GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension* 4. Note de **Arnaud Beauville** et **Ron Donagi**, présentée par Jean-Pierre Serre.

Nous démontrons que la variété des droites d'une cubique dans $\mathbf{P}^5$ est une variété symplectique, qui peut s'obtenir comme déformation du carré symétrique d'une surface K 3. Nous relions les périodes de cette variété symplectique à celles de la cubique.

ALGEBRAIC GEOMETRY. — The variety of lines of a cubic fourfold.

We prove that the variety of lines of a cubic fourfold is a symplectic manifold, which can be obtained as a deformation of the symmetric square of a K3 surface. We relate the periods of this symplectic fourfold to those of the cubic.

1. Résultats généraux. — Soit X une hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}^5_{\mathbf{C}}$, et soit F (X) (ou simplement F) la variété des droites contenues dans X. La théorie des déformations entraîne que F est une variété projective de dimension 4, appelée souvent la *variété de Fano* de X.

Proposition 1. — F *est une variété symplectique irréductible.*

Cela signifie [1] que $H^0(F, \Omega^2_F)$ est engendré par une 2-forme non dégénérée en tout point. Un exemple d'une variété projective symplectique $S^{[2]}$ de dimension 4 est construit comme suit [1] : soient S une surface K 3 projective et $S^{(2)}$ son carré symétrique. La variété $S^{[2]}$ est obtenue en éclatant la diagonale dans $S^{(2)}$.

On prouve dans [1] que l'espace des déformations de $S^{[2]}$ *en tant que variété projective* est une variété lisse de dimension 20, dans laquelle les variétés obtenues en déformant S forment une hypersurface. D'autre part, les hypersurfaces cubiques dans $\mathbf{P}^5$ dépendent de 20 modules.

Proposition 2. — F *est une déformation de* $S^{[2]}$, *où* S *est une surface* K 3 *de degré* 14 *dans* $\mathbf{P}^8$. *De plus toute déformation projective assez générale de* $S^{[2]}$ (où S est comme ci-dessus) *est la variété de Fano d'une cubique.*

La proposition 2 (qui entraîne la proposition 1) résultera de la proposition 5 du n° 2. Comme la topologie de $S^{[2]}$ est bien comprise, on en déduit :

Proposition 3. — *La variété* F *est simplement connexe, et sa cohomologie en dimension impaire est triviale. L'application naturelle* $S^2 H^2(F, \mathbf{Q}) \to H^4(F, \mathbf{Q})$ *est un isomorphisme de structures de Hodge.*

Les nombres de Hodge $h^{p,q}$ non triviaux de F sont :

$$h^{2,0}=h^{0,2}=1; \qquad h^{1,1}=21 \quad (b_2=23),$$
$$h^{4,0}=h^{0,4}=1; \quad h^{3,1}=h^{1,3}=21; \qquad h^{2,2}=232 \quad (b_4=276).$$

Ainsi la cohomologie et les périodes de F sont essentiellement déterminées par $H^2(F, \mathbf{Z})$. Cet espace est relié à la cohomologie de X par l'application d'Abel-Jacobi (*cf.* n° 3 ci-dessous) :

Proposition 4. — *L'application d'Abel-Jacobi* $\alpha : H^4(X, \mathbf{Z}) \to H^2(F, \mathbf{Z})$ *est un isomorphisme de structures de Hodge.*

Nous décrirons précisément le comportement de α par rapport aux polarisations au n° 3.

Ainsi le théorème de Torelli pour X équivaut au même résultat pour F (X). Ce théorème vient d'être démontré par C. Voisin. Signalons d'autre part que A. Todorov a annoncé

0249-6291/85/03010703 $ 2.00 © Académie des Sciences

une démonstration du théorème de Torelli pour toutes les variétés symplectiques projectives.

2. Cubiques pfaffiennes. — La démonstration de la proposition 2 met en jeu la construction d'une famille particulière de cubiques. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension 6. Soit G (resp. Δ) la sous-variété de $\mathbf{P}(\Lambda^2 V)$ formée des tenseurs de rang $\leqq 2$ (resp. $\leqq 4$), à homothétie près. On définit de la même manière G^*, Δ^* dans $\mathbf{P}(\Lambda^2 V^*)$:

$$G \subset \Delta \subset \mathbf{P}(\Lambda^2 V), \qquad G^* \subset \Delta^* \subset \mathbf{P}(\Lambda^2 V^*).$$

Observons que G est la grassmannienne $G(2, V)$ et que Δ^* est la variété des formes alternées sur V (à homothétie près) qui sont dégénérées. Ainsi Δ^* est une hypersurface cubique dans $\mathbf{P}(\Lambda^2 V^*) = \mathbf{P}^{14}$, alors que G est de dimension 8 et de degré 14.

