Inventiones math. 55, 121-140 (1979)

Inventiones mathematicae

L'application canonique pour les surfaces de type général

Arnaud Beauville

Université d'Angers, Faculté des Sciences, Boulevard Lavoisier, F-49045 Angers-Cédex, France

Introduction

On connaît l'importance de l'application canonique dans la théorie des courbes algébriques, et des applications pluricanoniques pour la classification des surfaces. L'étude des applications n-canoniques ($n \geqq 2$) pour les surfaces complexes, déjà entreprise par Enriques ([E]), a été menée à bien par Kodaira puis définitivement mise au point par Bombieri ([Bo]); leurs résultats sont pratiquement complets. Rappelons-en brièvement les faits marquants.

Le problème ne se pose guère que pour les surfaces de type général, c'est-à-dire celles pour lesquelles l'application n-canonique φ_{nK} est birationnelle pour n assez grand[1]; Bombieri montre que φ_{nK} est en fait pour $n \geqq 5$ un isomorphisme en dehors de certaines courbes exceptionelles, qui sont contractées sur des points doubles rationnels. L'application φ_{3K} est birationnelle sauf pour deux types de surfaces, que l'on sait décrire explicitement; enfin l'application φ_{2K} est birationnelle, sauf pour les surfaces admettant un pinceau de courbes de genre 2 et pour certaines surfaces appartenant à une famille limitée.

Nous essayons dans cet article d'entreprendre une étude analogue pour l'application canonique - précisons tout de suite que nos résultats sont loin d'être aussi complets que ceux de Bombieri-Kodaira. L'information dont on dispose dans la littérature existante est très mince. Quelques exemples classiques sont exposés dans [E]; toutefois ces exemples ne sont guère satisfaisants de notre point de vue. En effet ils concernent des surfaces avec $p_g \leqq 5$, donc une famille limitée de surfaces (cf. proposition 1.7 ci-dessous); et il semble clair que le comportement de cette famille n'est en rien typique du cas général: c'est ainsi que pour $p_g = 3$ on n'a guère de choix quant à l'image de l'application canonique, et le degré de cette application peut être anormalement élevé. Nous chercherons, au contraire, des énoncés valables pour *presque toutes* les surfaces de type général, c'est-à-dire toutes à l'exception d'une famille limitée.

[1] Nous notons φ_{nK} l'application n-canonique de la surface sur son image, cf. (1.1)

0020-9910/79/0055/0121/$04.00

Nos résultats principaux peuvent s'énoncer comme suit:

– Si le système canonique est composé d'un pinceau, les fibres de ce pinceau sont de genre $\leqq 5$, sauf peut-être pour une famille limitée de surfaces (§2).

– Si le système canonique n'est pas composé d'un pinceau, l'image de l'application canonique est une *surface avec* $p_g=0$ ou une *surface canonique* (§3); de plus, sauf pour une famille limitée de surfaces, on a $\deg \varphi_K \leqq 9$ dans le premier cas, et $\deg \varphi_K \leqq 3$ dans le second (§4).

Ces résultats sont complétés par des exemples qui montrent que les majorations obtenues ne sont pas trop grossières: on décrit par exemple une famille non limitée de surfaces avec $\deg \varphi_K = 8$.

Enfin le §5 est consacré aux surfaces de type général qui vérifient l'inégalité $K^2 < 3p_g - 7$; on montre que dans ce cas φ_K est toujours une application rationnelle de degré 2 sur une surface réglée - ce qui fournit une description effective de ces surfaces. Cet énoncé précise un théorème de Castelnuovo, qui a démontré l'inégalité $K^2 \geqq 3p_g - 7$ lorsque le diviseur canonique est très ample ([C]).

Je voudrais signaler que le cas où l'application canonique est de degré 2 est étudié dans l'article [P], où se trouve énoncée l'alternative (3.5). D'autre part des résultats voisins de ceux du §5 ont été obtenus indépendamment par M. Reid ([R]).

Les résultats de cet article ont été exposés en mai 1978 au Collège de France dans le cadre de la fondation Peccot, que je tiens à remercier ici.

Conventions et notations

Les surfaces considérées dans cet article sont des surfaces projectives complexes. Sauf mention du contraire, une *surface de type général* est supposée être *lisse* (et connexe).

Soient X une surface lisse, D un diviseur sur X. On note:

$H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$ ou simplement $H^i(X, D)$ les espaces de cohomologie du faisceau associé à D.

$h^i(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, D)$.

$|D|$ = ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D.

K_X ou K = diviseur canonique = un diviseur tel que $\mathcal{O}_X(K) \cong \Omega_X^2$.

