ANNULATION DU H^1 POUR LES FIBRÉS EN DROITES PLATS

Arnaud Beauville
Mathématiques - Bât. 425
Université Paris-Sud
F-91 405 Orsay Cedex

Introduction

Soit X une variété kählérienne compacte, et soit $\mathrm{Pic}^{\tau}(X)$ la variété des fibrés en droites holomorphes sur X dont la première classe de Chern est nulle dans $H^2(X,\mathbf{C})$. Lorsque L est un élément général de $\mathrm{Pic}^{\tau}(X)$, des hypothèses assez faibles sur X entraînent l'annulation des espaces de cohomologie $H^i(X,L)$ pour $i < \dim(X)$ [G-L 1]. On est ainsi amené à s'intéresser à la sous-variété $S^i(X)$ de $\mathrm{Pic}^{\tau}(X)$ formée des fibrés en droites L tels que $H^i(X,L) \neq 0$. Green et Lazarsfeld ont prouvé récemment [G-L 2] que *les composantes irréductibles de* $S^i(X)$ *sont des translatés de sous-tores complexes de* $\mathrm{Pic}^{\tau}(X)$. En fait, des discussions avec F. Catanese nous ont conduit à proposer une conjecture plus précise :

Conjecture.- *Les composantes de* $S^i(X)$ *sont des translatés de tores complexes par des points d'ordre fini.*

La conjecture est vraie pour les composantes de dimension ≥ 1 de $S^1(X)$: cela résulte de la description précise de ces composantes donnée au §2 (et qui corrige l'énoncé analogue dans [B], qui contient une erreur). Nous proposons dans cet exposé une stratégie pour prouver que *les points isolés de* $S^1(X)$ *sont de torsion.* L'idée de base est de considérer, plutôt que le groupe $\mathrm{Pic}^{\tau}(X)$, le groupe $H^1(X,\mathbf{C}^*)$ des faisceaux localement constants de rang 1 sur X. On montre au §3 que le sous-ensemble $\Sigma^1(X)$ de $H^1(X,\mathbf{C}^*)$ formé des faisceaux $\mathcal{L}$ tels que $H^1(X,\mathcal{L}) \neq 0$ est étroitement relié à $S^1(X)$. On peut considérer $H^1(X,\mathbf{C}^*)$ comme le groupe $\mathrm{Hom}(\pi_1(X),\mathbf{C}^*)$ des caractères de $\pi_1(X)$; le point clé est que les points isolés de $\Sigma^1(X)$ correspondent à des caractères *unitaires.* On voit de plus, en utilisant l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ sur $H^1(X,\mathbf{C}^*)$, que les valeurs de ces caractères sont des nombres algébriques. Si en outre ce sont des *entiers* algébriques, un lemme célèbre de Kronecker permet de conclure. Malheureusement je ne sais pour l'instant prouver cette intégralité que sous des hypothèses restrictives, par exemple quand *le groupe dérivé* $D(\pi_1(X))$ *est de type fini.* Plus que ce résultat, dont l'intérêt est limité par l'aspect artificiel de l'hypothèse, c'est la méthode qui me semble intéressante; je continue à espérer qu'elle permettra de prouver la conjecture pour $S^1(X)$.

§1. Fibrations sur une courbe

Dans tout cet article, la lettre X désigne une variété kählérienne compacte (connexe). Nous appellerons *fibration* de X sur une courbe B tout morphisme surjectif $p : X \longrightarrow B$ de X sur une courbe lisse B, à fibres connexes. Dans ce paragraphe, nous considérons une fibration $p : X \longrightarrow B$; nous allons étudier la relation entre les groupes de Picard de X, de B et des fibres de p.

Soit b un point de B. Le diviseur p^*b s'écrit $\sum n_\alpha D_\alpha$, où les diviseurs D_α sont irréductibles et réduits; le p.g.c.d. m des entiers n_α est appelé *multiplicité* de la fibre p^*b. Si $m > 1$, on peut écrire $p^*b = mF$, où F est un diviseur effectif; on dit alors que la fibre p^*b est multiple.

Soient $m_1 F_1, \dots, m_s F_s$ les fibres multiples de p.

Lemme 1.1.- *Soit V un diviseur de X dont les composantes soient contenues dans les fibres de p. Pour que la classe de V dans $H^2(X, \mathbf{C})$ soit nulle, il faut et il suffit que l'on puisse écrire $V = p^*\delta + \sum k_i F_i$, où δ est un diviseur de degré 0 sur B et les k_i des entiers vérifiant $\sum k_i/m_i = 0$.*

Notons ω la classe dans $H^2(X, \mathbf{C})$ d'une forme de Kähler sur X. Si n désigne la dimension de X, notons $\int_X$ l'isomorphisme canonique de $H^{2n}(X, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}$. Soit $NS(X)$ le sous-groupe de $H^2(X, \mathbf{C})$ formé des classes de diviseurs; on le munira de la forme bilinéaire symétrique définie par $(\alpha.\beta) = \int_X \omega^{n-2} \wedge \alpha \wedge \beta$. En vertu du théorème de l'indice de Hodge, elle est de signature $(+1, -1, \dots, -1)$.

Soit F une fibre de p. La classe de F dans $NS(X)$ est non nulle, et de carré nul; par suite, la forme bilinéaire induite sur l'orthogonal de F dans $NS(X)$ est négative. Notons $(D_\alpha)_{\alpha \in I}$ la famille des composantes irréductibles de F, et n_α la multiplicité de D_α, de sorte que le diviseur F est égal à $\sum n_\alpha D_\alpha$. Considérons la matrice $(D_\alpha . D_\beta)_{(\alpha,\beta) \in I \times I}$. D'après ce qui précède, elle est négative, et son noyau contient l'élément $n = (n_\alpha)_{\alpha \in I}$. Pour $\alpha \neq \beta$, le produit $(D_\alpha . D_\beta)$ est positif, et même strictement positif si D_α rencontre D_β : en effet ce nombre s'obtient en intégrant la forme positive ω^{n-2} sur l'espace analytique $D_\alpha \cap D_\beta$. Comme la fibre F est connexe, il en résulte qu'il n'existe pas de partition $I = J \cup K$ de I telle qu'on ait $(D_\alpha . D_\beta) = 0$ pour $\alpha \in J$, $\beta \in K$. Un lemme classique d'algèbre linéaire (cf. par exemple [Bo], Ch. V, §3, n°5, lemme 4) affirme alors que le noyau de la matrice $(D_\alpha . D_\beta)$ est $\mathbf{R}n$. Par suite, tout diviseur D de la forme $\sum k_\alpha D_\alpha$ (avec $k_\alpha \in \mathbf{Z}$) vérifie $(D.D) \leq 0$, et $(D.D) = 0$ si et seulement si D est multiple rationnel de F.

