direction, d'abord par Gunning [G], puis par Welters [**W1**, **W2**, **W3**]: ces auteurs caractérisent les jacobiennes par l'existence d'une famille assez grande de trisécantes. Citons par exemple le résultat de [**W2**]: si $K(A, \Theta)$ admet une famille de dimension un de trisécantes et si $\dim \operatorname{Sing} \Theta = g - 4$, alors (A, Θ) est une jacobienne. Mentionnons aussi une question voisine: l'existence d'une sous-variété de A de classe $\Theta^2/2$ dans $H^4(A, \mathbf{Z})$ entraîne-t-elle que (A, Θ) est une jacobienne? La réponse n'est connue que pour $g = 4$ [**R**].

Convenablement énoncées, les conditions (i) à (iv) ci-dessus gardent un sens lorsque les points a, puis x, puis y deviennent infiniment proches de 0: si par exemple a est un vecteur tangent à l'origine, on définit $\Theta \cap \Theta_a$ par les équations $\theta = D_a \theta = 0$. Le point ultime de cette spécialisation est la condition:

(ii′) *Il existe un vecteur non nul* $a \in T_0(A)$, *et deux sections non nulles de* $H^0(\Theta \cap \Theta_a, \mathcal{O}(\Theta))$ *dont le produit* (*dans* $H^0(\Theta \cap \Theta_a, \mathcal{O}(2\Theta))$) *est nul.*

Lorsque (A, Θ) est irréductible, G. Welters a remarqué que cette condition équivaut à dire que la fonction θ satisfait une équation aux dérivées partielles non linéaire, l'équation $K-P$. On voit ainsi facilement, en spécialisant l'inclusion $\Theta \cap \Theta_{p-q} \subset \Theta_{p-s} \cup \Theta_{s-q}$, que la fonction θ d'une jacobienne satisfait à l'équation $K - P$ (cette propriété a été découverte par Fay). Inversement, toute variété abélienne principalement polarisée irréductible satisfaisant à (ii′) est une jacobienne: c'est la conjecture de Novikov, prouvée par Shiota [**Sh**]. En s'appuyant sur les résultats de Gunning et Welters évoqués ci-dessus, Arbarello et De Concini ont obtenu une démonstration géométrique de cette conjecture (cf. l'exposé d'Arbarello dans ce volume). La version infinitésimale de la conjecture de la trisécante est donc démontrée.

Avant de quitter le problème de Schottky usuel je voudrais mentionner l'article [**vG-vG**], qui est lié à ce qui précède, et d'autre part l'approche tout-à-fait différente qui s'appuie sur le fait que le diviseur Θ d'une jacobienne est doublement de translation; je renvoie à [**L**] pour un exposé complet de ce point de vue classique.

4. Le problème de Schottky pour les variétés de Prym. Soient $\tilde{C}$, C deux surfaces de Riemann compactes, $\pi\colon \tilde{C} \to C$ un revêtement étale double, et σ l'involution correspondante de C. La *variété de Prym* (P, Θ) associée à π est une variété abélienne principalement polarisée définie comme suit [**M**]: P est l'image de l'endomorphisme $1 - \sigma^*$ de $J\tilde{C}$, et on prouve qu'un translaté convenable du diviseur thêta de $J\tilde{C}$ découpe sur P le diviseur 2Θ.

Les variétés de Prym forment dans $\mathcal{A}_g$ une sous-variété fermée irréductible $\mathcal{P}_g$ de dimension $3g$ pour $g \geq 5$, contenant $\mathcal{J}_g$ (il faut pour cela accepter les variétés de Prym associées à des courbes stables définies dans [**B1**]). Après les jacobiennes, les variétés de Prym sont certainement les variétés abéliennes principalement polarisées les mieux connues; il est naturel d'essayer de les caractériser, soit par des équations dans $\mathcal{A}_g$, soit par des propriétés géométriques. Je ne connais pas d'équivalent à l'approche analytique évoquée au §1. Par contre l'approche géométrique décrite aux §2 et 3 s'étend aux variétés de Prym; le parallélisme est d'ailleurs extrêmement frappant, et reste pour moi assez mystérieux.