Choisissons maintenant un sous-espace linéaire $L \subset \mathbf{P}(\Lambda^2 V)$ de dimension 8, et posons :

$$S = G \cap L, \qquad X = \Delta^* \cap L^{\perp}.$$

Si L est assez général, S est une surface K 3 (lisse) de degré 14 dans L, et X est une hypersurface cubique lisse de dimension 4. Cette construction dépend de 19 paramètres. Elle fournit toutes les surfaces K 3 dans $\mathbf{P}^8$ assez générales, mais seulement une hypersurface dans l'espace des modules des cubiques de dimension 4.

Supposons L suffisamment général pour que S et X soient lisses, S ne contienne pas de droite et X pas de plan.

Proposition 5. — (i) *La variété de Fano de* X *est isomorphe à* $S^{[2]}$.

(ii) *La cubique* X *est rationnelle.*

Indiquons la construction de l'isomorphisme $S^{[2]} \to F(X)$. Soient P, $Q \in S$; supposons pour simplifier $P \neq Q$. Nous regardons P, Q comme des 2-plans dans V. Par l'hypothèse de généralité, $P+Q$ est un 4-plan. Considérons l'ensemble des formes alternées $\varphi \in L^{\perp}$ dont la restriction à $P+Q$ est nulle. Puisque les restrictions de φ à P et à Q son nulles, c'est un espace linéaire de dimension $\geqq 1$ contenu dans X, donc une droite de X. On étend facilement la construction au diviseur exceptionnel de $S^{[2]}$, obtenant ainsi un morphisme $S^{[2]} \to F(X)$.

Inversement, soit $(\varphi_t)_{t \in \mathbf{P}^1}$ un pinceau de formes alternées dégénérées sur V, correspondant à une droite de X. Un lemme facile d'algèbre linéaire montre qu'il existe un unique 4-plan $K \subset V$ qui est isotrope pour tous les φ_t. Pour qu'on ait $K = P+Q$, avec P, $Q \in S$, il faut que P et Q soient dans la grassmannienne $G(2, K)$ [plongée dans $G(2, V) = G$]. Le 5-plan M engendré par $G(2, K)$ rencontre L suivant une droite [puisque $M^{\perp} \cap L^{\perp}$ est le pinceau (φ_t)], et cette droite rencontre la quadrique $G(2, K)$ en deux points P, Q : ceci fournit le morphisme inverse $F(X) \to S^{[2]}$, d'où (i).

Pour prouver (ii), considérons la sous-variété Z de $\mathbf{P}(V) \times X$ formée des couples (v, φ) tels que $v \in \operatorname{Ker} \varphi$. La première projection $Z \to \mathbf{P}(V)$ est birationnelle, tandis que la seconde projection $Z \to X$ est un fibré en droites projectives. Ceci entraîne qu'un hyperplan générique de $\mathbf{P}(V)$ est birationnellement isomorphe à X, d'où (ii).

Remarques. — (1) Soit $P \in S$. L'ensemble des $\varphi \in X$ telles que $P \cap \operatorname{Ker} \varphi \neq (0)$ est une surface réglée de degré 4 dans X. Ainsi X contient une famille à deux paramètres de telles surfaces. Les cubiques possédant cette propriété ont déjà été considérées par Fano [2].

(2) On ignore si la cubique générique de dimension 4 est rationnelle.

3. L'APPLICATION D'ABEL-JACOBI. — Soit $P \subset F \times X$ la variété des couples (l, x) avec $x \in l$, et soient $p : P \to F$ et $q : P \to X$ les deux projections. *L'application d'Abel-Jacobi* $\alpha : H^4(X, Z) \to H^2(F, Z)$ est définie par $\alpha(x) = p_* q^* x$.