Il en résulte que tout diviseur vertical V de carré nul peut s'écrire $V = p^*\delta + \sum k_i F_i$ (rappelons que $m_1 F_1, \dots, m_s F_s$ sont les fibres multiples de p). Quitte à modifier les k_i, on peut supposer $\deg(\delta) = 0$. La classe de V dans $H^2(X, \mathbf{C})$ est alors k fois celle de F, avec $k = \sum k_i/m_i$, d'où le lemme. ∎

Proposition 1.2.- *Soit L un élément de $\mathrm{Pic}^\tau(X)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *Le faisceau* p_*L *n'est pas nul.*

b) *La restriction de* L *à toute fibre lisse de* p *est triviale.*

c) *La restriction de* L *à une fibre lisse de* p *est triviale.*

d) *Il existe un élément* L_0 *de* $\mathrm{Pic}^0(B)$ *et des entiers* $k_1, \dots, k_s$ *, satisfaisant à* $\sum k_i/m_i = 0$ *, tels que* L *soit isomorphe à* $p^*L_0 \otimes \mathcal{O}_X(\sum k_i F_i)$.

a) $\Leftrightarrow$ b) : Notons U le plus grand ouvert de B au-dessus duquel p est lisse. Sous l'hypothèse b), le théorème de changement de base implique que le faisceau p_*L est localement libre de rang 1 au-dessus de U , d'où a).

Inversement, si la restriction de L à une fibre lisse F de p n'est pas triviale, l'espace $H^0(F, L_{|F})$ est nul (puisque F est kählérienne). Les théorèmes de semi-continuité et de changement de base entraînent alors que le faisceau p_*L est concentré sur un nombre fini de points; comme il est sans torsion, il est nécessairement nul.

b) $\Leftrightarrow$ c) : Pour $b \in U$, notons F_b la fibre (lisse) $p^{-1}(b)$. Les groupes $\mathrm{Pic}^\tau(X)$ et $\mathrm{Pic}^\tau(F_b)$ s'identifient à $H^1(X, \mathbf{S}_1)$ et $H^1(F_b, \mathbf{S}_1)$ respectivement, et l'application de restriction $\mathrm{Pic}^\tau(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}^\tau(F_b)$ s'identifie à l'application naturelle $H^1(X, \mathbf{S}_1) \longrightarrow H^1(F_b, \mathbf{S}_1)$. Il en résulte que le noyau de cette application est indépendant du point b , d'où l'implication c) $\Rightarrow$ b). L'implication opposée est triviale.

b) $\Leftrightarrow$ d) : L'implication d) $\Rightarrow$ b) est claire. Sous l'hypothèse b), l'homomorphisme canonique $p^*p_*L \longrightarrow L$ est un isomorphisme au-dessus de $p^{-1}(U)$. Il en résulte que l'on peut écrire L sous la forme $\mathcal{O}_X(\sum k_\alpha D_\alpha)$, où chaque diviseur D_α est une composante d'une fibre de p . On conclut alors à l'aide du lemme 1.1. ∎

Proposition 1.3.- *Soit* L *un élément de* $\mathrm{Pic}^\tau(X)$ *, tel que* p_*L *ne soit pas nul. Ecrivons* $L = p^*L_0 \otimes \mathcal{O}_X(\sum k_i F_i)$ *, où* L_0 *est un fibré en droites sur* B *et* $k_1, \dots, k_s$ *des entiers satisfaisant à* $0 \le k_i < m_i$ *et* $\sum k_i/m_i \in \mathbf{N}$ *. Le faisceau* p_*L *est alors isomorphe à* L_0 .

Posons $N = \mathcal{O}_X(\sum k_i F_i)$. Il s'agit de prouver que p_*N est isomorphe à $\mathcal{O}_B$; en utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow N(-F_i) \longrightarrow N \longrightarrow N_{|F_i} \longrightarrow 0 \ ,$$

et en raisonnant par récurrence sur l'entier $\sum k_i$, il suffit de prouver que le faisceau $N_{|F_i}$ n'a pas de section globale non nulle. Or ce faisceau est égal à $\mathcal{O}_{F_i}(k_i F_i)$, et le faisceau $\mathcal{O}_{F_i}(F_i)$ est d'ordre m_i dans $\mathrm{Pic}(F_i)$ (cf. par exemple [BPV] , lemme III.8.3, où l'hypothèse que X est une surface n'est pas utilisée dans la démonstration). On conclut à l'aide du lemme 1.4 ci-dessous. ∎

Lemme 1.4.- *Pour tout élément non nul* L *de* $\mathrm{Pic}^\tau(F_i)$ *, on a* $H^0(F_i, L) = 0$.

Supposons que $H^0(F_i, L)$ contienne une section non nulle s . Notons D le plus grand diviseur $\le F_i$ tel que $s_{|D} = 0$, et posons $E = F_i - D$; on a $E \neq 0$. La section s définit par restriction une section du faisceau inversible $L(-D)_{|E}$, qui ne s'annule sur aucune composante de E . On en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow L(-D)|_E \longrightarrow \mathcal{T} \longrightarrow 0 \ ,$$

où le support Z de $\mathcal{T}$ est de codimension 2 dans X. En considérant les secondes classes de Chern on obtient $c_1(D).c_1(E) = -\,cl(Z)$. On en déduit, avec les notations de la démonstration du lemme 1.1, $(D.E) \leq 0$ dans $NS(X)$, et il n'y a égalité que si $\mathcal{T}$ est nul. En écrivant $E = F_i - D$ on obtient $(D.D) \geq 0$, ce qui entraîne $D = 0$ (*loc. cit.*). La section s définit alors un isomorphisme de $\mathcal{O}_{F_i}$ sur L, ce qui contredit l'hypothèse sur L. ■

Nous noterons $\mathrm{Pic}^{\tau}(X,p)$ le noyau de l'homomorphisme $\mathrm{Pic}^{\tau}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}^{\tau}(F)$, où F désigne une fibre lisse quelconque de p (d'après la prop. 1.2, ce noyau est indépendant du choix de F). C'est un sous-groupe de Lie fermé du groupe de Lie (complexe) $\mathrm{Pic}^{\tau}(X)$.

Notons $\Gamma^{\tau}(p)$ le sous-groupe de $\oplus\, \mathbf{Z}/(m_i)$ formé des éléments $(\dot{k}_1, \dots, \dot{k}_s)$ tels que $\sum k_i/m_i$ soit entier, et $\varphi : \mathrm{Pic}^{\tau}(X,p) \longrightarrow \Gamma^{\tau}(p)$ l'homomorphisme qui associe à la classe d'un diviseur $p^*D + \sum k_i F_i$ l'élément $(\dot{k}_1, \dots, \dot{k}_s)$.

Proposition 1.5.- *La suite*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(B) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Pic}^{\tau}(X,p) \xrightarrow{\varphi} \Gamma^{\tau}(p) \longrightarrow 0$$

est exacte.

En d'autres termes, le groupe de Lie complexe $\mathrm{Pic}^{\tau}(X,p)$ a pour composante neutre la sous-variété abélienne $p^*\mathrm{Pic}^0(B)$, et son groupe des composantes connexes est isomorphe à $\Gamma^{\tau}(p)$. Il est donc isomorphe (non canoniquement) au produit $\mathrm{Pic}^0(B) \times \Gamma^{\tau}(p)$.