Soit (P, Θ) une variété de Prym. La définition ci-dessus permet de décrire assez précisément les singularités du diviseur Θ [**M**, **B1**]. On en déduit qu'on a $\dim \operatorname{Sing} \Theta \geq g - 6$, avec égalité lorsque (P, Θ) est assez générale et $g \geq 6$ [**W4**, **D1**]. Debarre vient de démontrer l'équivalent du théorème d'Andreotti-Mayer [**D2**]: *pour $g \geq 7$, $\mathcal{P}_g$ est une composante irréductible de $\mathcal{N}_{g-6}$*. D'autres composantes de $\mathcal{N}_{g-6}$ sont construites dans [**D1**].

D'autre part, pour p, q dans $\tilde{C}$, notons $[p, q]$ l'élément $p + q - \sigma p - \sigma q$ de P. On déduit facilement de la description géométrique du diviseur Θ l'inclusion

$$\Theta \cap \Theta_{[p,q]} \cap \Theta_{[p,r]} \subset \Theta_{[p.s]} \cup \Theta_{[q,r]}$$

pour p, q, r, s distincts dans $\tilde{C}$, avec $\sigma p \neq q, r$.

Ceci nous amène à considérer, pour une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ), les conditions suivantes, calquées sur celles du §3, et qui sont satisfaites pour les variétés de Prym:

(i) *Il existe des éléments distincts non nuls a, b de A tels que l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ ne soit pas intègre.*

(ii) *Il existe des éléments distincts non nuls a, b, x, y de A tels qu'on ait (schématiquement) $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.*

(iii) *Il existe* a, b, x, y *comme ci-dessus, et des scalaires* λ, μ, ν, ρ *non tous nuls, tels qu'on ait l'identité*[2] (en posant $s = x + y$):

$$\lambda\theta(z)\theta(z-s)+\mu\theta(z-a)\theta(z+a-s)+\nu\theta(z-b)\theta(z+b-s)+\rho\theta(z-x)\theta(z-y)=0.$$

(iv) *La variété de Kummer* $K(A,\Theta)$ *admet un plan quadrisécant* (i.e. coupant $K(A,\Theta)$ en quatre points distincts).

PROPOSITION **[B-D2]**. *Pour* $g \geq 7$, $\mathcal{P}_g$ *est une composante irréductible de l'ensemble des* $(A,\Theta) \in \mathcal{A}_g$ *vérifiant l'une des conditions* (i) *à* (iv).

Le résultat est en fait un peu plus précis: nous montrons que lorsque A est *simple* et a d'ordre infini, chacune des conditions (i) à (iv) entraîne $(A,\Theta) \in \mathcal{N}_{g-6}$. On prouve ensuite que sur une variété de Prym générique (P,Θ) l'intersection $\Theta \cap \Theta_a \cap \Theta_b$ est toujours intègre lorsque a et b sont de torsion; la proposition en résulte.

L'existence d'un plan quadrisécant ne suffit pas ici à caractériser les variétés de Prym: les éléments (A,Θ) de $\mathcal{A}^{(2)}_{1,g-1}$ possèdent aussi cette propriété.

Contrairement au cas des jacobiennes, on ne peut spécialiser à la fois $[p,q]$, $[p,r]$, $[p,s]$ et $[q,r]$ en 0 lorsque la courbe C est lisse. Cela devient possible lorsque C est singulière. Avec G. Welters, nous avons observé que l'on obtient ainsi, pour la fonction θ d'une variété de Prym associée à des courbes stables singulières, une équation aux dérivées partielles non linéaire, dite équation BKP (cf. par exemple **[J-M]**). Novikov a conjecturé que cette équation caractérise les variétés de Prym de courbes singulières; une démonstration de cette conjecture a été annoncée par Shiota. Nous espérons que la méthode des plans quadrisécants permettra de comprendre géométriquement cette conjecture.