Soit $h \in H^2(X, Z)$ [resp. $g \in H^2(F, Z)$] la classe d'une section hyperplane de X (resp. de F dans le plongement de Plücker). On a $\alpha(h^2) = g$. On note $H^4(X, Z)_0$ [resp. $H^2(F, Z)_0$] le sous-groupe des éléments x de $H^4(X, Z)$ [resp. $H^2(F, Z)$] tels que $x \,.\, h = 0$ (resp. $x \,.\, g^3 = 0$).

PROPOSITION 6. — (i) α *induit un isomorphisme de* $H^4(X, Z)_0$ *sur* $H^2(F, Z)_0$.

(ii) *La forme quadratique* φ_0 *sur* $H^2(F, Z)_0$ *définie par* $\varphi_0(u, v) = (1/6)\, g^2 uv$ *est entière, paire, de discriminant* 3.

(iii) *Pour* x, y *dans* $H^4(X, Z)_0$, *on a* $\varphi_0(\alpha(x), \alpha(y)) = -x \,.\, y$.

La forme φ_0 n'est autre que la *polarisation canonique* de la variété symplectique F [1]. La proposition exprime que α est compatible aux polarisations sur la cohomologie primitive (au signe près); on en déduit facilement la proposition 4.

Prouvons d'abord (iii). Soit $x \in H^4(X, Z)$. Puisque p est une fibration en droites projectives, il existe $x_1 \in H^2(F, Z)$, $x_2 \in H^4(F, Z)$ tels que :

(1) $$q^* x = (p^* x_1)\, q^* h - p^* x_2.$$

En appliquant p_* on obtient $x_1 = \alpha(x)$. En particulier il existe $g_2 \in H^2(F, Z)$ tel que :

(2) $$q^* h^2 = (p^* g)\, q^* h - p^* g_2.$$

Supposons maintenant $x \,.\, h = 0$. En multipliant (1) par $q^* h$, on obtient à l'aide de (2) :

(3) $$x_2 = x_1 g \quad \text{et} \quad x_1 g_2 = 0.$$

Élevant (1) au carré, on trouve :

$$q^* x^2 = -p^*(g x_1^2) \,.\, q^* h + p^*(g^2 x_1^2),$$

soit en multipliant par $p^* g$:

$$6\, x^2 = -g^2\, \alpha(x)^2, \quad \text{d'où (iii).}$$

Prouvons (ii). Il suffit de le faire pour une variété F particulière : choisissons F de la forme $S^{[2]}$ comme au n° 2. On a alors un isomorphisme canonique (*cf.* [1]) :

$$H^2(F, Z) = H^2(S, Z) \oplus Z\, \delta,$$

où 2δ est la classe du diviseur exceptionnel de $S^{[2]}$. Notons φ la forme quadratique sur $H^2(F, Z)$ telle que $\varphi(s + n\delta) = s^2 - 2n^2$ pour $s \in H^2(S, Z)$ et $n \in Z$; soit $l \in H^2(S, Z)$ la classe d'une section hyperplane. Un calcul standard donne :

$$g = 2l - 5\delta,$$

et, pour u, v dans $H^2(F, Z)$,

$$g^3 u = 18\, \varphi(g, u),$$
$$g^2 uv = 6\, \varphi(u, v) + 2\, \varphi(g, u)\, \varphi(g, v).$$

Ainsi la forme φ coïncide avec φ_0 sur $H^2(F, Z)_0$. On en déduit aussitôt (ii).

Enfin un calcul de classes de Chern donne l'expression de g_2 dans $H^4(F, Z)$, d'où l'on tire :

$$g\, g_2\, u = 15\, \varphi(g, u) \qquad \text{pour} \quad u \in H^2(F, Z).$$

Compte tenu de (3), ceci implique $\alpha(H^4(X, Z)_0) \subset H^2(F, Z)_0$. Ainsi α est une isométrie de $H^4(X, Z)_0$ sur $(H^2(F, Z)_0, -\varphi_0)$. Comme ces deux réseaux ont pour discriminant 3, α est un isomorphisme.

Remise le 23 septembre 1985.

Références bibliographiques

[1] A. Beauville, *J. Diff. Geometry*, 18, 1983, p. 755-782.
[2] G. Fano, *Comm. Math. Helvetici*, 15, 1942-1943, p. 71-80.

A. B. : *Mathématiques*,
Bât. n° 425, *Université Paris-Sud*, 91405 *Orsay Cedex*;
R. D. : *Dept. of Math.*,
Northeastern University, *Boston*, *MA* 02115, *U.S.A.*