Considérons l'homomorphisme $\psi : \Gamma^{\tau}(p) \longrightarrow \mathrm{Pic}^{\tau}(X,p)/p^*\mathrm{Pic}^0(B)$ qui associe à $(\dot{k}_1, \dots, \dot{k}_s)$ la classe de $\sum k_i F_i$. La prop. 1.2 exprime qu'il est surjectif; il s'agit de prouver qu'il est injectif. Soient donc $k_1, \dots, k_s$ des entiers tels que le faisceau $L = \mathcal{O}_X(\sum k_i F_i)$ appartienne à $p^*\mathrm{Pic}^0(B)$. Le faisceau $L_{|F_i}$ est alors trivial pour tout i. Mais d'autre part ce faisceau est égal à $\mathcal{O}_{F_i}(k_i F_i)$, et l'on a déjà vu que le faisceau $\mathcal{O}_{F_i}(F_i)$ est d'ordre m_i dans $\mathrm{Pic}(F_i)$. On en déduit que k_i est multiple de m_i, ce qui prouve notre assertion.

(1.6) Désignons par $\mathrm{Pic}^0(X,p)$ l'intersection de $\mathrm{Pic}^{\tau}(X,p)$ avec $\mathrm{Pic}^0(X)$, et par $\Gamma^0(p)$ l'image de $\mathrm{Pic}^0(X,p)$ dans $\Gamma^{\tau}(p)$. Comme le quotient $\mathrm{Pic}^{\tau}(X)/\mathrm{Pic}^0(X)$ s'identifie au sous-groupe de torsion de $H^2(X, \mathbf{Z})$, le groupe $\Gamma^0(p)$ est défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma^0(p) \longrightarrow \Gamma^{\tau}(p) \longrightarrow \mathrm{Tors}\, H^2(X, \mathbf{Z}) \,.$$

Pour toute fibre lisse F de p, on a une suite exacte (non canonique)

$$0 \longrightarrow p^*\mathrm{Pic}^0(B) \times \Gamma^0(p) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(F) \,,$$

et $\Gamma^0(p)$ s'identifie au groupe des composantes connexes de $\mathrm{Pic}^0(X,p)$. Par dualité de Cartier, le dual de Pontrjagin de $\Gamma^0(p)$ s'identifie au groupe des composantes connexes du noyau de l'homomorphisme canonique $\mathrm{Alb}(F) \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$.

Remarque 1.7.- Soit F une fibre lisse de p dans X. La prop. 1.5 peut s'exprimer de manière purement topologique, par la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(B,S_1)\times\Gamma^\tau(p) \longrightarrow H^1(X,S_1) \longrightarrow H^1(F,S_1) \ .$$

Par dualité de Pontrjagin, on en déduit une suite exacte

$$H_1(F,\mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(X,\mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(B,\mathbf{Z})\times\hat{\Gamma}^\tau(p) \longrightarrow 0 \ ,$$

où $\hat{\Gamma}^\tau(p)$ désigne le dual de Pontrjagin de $\Gamma^\tau(p)$.
Plus canoniquement, cela revient à dire que l'homologie du complexe

$$H_1(F,\mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(X,\mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(B,\mathbf{Z})$$

est isomorphe à $\hat{\Gamma}^\tau(p)$ (on peut bien sûr obtenir ces résultats directement par une étude topologique simple, cf. [S]).

On obtient de même une suite exacte

$$H_1(F,\mathbf{Z})_\ell \longrightarrow H_1(X,\mathbf{Z})_\ell \longrightarrow H_1(B,\mathbf{Z})\times\hat{\Gamma}^0(p) \longrightarrow 0$$

(où pour tout $\mathbf{Z}$-module M, on note M_ℓ le quotient de M par son sous-module de torsion).

Exemple 1.8.- Commençons par quelques remarques générales. Soit Y une variété kählérienne compacte sur laquelle opère un groupe fini G ; supposons pour simplifier que le quotient Y/G soit lisse. Notons $\mathrm{Pic}^G(Y)$ le plus grand sous-tore complexe de $\mathrm{Pic}^0(Y)$ sur lequel G opère trivialement. Comme $H^1(Y/G,\mathcal{O}_{Y/G})$ s'identifie au sous-espace des éléments G-invariants de $H^1(Y,\mathcal{O}_Y)$, l'homomorphisme $\pi^* : \mathrm{Pic}^0(Y/G) \longrightarrow \mathrm{Pic}^G(Y)$ est *surjectif ;* son noyau est le sous-groupe de $\mathrm{Hom}(G,\mathbf{C}^*)$ formé des caractères qui sont triviaux sur les stabilisateurs des points de Y.

Soit maintenant F une variété kählérienne compacte, sur laquelle le groupe G opère librement ; soient B une courbe et $\beta : \tilde{B} \longrightarrow B$ un revêtement (ramifié) galoisien de groupe G. Le groupe G opère librement sur le produit $\tilde{B}\times F$; notons X la variété quotient et $\pi : \tilde{B}\times F \longrightarrow X$ l'application canonique. La première projection définit un morphisme $p : X \longrightarrow B$; les fibres de p au-dessus des points de ramification de β sont multiples, les autres fibres sont isomorphes à F.

D'après ce qui précède, l'homomorphisme

$$\pi^* : \mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}^G(\tilde{B})\times\mathrm{Pic}^G(F)$$

est surjectif; son noyau $\hat{G}$ s'identifie au groupe $\mathrm{Hom}(G,\mathbf{C}^*)$. On en déduit que le groupe $\mathrm{Pic}^0(X,p)$ est égal à $\hat{G} + p^*\mathrm{Pic}^0(B)$. Supposons en outre que le sous-groupe distingué de G engendré par les stabilisateurs des points de $\tilde{B}$ soit égal à G (par exemple que l'une des fibres de β soit réduite à un point), de sorte que l'homomorphisme $\beta^* : \mathrm{Pic}^0(B) \longrightarrow \mathrm{Pic}^G(\tilde{B})$ est injectif; alors l'intersection $\hat{G}\cap p^*\mathrm{Pic}^0(B)$ est réduite à 0, et *le groupe* $\Gamma^0(p)$ *est isomorphe à* $\hat{G}$. Observons qu'il est facile de choisir β de façon qu'on ait $\Gamma^0(p) = \Gamma^\tau(p)$.

Cet exemple est en fait un cas très particulier d'une situation générale :

Proposition 1.9.- *Il existe un diagramme commutatif*

$$(1.9)\qquad \begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ {\scriptstyle\tilde{p}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \tilde{B} & \xrightarrow{\beta} & B \end{array} \quad ,$$

où π *est un revêtement étale,* β *un morphisme fini et* $\tilde{p}$ *une fibration, tel qu'on ait* $\pi^* \operatorname{Pic}^\tau(X,p) \subset \tilde{p}^* \operatorname{Pic}^0(\tilde{B})$.

Soit G le dual de Pontryagin de $\Gamma^\tau(p)$; il s'identifie au quotient de $\oplus\, \mathbf{Z}/(m_i)$ par le sous-groupe des éléments $(\dot{n}, \ldots, \dot{n})$ $(n \in \mathbf{Z})$. On désignera par e_i la classe dans G de l'élément dont la i-ième composante est $\dot{1}$ et dont les autres composantes sont nulles. Soit m le p.p.c.m. des m_i ; notons d_i l'entier m/m_i et δ_i le p.g.c.d. des entiers d_j pour $j \neq i$. On vérifie facilement que l'ordre de e_i dans G est m_i/δ_i .