BIBLIOGRAPHIE

[A-M] A. Andreotti et A. Mayer, *On period relations for abelian integrals on algebraic curves*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **21** (1967), 189–238.

[B1] A. Beauville, *Prym varieties and the Schottky problem*, Invent. Math. **41** (1977), 149–196.

[B2] ——, *Variétés rationnelles et unirationnelles*, Algebraic Geometry—Open Problems, Lecture Notes in Math., vol. 997, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1983, pp. 16–33.

[B-CT-S-SD] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, et P. Swinnerton-Dyer, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*, Ann. of Math. **121** (1985), 283–318.

[B-D1] A. Beauville et O. Debarre, *Une relation entre deux approches du problème de Schottky*, Invent. Math. **86** (1986), 195–207.

[B-D2] ——, *Sur le problème de Schottky pour les variétés de Prym* (à paraître).

[C-G] H. Clemens et P. Griffiths, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math. **95** (1972), 281–356.

[D1] O. Debarre, *Sur les variétés abéliennes dont le diviseur* Θ *est singulier en codimension* 3 (à paraître).

[D2] ——, *Variétés de Prym et ensembles d'Andreotti-Mayer* (à paraître).

[Do] R. Donagi, *The tetragonal construction*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **4** (1981), 181–185.

[2] Il faut modifier cette équation lorsque $s = a, b$ ou $a + b$.

[F] E. Freitag, *Die Irreduzibilität der Schottkyrelation* (*Bemerkung zu einem Satz von J. Igusa*) Arch. Math. (Basel) **40** (1983), 255–259.

[G] R. Gunning, *Some curves in abelian varieties*, Invent. Math. **66** (1982), 377–389.

[vG] B. van Geemen, *Siegel modular forms vanishing on the moduli space of curves*, Invent. Math. **78** (1984), 329–349.

[vG-vG] B. van Geemen et G. van der Geer, *Kummer varieties and the moduli spaces of abelian varieties*, Amer. J. Math. **108** (1986).

[I] J. Igusa, *On the irreducibility of Schottky's divisor*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **28** (1981), 531–545.

[J-M] M. Jimbo et T. Miwa, *Solitons and infinite dimensional Lie algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **19** (1983), 943–1001.

[L] J. Little, *Translation manifolds and the converse of Abel's theorem*, Compositio Math. **49** (1983), 147–171.

[M] D. Mumford, *Prym varieties* I, Contributions to Analysis, Academic Press, New York, 1974, pp. 325–350.

[R] Z. Ran, *On subvarieties of abelian varieties*, Invent. Math. **62** (1981), 459–479.

[S] F. Schottky, *Zur Theorie der Abelschen Funktionen von vier Variabeln*, J. Reine Angew. Math. **102** (1888), 304–352.

[S-J] F. Schottky et H. Jung, *Neue Sätze über Symmetralfunktionen und die Abel'schen Funktionen der Riemann'schen Theorie*, S-B. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin), Phys. Math. Kl. **1** (1909), 282–297.

[Sh] T. Shiota, *Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations*, Invent. Math. **83** (1986), 333–382.

[W1] G. Welters, *On flexes of the Kummer variety*, Indag. Math. **45** (1983), 501–520.

[W2] ——, *A characterization of non-hyperelliptic Jacobi varieties*, Invent. Math. **74** (1983), 437–440.

[W3] ——, *A criterion for Jacobi varieties*, Ann. of Math. **120** (1984), 497–504.

[W4] ——, *A theorem of Gieseker-Petri type for Prym varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **18** (1985), 671–683.

[We] A. Weil, *Zum Beweis des Torellischen Satzes*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. **2a** (1957), 33–53.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, MATHÉMATIQUES–BÂTIMENT 425, 91405 ORSAY CÉDEX, FRANCE