Notons B' le complémentaire des b_i dans B ; soit o un point de B' . Le groupe $\pi_1(B', o)$ est engendré par des éléments $a_1, \ldots, a_{2g}, t_1, \ldots, t_s$, soumis à la relation $(a_1,a_{g+1})\ldots(a_g,a_{2g})\, t_1\ldots t_s = 1$; le générateur t_i est obtenu en reliant o à un petit cercle autour de b_i . Définissons un homomorphisme $\varphi : \pi_1(B',o) \longrightarrow G$ en choisissant arbitrairement $\varphi(a_i)$, et en posant $\varphi(t_i) = e_i$. On en déduit un revêtement $\beta : \tilde{B} \longrightarrow B$ galoisien de groupe G ; chaque point de $\tilde{B}$ au-dessus de b_i a un indice de ramification égal à l'ordre de e_i dans G , soit m_i/δ_i .

Notons $\tilde{X}$ la normalisation du produit fibré $X \times_B \tilde{B}$ et $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$, $\tilde{p} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{B}$ les morphismes déduits des deux projections. Le morphisme π est étale : il suffit en effet de le vérifier en codimension 1 , autrement dit au-dessus d'un point assez général de F_i , auquel cas cela résulte d'un calcul simple et bien connu. La fibre de $\tilde{p}$ au-dessus d'un point général $\tilde{b}$ de $\tilde{B}$ est isomorphe à $p^{-1}(\beta(\tilde{b}))$, donc connexe.

Pour tout i , on a

$$\tilde{p}^* \beta^* b_i \;=\; \frac{m_i}{\delta_i} \sum_{\tilde{b} \in \beta^{-1}(b_i)} \tilde{p}^* \tilde{b} \;=\; m_i\, \pi^* F_i \quad ;$$

on en déduit que chaque fibre $\tilde{p}^* \tilde{b}$ a pour multiplicité δ_i , et que le faisceau $\pi^* \mathcal{O}_X(\delta_i F_i)$ appartient à $\tilde{p}^* \operatorname{Pic}(\tilde{B})$. Soit alors L un élément de $\operatorname{Pic}^\tau(X,p)$; écrivons $L = \pi^* M\, (\sum k_i F_i)$, avec $\sum k_i/m_i \in \mathbf{Z}$. Cette dernière relation signifie que m divise $\sum k_i d_i$; comme δ_i est premier avec d_i , on en déduit que δ_i divise k_i . Par suite le faisceau π^*L provient d'un faisceau inversible sur $\tilde{B}$, nécessairement de degré 0 . ■

Proposition 1.10.- *Soit* S *une composante de* $\operatorname{Pic}^\tau(X,p)$; *soient* $k_1, \ldots, k_s$ *des entiers tels que* $0 \leq k_i < m_i$, *et que les éléments de* S *soient de la forme* $p^*L_0 \otimes \mathcal{O}_X(\sum k_i F_i)$, *avec* $L_0 \in \operatorname{Pic}(B)$.

a) *Pour tout* $L \in S$, *on a* $\dim H^1(X,L) \;\geq\; g(B)-1+\sum k_i/m_i$.

b) *Supposons de plus que* X *soit une* surface. *On a alors*

$$\dim H^1(X,L) \;=\; g(B)-1+\sum k_i/m_i$$

pour tous les éléments L *de* S *sauf un nombre fini.*

Posons $L = p^*L_0 \otimes \mathcal{O}_X(\sum k_i F_i)$. Compte tenu de la prop. 1.3, la suite spectrale de Leray fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1(B,L_0) \longrightarrow H^1(X,L) \longrightarrow H^0(B,R^1p_*L) \longrightarrow 0 \ .$$

On a $\dim H^1(B,L_0) \geq g(B)-1+\sum k_i/m_i$, et il y a égalité si $L \neq \mathcal{O}_X$. Cela entraîne a) ; pour démontrer b) , il suffit de prouver qu'on a $H^0(B,R^1p_*L) = 0$ sauf pour un nombre fini d'éléments L de S . Considérons le diagramme (1.9). Le faisceau L est facteur direct de $\pi_*\pi^*L$, donc R^1p_*L est facteur direct de $\beta_*R^1\tilde{p}_*(\pi^*L)$, et l'espace $H^0(B,R^1p_*L)$ s'identifie à un sous-espace de $H^0(\tilde{B},\ R^1\tilde{p}_*(\pi^*L))$. Ecrivons $\pi^*L = \tilde{p}^*M$, avec $M \in \mathrm{Pic}^0(\tilde{B})$ (prop. 1.9); le faisceau $R^1\tilde{p}_*(\pi^*L)$ est isomorphe à $M \otimes R^1\tilde{p}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$.

D'après [F] , le fibré $R^1\tilde{p}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ admet une décomposition en somme directe $R^1\tilde{p}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} = \bigoplus_{i=0}^{r} F_i$, où le dual de F_0 est ample, et où F_i est stable de degré 0 pour $i \geq 1$. On en déduit que $M \otimes R^1\tilde{p}_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ admet une section non nulle si et seulement si M est le dual de l'un des F_i , d'où la proposition. ∎

Le résultat b) permet de corriger les assertions de [B] sur le système paracanonique des surfaces (voir ci-dessous). Supposons que X soit une surface et que S soit une composante de $\mathrm{Pic}^0(X,p)$; en suivant la démonstration du th. 2 de *loc. cit.*, on obtient que la variété des diviseurs effectifs D tels que $\mathcal{O}_X(D) \otimes K_X^{-1} \in S$ est de dimension $\chi(\mathcal{O}_X) + 2g(B) - 2 + \sum_{k_i \geq 1} \frac{m_i - k_i}{m_i}$. C'est une composante du systeme paracanonique $\{K_X\}$ si et seulement si cette dimension est $\geq p_g$.

§2. Le sous-ensemble $S^1(X)$ de $\mathrm{Pic}^\tau(X)$

L'énoncé suivant est une généralisation du lemme de Castelnuovo-De Franchis (qui correspond au cas $L = \mathcal{O}_X$); il est énoncé incorrectement dans [B] . Je reprends ici, en la corrigeant, la démonstration de [B] .

Proposition 2.1.- *Soient* L *un élément de* $\mathrm{Pic}^\tau(X)$, *et* ω *une 1-forme holomorphe non nulle sur* X . *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La suite*

$$H^0(X,L) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X,\Omega^1_X \otimes L) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X,\ \Omega^2_X \otimes L)$$

n'est pas exacte;

(ii) *Il existe un morphisme* p *de* X *sur une courbe* B *de genre* ≥ 1 *tel que la forme* ω *provienne par image réciproque de* $H^0(B,\Omega^1_B)$, *et que l'on ait :*

- $L \in \mathrm{Pic}^\tau(X,p)$ *si* $g(B) \geq 2$;
- $L \in \mathrm{Pic}^\tau(X,p) - p^*\mathrm{Pic}^0(B)$ *si* $g(B) = 1$.

Supposons la condition (i) satisfaite. Il existe alors une forme non nulle $\alpha \in H^0(X, \Omega^1_X \otimes L)$ telle que $\alpha \wedge \omega = 0$; si en outre $L = \mathcal{O}_X$, on peut prendre α non proportionnelle à ω . La relation $\alpha \wedge \omega = 0$ signifie qu'il existe une section méromorphe φ de L telle qu'on ait $\alpha = \omega \otimes \varphi$. Soit ∇ la connexion holomorphe unitaire sur L . La théorie de Hodge entraîne $\nabla\alpha = 0$ et $d\omega = 0$, d'où $\omega \wedge \nabla\varphi = 0$ dans $\Omega^2_X \otimes L$. On en déduit qu'il existe une fonction méromorphe f sur X telle que $\nabla\varphi = f\omega \otimes \varphi$. Appliquant de nouveau la connexion intégrable ∇ , on obtient $df \wedge \omega = 0$.

Comme le diviseur de φ n'est pas nul par hypothèse, la forme $\varphi^{-1}\nabla\varphi = f\omega$ a des pôles, de sorte que la fonction f n'est pas constante; considérons-la comme une application méromorphe de X dans $\mathbf{P}^1$. D'après le théorème de Hironaka, il existe un morphisme $\varepsilon : \hat{X} \longrightarrow X$, composé d'un nombre fini d'éclatements, et un morphisme $\hat{f}: \hat{X} \longrightarrow \mathbf{P}^1$ qui prolonge $f \circ \varepsilon$. Soit $\hat{f}: \hat{X} \longrightarrow B \xrightarrow{p} \mathbf{P}^1$ la factorisation de Stein de $\hat{f}$. La relation $df \wedge \omega = 0$ implique que la restriction de $\varepsilon^*\omega$ à une fibre générale de p est nulle, donc que $\varepsilon^*\omega$ provient par image réciproque d'une forme méromorphe ω_0 sur B ; comme $p^*\omega_0$ est holomorphe, la forme ω_0 est nécessairement holomorphe. On a donc $g(B) \geq 1$, ce qui entraîne *a posteriori* que f était partout définie : on peut prendre $\hat{X} = X$ et $\varepsilon = \mathrm{Id}_X$.

Comme $\alpha = \omega \otimes \varphi$, il existe un diviseur effectif E sur B tel que le diviseur des pôles de φ soit contenu dans p^*E ; l'espace $H^0(X, L(p^*E))$, isomorphe à $H^0(B, p_*L \otimes \mathcal{O}_B(E))$, est donc non nul. Il en résulte que le faisceau p_*L n'est pas nul, ce qui implique $L \in \mathrm{Pic}^\tau(X,p)$ (prop. 1.2). Pour achever de prouver (ii), il reste à éliminer le cas $g(B) = 1$ et $L = p^*L_0$, avec $L_0 \in \mathrm{Pic}^0(B)$. Dans ce cas la forme $\alpha = \omega \otimes \varphi$ provient comme ci-dessus d'une forme holomorphe $\alpha_0 \in H^0(B, \Omega^1_B \otimes L_0)$; comme $g(B) = 1$, cela implique $L_0 = \mathcal{O}_B$ et α proportionnelle à ω , contrairement à l'hypothèse.

Supposons maintenant la condition (ii) satisfaite. Ecrivons L sous la forme $p^*L_0(\sum k_i F_i)$, où $m_1 F_1, \ldots, m_s F_s$ sont les fibres multiples de p , et $0 \leq k_i < m_i$ pour tout i . Soit D_0 le diviseur sur B somme des points correspondant aux fibres F_i telles que $k_i \geq 1$. On a $\deg(L_0) = -\sum k_i / m_i$, d'où

$$\deg(L_0(D_0)) = \sum_{k_i \geq 1} \frac{m_i - k_i}{m_i} \geq 0 ,$$

et de plus $\deg(L_0(D_0)) > 0$ si $g(B) = 1$. Par suite l'espace $H^0(B, \Omega^1_B \otimes L_0(D_0))$ contient un élément non nul α_0 ; si de plus L_0 est trivial et que tous les k_i sont nuls (ce qui entraîne $g(B) \geq 2$), on peut prendre α_0 non proportionnelle à ω_0 . Alors $\alpha = p^*\alpha_0$ est une section holomorphe de $\Omega^1_X \otimes L$, non proportionnelle à ω si $L = \mathcal{O}_X$, et l'on a $\alpha \wedge \omega = 0$. Cela achève la démonstration de la proposition. ∎

Théorème 2.2.- *Notons* $(p_i : X \longrightarrow B_i)_{i \in I}$ *la famille des fibrations de* X *sur une courbe de genre* ≥ 1 . *La sous-variété* $S^1(X)$ *de* $\mathrm{Pic}^\tau(X)$ *formée des faisceaux inversibles* L *tels que* $H^1(X,L) \neq 0$ *est réunion des sous-groupes* $\mathrm{Pic}^\tau(X,p_i)$ *pour*

$g(B_i) \geq 2$, *des sous-variétés* $\mathrm{Pic}^\tau(X,p_i) - p_i^* \mathrm{Pic}^0(B_i)$ *pour* $g(B_i) = 1$, *et d'un nombre fini de points isolés.*

Soit L un élément non isolé de $S^1(X)$. En vertu du corollaire 1.9 et du lemme 2.6 de [G-L 1], il existe une 1-forme holomorphe non nulle ω sur X telle que la suite

$$H^0(X, L^{-1}) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L^{-1}) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega_X^2 \otimes L^{-1})$$

ne soit pas exacte. La prop. 2.1 implique alors que L^{-1}, et donc aussi L, sont des éléments de $\mathrm{Pic}^\tau(X,p)$; de plus L n'appartient pas à $p^* \mathrm{Pic}^0(B)$ si B est de genre 1.

Inversement, soit $p : X \longrightarrow B$ une fibration, et soit S une composante de $\mathrm{Pic}^\tau(X,p)$; la prop. 1.10, a) entraîne $S \subset S^1(X)$, sauf lorsque $g(B) = 1$ et $S = p^* \mathrm{Pic}^0(B)$. ∎

Corollaire 2.3.- *L'intersection* $S^1(X) \cap \mathrm{Pic}^0(X)$ *est réunion des ensembles* $\mathrm{Pic}^0(X,p_i)$ *pour* $g(B_i) \geq 2$, $\mathrm{Pic}^0(X, p_i) - p_i^* \mathrm{Pic}^0(B_i)$ *pour* $g(B_i) = 1$, *et d'un nombre fini de points isolés.* ∎

Remarque 2.4.- Soit $p : X \longrightarrow B$ une fibration. Pour que le groupe $\mathrm{Pic}^\tau(X,p)$ soit distinct de $p^* \mathrm{Pic}^0(B)$, il faut et il suffit que le groupe $\Gamma^\tau(p)$ ne soit pas trivial, autrement dit que *deux des multiplicités* m_i *ne soient pas premières entre elles.* Si $g(B) = 1$, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que la fibration p fournisse des composantes de $S^1(X)$ non réduites à un point.

§3. Le sous-ensemble $\Sigma^1(X)$ de $H^1(X, \mathbb{C}^*)$

(3.1) Nous supposerons choisi un point o de X, et poserons $\pi_1(X) = \pi_1(X,o)$. Nous allons nous intéresser au groupe $H^1(X, \mathbf{C}^*)$. Ce groupe paramètre les classes d'isomorphisme de chacun des objets suivants :

a) *Les caractères de* $\pi_1(X)$ (c'est-à-dire les homomorphismes de $\pi_1(X)$ dans $\mathbf{C}^*$).

b) *Les faisceaux localement constants de* $\mathbf{C}$*-espaces vectoriels de dimension* 1 *sur* X (nous dirons simplement *faisceaux localement constants de rang* 1).

c) *Les couples* (L,∇), *où* L *est un faisceau inversible sur* X *et* $\nabla : L \longrightarrow \Omega_X^1 \otimes L$ *une connexion holomorphe sur* X (une telle connexion est toujours de courbure nulle).

(3.2) Notons $\mathbf{S}_1$ le cercle unité dans $\mathbf{C}$. Le sous-groupe $H^1(X, \mathbf{S}_1)$ de $H^1(X, \mathbf{C}^*)$ correspond aux objets suivants :

a) Les caractères χ qui sont *unitaires* (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbf{S}_1$);

b) Les faisceaux localement constants $\mathcal{L}$ de rang 1 qui sont *unitaires,* c'est-à-dire qui admettent une forme hermitienne positive non nulle (à valeurs dans le faisceau constant $\mathbf{C}_X$).

c) Les couples (L,∇_u), où ∇_u désigne la connexion (holomorphe) *unitaire* sur L, associée à la métrique hermitienne de courbure nulle sur L (qui est unique à une constante près).

Nous munirons le groupe $H^1(X,\mathbf{C}^*)$ de sa topologie naturelle. L'homomorphisme $(L,\nabla) \mapsto L$ fait apparaître ce groupe comme extension du groupe de Lie complexe $\mathrm{Pic}^\tau(X)$ par l'espace vectoriel $H^0(X,\Omega_X^1)$. En tant qu'extension de groupes de Lie *réels*, cette extension est scindée : on en obtient une section canonique en associant à un fibré L le couple (L,∇_u).

Soit $\mathscr{L}$ un faisceau localement constant *unitaire* sur X. Une partie de la théorie de Hodge classique s'étend sans changement à la cohomologie de X à coefficients dans $\mathscr{L}$. Nous utiliserons en particulier les faits suivants :

(3.3) Soit $L = \mathscr{L}\otimes_{\mathbf{C}}\mathcal{O}_X$, et soit ∇_u la connexion unitaire sur L. La suite spectrale

$$E_1^{pq} = H^q(X,\Omega_X^p\otimes L) \quad\Longrightarrow\quad H^{p+q}(X,\mathscr{L})$$

associée au complexe de de Rham de (L,∇_u) dégénère en E_1. En particulier, les homomorphismes $H^q(\nabla_u) : H^q(X,\Omega_X^p\otimes L) \longrightarrow H^q(X,\Omega_X^{p+1}\otimes L)$ sont nuls.

(3.4) Choisissons une métrique hermitienne plate sur L, d'où un isomorphisme antilinéaire $L \longrightarrow L^{-1}$. On déduit de cet isomorphisme et de la conjugaison des formes harmoniques un isomorphisme antilinéaire

$$H^q(X,\Omega_X^p\otimes L) \longrightarrow H^p(X,\Omega_X^q\otimes L^{-1}).$$

Soit $\omega \in H^0(X,\Omega_X^1)$, et $\bar\omega$ la classe dans $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ de la forme conjuguée; le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^q(X,\Omega_X^p\otimes L) \arrow[r, "\cup\bar\omega"] \arrow[d] & H^{q+1}(X,\Omega_X^p\otimes L) \arrow[d] \\
H^p(X,\Omega_X^q\otimes L^{-1}) \arrow[r, "\wedge\omega"] & H^p(X,\Omega_X^{q+1}\otimes L^{-1})
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Proposition 3.5.- *Soit $\mathscr{L}$ un faisceau localement constant de rang* 1 *sur* X, *et soit* (L,∇) *le fibré à connexion correspondant.*

a) *Supposons $\mathscr{L}$ unitaire* (c'est-à-dire $\nabla = \nabla_u$). *La condition* $H^1(X,\mathscr{L}) \neq 0$ *équivaut alors à* $L \in S^1(X) \cup -S^1(X)$.

b) *Supposons que $\mathscr{L}$ ne soit pas unitaire. La condition* $H^1(X,\mathscr{L}) \neq 0$ *équivaut à :*

(*) *Il existe une fibration* $p : X \longrightarrow B$ *et une forme non nulle* $\omega_0 \in H^0(B,\Omega_B^1)$ *telles qu'on ait*

- $L \in \mathrm{Pic}^\tau(X,p)$ *si* $g(B) \geq 2$, $L \in \mathrm{Pic}^\tau(X,p) - p^*\mathrm{Pic}^0(B)$ *si* $g(B) = 1$;
- $\nabla = \nabla_u + p^*\omega_0$.

Considérons la suite spectrale (3.3)

$$E_1^{pq} = H^q(X, \Omega_X^p \otimes L) \implies H^{p+q}(X, \mathscr{L}).$$

Si $\mathscr{L}$ est unitaire, elle dégénère en E_1 ; on en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L) \longrightarrow H^1(X, \mathscr{L}) \longrightarrow H^1(X, L) \longrightarrow 0.$$

Comme les espaces $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L)$ et $H^1(X, L^{-1})$ sont conjugués (3.4), l'assertion a) en résulte.

Supposons que $\mathscr{L}$ ne soit pas unitaire; posons $\nabla = \nabla_u + \omega$, où ω est une 1-forme holomorphe non nulle sur X. Comme on a $H^q(\nabla_u^p) = 0$, la différentielle d_1 de la suite spectrale n'est autre que le cup-produit avec ω. La suite spectrale fournit alors une suiteexacte

$$0 \longrightarrow E_2^{10} \longrightarrow H^1(X, \mathscr{L}) \longrightarrow E_2^{01} ,$$

où E_2^{10} est l'homologie du diagramme

$$H^0(X, L) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega_X^2 \otimes L)$$

et E_2^{01} le noyau de la flèche $H^1(\omega) : H^1(X, L) \longrightarrow H^1(X, \Omega_X^1 \otimes L)$.

Si le couple (L, ∇) satisfait à $(*)$, l'espace E_2^{10} n'est pas nul (prop. 2.1), et il en est de même de $H^1(X, \mathscr{L})$. Supposons inversement $H^1(X, \mathscr{L}) \neq 0$. Cela entraîne que E_2^{10} ou E_2^{01} n'est pas nul. Dans le premier cas, (L, ∇) satisfait à $(*)$ d'après la prop. 2.1.

Il reste à prouver que (L, ∇) satisfait à $(*)$ lorsque E_2^{01} n'est pas nul, c'est-à-dire lorsque l'homomorphisme $H^1(\omega)$ n'est pas injectif. Par conjugaison (3.4), cela signifie qu'il existe un élément non nul α de $H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L^{-1})$ tel que la classe de $\alpha \wedge \bar{\omega}$ dans $H^1(X, \Omega_X^1 \otimes L^{-1})$ soit nulle. Posons $\beta = \alpha \wedge \omega$; on a $\beta \in H^0(X, \Omega_X^2 \otimes L^{-1})$, et la classe de $\beta \wedge \bar{\beta}$ dans $H^2(X, \Omega_X{}^2)$ est nulle. Si κ est une forme de Kähler sur X, on a donc $\int \beta \wedge \bar{\beta} \wedge \kappa^{n-2} = 0$. Montrons que cela entraîne $\beta = 0$. Soit x un point de X ; il existe un système de coordonnées locales $(z_1, \dots, z_n)$ sur X tel que κ coïncide en x avec la forme $\sum dz_i \wedge d\bar{z}_i$. La forme β s'écrit dans ces coordonnées $\sum b_{ij}\, dz_i \wedge dz_j$, où (b_{ij}) est une matrice antisymétrique formée de sections de L^{-1}. Notons $\| \ \|$ la norme associée à la métrique hermitienne plate sur L^{-1} ; un calcul facile donne (au point x)

$$\beta \wedge \bar{\beta} \wedge \kappa^{n-2} = c\Big(\sum_{i,j} \|b_{ij}\|^2\Big)\kappa^n \quad , \qquad \text{avec } c = \frac{-1}{n(n-1)} \ ,$$

de sorte que la relation $\int \beta \wedge \bar{\beta} \wedge \kappa^{n-2} = 0$ entraîne $\beta = 0$.

Ainsi on a $\alpha \wedge \omega = 0$, ce qui conduit à deux possibilités :

- ou bien la suite $H^0(X, L^{-1}) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega_X^1 \otimes L^{-1}) \xrightarrow{\wedge\omega} H^0(X, \Omega_X{}^2 \otimes L^{-1})$ n'est pas exacte, et le couple (L^{-1}, ω) satisfait à $(*)$; il en est alors de même de (L, ω).
- ou bien $L = \mathcal{O}_X$, et α est proportionnelle à ω. Dans ce cas la classe de $\omega \wedge \bar{\omega}$ dans $H^1(X, \Omega_X^1)$ est nulle; si κ est une forme de Kähler sur X, cela entraîne $\int \omega \wedge \bar{\omega} \wedge \kappa^{n-1} = 0$.

On voit alors comme ci-dessus que cela implique $\omega = 0$, ce qui est impossible. ∎

Corollaire 3.6.- *Le sous-ensemble* $\Sigma^1(X)$ *de* $H^1(X, \mathbf{C}^*)$ *formé des faisceaux localement constants de rang un* $\mathcal{L}$ *sur* X *tels que* $H^1(X,\mathcal{L}) \neq 0$ *est réunion :*

- d'une famille finie de sous-ensembles de la forme $\alpha \cdot p^* H^1(B, \mathbf{C}^*)$, *où* α *est un élément d'ordre fini de* $H^1(X,\mathbf{C}^*)$ *et* $p : X \longrightarrow B$ *une fibration sur une courbe de genre* ≥ 1 ;

- d'un nombre fini de faisceaux unitaires. ∎

§4. Le sous-ensemble $\Sigma^1(G)$ de $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{C}^*)$

Soit G un groupe de type fini. Nous désignerons par $\hat{G}$ le groupe $\mathrm{Hom}(G,\mathbf{C}^*)$ des caractères de G , muni de la topologie usuelle. Pour tout caractère χ de G , nous noterons $\mathbf{C}_\chi$ le G-module $\mathbf{C}$ muni de l'action de G définie par χ . Nous allons nous intéresser au sous-ensemble $\Sigma^1(G)$ de $\hat{G}$ formé des caractères χ tels que $H^1(G,\mathbf{C}_\chi) \neq 0$.

Le lemme suivant est certainement bien connu :

Lemme 4.1.- *Soit G un groupe commutatif de type fini, et* χ *un caractère non trivial de* G . *On a* $H^i(G,\mathbf{C}_\chi) = 0$ *pour tout* $i \geq 0$.

Notons T le sous-groupe de torsion de G , et L le groupe quotient G/T . On dispose d'une suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(L, H^q(T,\mathbf{C}_\chi)) \quad \Longrightarrow \quad H^{p+q}(G,\mathbf{C}_\chi) .$$

L'espace $H^q(T,\mathbf{C}_\chi)$ est nul sauf si $q = 0$ et $\chi_{|T} = 1$; il suffit donc de prouver le lemme lorsque G est un $\mathbf{Z}$-module libre (de type fini).

Posons $A = \mathbf{C}[G]$; l'espace $H^p(G,\mathbf{C}_\chi)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}_A^p(\mathbf{C}_1,\mathbf{C}_\chi)$. Choisissons une base $(e_1, \dots , e_n)$ de G ; l'anneau A s'identifie à l'anneau des polynômes de Laurent $\mathbf{C}[e_1, e_1^{-1}, \dots , e_n, e_n^{-1}]$. Une résolution libre du A-module $\mathbf{C}_1$ est fournie par le complexe de Koszul

$$0 \longrightarrow \bigwedge^n(A^n) \longrightarrow \dots\dots \longrightarrow \bigwedge^2(A^n) \longrightarrow A^n \longrightarrow A \longrightarrow \mathbf{C}$$

associé à la suite régulière $(e_1-1, \dots , e_n-1)$. Les espaces $\mathrm{Ext}_A^p(\mathbf{C}_1,\mathbf{C}_\chi)$ sont donc les espaces de cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow \mathbf{C} \xrightarrow{\ \varepsilon\ } \mathbf{C}^n \xrightarrow{\ \wedge\varepsilon\ } \bigwedge^2(\mathbf{C}^n) \longrightarrow \dots\dots \longrightarrow \bigwedge^n(\mathbf{C}^n) \longrightarrow 0 ,$$

avec $\varepsilon = (\chi(e_1)-1, \dots , \chi(e_n)-1)$. Comme χ n'est pas trivial, le vecteur ε n'est pas nul, et le complexe ci-dessus est exact, ce qui démontre le lemme. ∎

Revenons au cas d'un groupe G de type fini quelconque. Notons $D(G)$ son groupe dérivé, et G_{ab} le quotient $G/D(G)$; le groupe G opère sur $D(G)$ par conjugaison.

Proposition 4.2.- *Pour tout caractère non trivial* χ *de* G , *l'espace* $H^1(G, \mathbf{C}_\chi)$ *s'identifie à l'espace des homomorphismes* $u : D(G) \longrightarrow \mathbf{C}$ *qui satisfont à*

$$u(g.x) = \chi(g)\, u(x) \qquad \textit{pour } g \in G\,,\ x \in D(G)\,.$$

Autrement dit, $H^1(G, \mathbf{C}_\chi)$ est le composant isotypique de type χ de la représentation de G sur l'espace vectoriel complexe $\mathrm{Hom}\,(D(G), \mathbf{C})$. Ainsi $\Sigma^1(G)$ est l'ensemble des caractères qui apparaissent dans cette représentation.

La suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(G_{ab}, H^q(D(G), \mathbf{C}_\chi)) \quad \Rightarrow \quad H^{p+q}(G, \mathbf{C}_\chi)$$

donne lieu en bas degré à une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(G_{ab}, \mathbf{C}_\chi) \longrightarrow H^1(G, \mathbf{C}_\chi) \longrightarrow \mathrm{Hom}\,(D(G), \mathbf{C}_\chi)^G \longrightarrow H^2(G_{ab}, \mathbf{C}_\chi)\ ;$$

l'action de G sur $\mathrm{Hom}\,(D(G), \mathbf{C}_\chi)$ est donnée par la formule

$$(g.u)(x) = \chi(g)\, u(g^{-1}x) \qquad \text{pour } g \in G\,,\ x \in D(G)\,,\ u \in \mathrm{Hom}\,(D(G), \mathbf{C}_\chi)\,.$$

Si χ n'est pas trivial, on déduit du lemme 4.1 un isomorphisme $H^1(G, \mathbf{C}_\chi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(D(G), \mathbf{C}_\chi)^G$. La proposition en résulte. ∎

Lorsque G est le groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte X , le groupe $\hat{G}$ s'identifie naturellement à $H^1(X, \mathbf{C}^*)$: à un caractère χ de G correspond un faisceau localement constant de rang un $\mathscr{L}_\chi$ sur X . On a un isomorphisme canonique

$$H^1(G, \mathbf{C}_\chi) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathscr{L}_\chi)\ ;$$

par suite, l'ensemble $\Sigma^1(G)$ coïncide avec l'ensemble $\Sigma^1(X)$. En vertu du cor. 3.6, il est réunion d'une partie continue $\Sigma^1_c(G)$, formée de translatés de sous-groupes de la forme $\mathrm{Hom}\,(G/H, \mathbf{C}^*)$ où H est un sous-groupe distingué de G , et d'une partie finie $\Sigma^1_i(G)$ formée de caractères *unitaires.*

Proposition 4.3.- *Soit* $\chi \in \Sigma^1_i(G)$, *et soit* $g \in G$. *Le nombre complexe* $\chi(g)$ *est un nombre algébrique, dont tous les conjugués sont de module* 1 . *S'il est entier sur* $\mathbf{Z}$, *c'est une racine de l'unité.*

Soit σ un automorphisme de $\mathbf{C}$. L'application $z \mapsto \sigma(z)$ définit un isomorphisme $\mathbf{Z}[G]$-linéaire de $\mathbf{C}_\chi$ sur $\mathbf{C}_{\sigma\circ\chi}$; par suite le sous-ensemble $\Sigma^1(G)$ de $\hat{G}$ est stable par l'action de $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C})$. Il résulte aussitôt de la définition de $\Sigma^1_c(G)$ que cet ensemble est stable par $\mathrm{Aut}\,(\mathbf{C})$; il en est donc de même de $\Sigma^1_i(G)$. On en déduit que l'ensemble des conjugués de $\chi(g)$ est fini, donc que $\chi(g)$ est un nombre algébrique, et que tous ces conjugués sont de module 1 . La dernière assertion résulte alors d'un lemme bien connu de Kronecker. ∎

Corollaire 4.4.- *Soit* M *un* $\mathbf{Z}[G]$-*module, de type fini sur* $\mathbf{Z}$. *Soit* χ *un élément de* $\Sigma^1_i(G)$; *on suppose qu'il existe un vecteur non nul* v *de* $M \otimes \mathbf{C}$ *satisfaisant à* $g.v = \chi(g)\, v$ *pour tout* $g \in G$. *Alors* χ *est d'ordre fini.*

Tout élément g de G induit un endomorphisme $\mathbf{Z}$-linéaire de M, dont les valeurs propres sont des entiers algébriques en vertu du théorème de Cayley-Hamilton. Il résulte alors de la proposition que $\chi(g)$ est une racine de l'unité pour tout g dans G, donc que χ est d'ordre fini puisque G est de type fini. ∎

Proposition 4.5.- *On suppose que le* $\mathbf{Z}$-*module* $D(G)/D^2(G)$ *est de type fini. Alors les ensembles* $S^1(X)$ *et* $\Sigma^1(X)$ *sont finis, et leurs éléments sont d'ordre fini.*

La prop. 4.2 entraîne que l'ensemble $\Sigma^1(G)$ est fini, et que le $\mathbf{Z}[G]$-module $\mathrm{Hom}(D(G)/D^2(G), \mathbf{Z})$ vérifie les hypothèses du cor. 4.3 ; il en résulte que $\Sigma^1(X)$ est formé d'éléments d'ordre fini. Compte tenu de la prop. 3.5, il en est de même de $S^1(X)$. ∎

Exemple 4.6.- Supposons qu'on ait $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 1$. L'application d'Albanese définit alors une fibration α de X sur une courbe elliptique E ; *supposons que cette fibration n'ait pas de fibre multiple* (ou plus généralement, que les multiplicités de ses fibres soient premières entre elles deux à deux). Soient F une fibre lisse de α et o un point de F. Comme la suite

$$\pi_1(F, o) \longrightarrow \pi_1(X, o) \longrightarrow \pi_1(E, \alpha(o)) \longrightarrow 0$$

est exacte, le noyau de $\pi_1(\alpha)$ est de type fini. On déduit alors de la suite exacte

$$1 \longrightarrow D(G) \longrightarrow \mathrm{Ker}\, \pi_1(\alpha) \longrightarrow \mathrm{Tors}\, H_1(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow 0$$

que $D(G)$ est de type fini.

Ce résultat s'applique par exemple aux surfaces avec $q = p_g = 1$ étudiées dans [C–C] : on vérifie en effet en utilisant la prop. 1.9 que la fibration d'Albanese a au plus une fibre multiple, sauf dans un cas avec $K^2 = 8$ où la fibration est isotriviale et où il est facile de décrire explicitement l'ensemble $S^1(X)$.

Remarque 4.7.- La prop. 4.5 admet la généralisation suivante, qui se démontre par la même méthode : si H est un sous-groupe distingué de G tel que le $\mathbf{Z}$-module $D(H)/D^2(H)$ soit de type fini, les caractères de $\Sigma^1(G)$ dont la restriction à H n'est pas triviale sont d'ordre fini. Ce résultat s'applique par exemple si X admet une fibration $p : X \longrightarrow B$ sans fibres multiples, dont la fibre générale F est un tore complexe (ou plus généralement, une variété telle que l'image de $\pi_1(F)$ dans $\pi_1(X)$ soit abélienne).

Il me paraît toutefois plus intéressant de considérer d'abord le cas où X n'a pas de telles fibrations, et de comprendre dans quelle mesure l'hypothèse sur $D(G)$ est restrictive. Je ne connais pour l'instant aucun exemple où elle n'est pas vérifiée.

BIBLIOGRAPHIE

[B] A. BEAUVILLE : *Annulation du* H^1 *et systèmes paracanoniques sur les surfaces.* J. reine angew. Math. **388** (1988), 149-157.

[Bo] N. BOURBAKI : *Groupes et algèbres de Lie, ch. 4 à 6* (2ème éd.). Masson, Paris (1981).

[BPV] W. BARTH, C. PETERS, A. VAN DE VEN : *Compact complex surfaces.* Ergebnisse der Math. **4** (3. Folge), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo (1984).

[C-C] F. CATANESE, C. CILIBERTO : *Surfaces with* $p_g = q = 1$. Dans "Problems in the theory of surfaces and their classification", Symposia math. **32**, Academic Press (1991).

[F] T. FUJITA : *The sheaf of relative canonical forms of a Kähler fibre space over a curve.* Proc. Japan Acad. **54** (1978), 183-184.

[G-L 1] M. GREEN, R. LAZARSFELD : *Deformation theory, generic vanishing theorems, and some conjectures of Enriques, Catanese and Beauville.* Invent. math. **90** (1987), 389-407.

[G-L 2] M. GREEN, R. LAZARSFELD : *Higher obstructions to deforming cohomology groups of line bundles.* J. A.M.S. **4** (1991), 87-103.

[S] F. SERRANO : *Multiple fibres of a morphism.* Comment. Math. Helvetici **65** (1990), 287-298.