$q(X)$ ou $q = \dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = \dim H^0(X, \Omega_X^1)$.

$p_g(X)$ ou $p_g = \dim H^2(X, \mathcal{O}_X) = h^0(K_X)$.

Φ_K = application canonique de X dans $\mathbb{P}^{p_g-1}$.

φ_K = application rationnelle de X dans $\Sigma = \Phi_K(X)$ déduite de Φ_K.

Les applications rationnelles sont représentées par des flèches discontinues $\dashrightarrow$. On note $\equiv$ l'équivalence linéaire des diviseurs.

§1. Préliminaires

Afin de fixer les notations, nous allons rappeler les résultats classiques concernant les systèmes linéaires sur les surfaces.

1.1. Soit X une surface lisse sur $\mathbb{C}$, et soit D un diviseur sur X. Si $h^0(D) \geqq 1$, le système linéaire $|D|$ définit une application rationnelle $\Phi_D: X \dashrightarrow \mathbb{P}^{h^0(D)-1}$. Soit Σ l'image de Φ_D; on notera $\varphi_D: X \dashrightarrow \Sigma$ l'application déduite de Φ_D.

Le système $|D|$ a, en général, une *partie fixe* Z et une *partie mobile* M, avec $D \equiv Z + M$. On a $\Phi_D = \Phi_M$. Le système linéaire $|M|$ a en général des *points base*, où l'application Φ_D n'est pas définie; il existe un morphisme $\varepsilon: \hat{X} \dashrightarrow X$, composé d'un nombre fini d'éclatements, tel que $\Phi_D \circ \varepsilon$ soit un morphisme de $\hat{X}$ dans $\mathbb{P}^{h^0(D)-1}$. Ce morphisme correspond à un système linéaire sans point base $|\hat{M}|$ sur $\hat{X}$, obtenu à partir de $\varepsilon^* M$ en retranchant les composantes fixes; on a $\hat{M}^2 \leqq M^2$.

Supposons $h^0(D) \geqq 2$. On distingue alors deux cas, suivant que l'image Σ de Φ_D est une courbe ou une surface.

a) Si Σ est une surface, l'application rationnelle $\varphi_D: X \dashrightarrow \Sigma$ est génériquement finie, ainsi que le morphisme $\varphi_D \circ \varepsilon$. Si d désigne le degré de φ_D, on a $\hat{M}^2 = d \deg(\Sigma)$, d'où $M^2 \geqq d \deg(\Sigma)$, l'égalité n'ayant lieu que si $|M|$ est sans point base.

b) Si Σ est une courbe, on dit que le système linéaire $|D|$ est *composé d'un pinceau.* L'application rationnelle φ_D se factorise en $\varphi_D: X \overset{p}{\dashrightarrow} B \to \Sigma$, où B est une courbe lisse et où la fibre générique F de p est irréductible.

Si $g(B) = 0$, on dit que le pinceau est rationnel; on peut alors écrire $D \equiv Z + aF$, avec $h^0(D) = a + 1$, F étant une courbe irréductible telle que $F^2 \geqq 0$.

Si $g(B) \geqq 1$, le pinceau est irrationnel; il n'a pas de point base. L'application p est un morphisme et on a $D \equiv Z + p^* E_a$, où E_a est un diviseur de degré a sur B. On écrira aussi $D \sim_{\text{alg}} Z + aF$, $\sim_{\text{alg}}$ dénotant l'équivalence algébrique. La courbe F est lisse; on a $F^2 = 0$ et $h^0(D) \leqq a + 1$.

Nous appliquerons surtout ce qui précède au système canonique $|K|$ de X. La remarque suivante sera fondamentale.

Lemme 1.2. *Soit X une surface de type général minimale; notons M la partie mobile du système canonique $|K|$. On a $K^2 \geqq M^2$; si de plus l'image de φ_K est une surface $\Sigma \subset \mathbb{P}^{p_g - 1}$, on a*

$$K^2 \geqq M^2 \geqq (\deg \varphi_K)(\deg \Sigma).$$

Démonstration. On a $K^2 = KZ + ZM + M^2$, $KZ \geqq 0$ puisque X est de type général minimale et $ZM \geqq 0$ puisque M est mobile, d'où $K^2 \geqq M^2$. La seconde assertion résulte aussitôt de 1.1 a).

Nous utiliserons aussi deux résultats classiques, dont le premier sera énoncé sans démonstration:

1.3. Lemme de Clifford. *Soient C une courbe irréductible, D un diviseur sur C tel que* $0 \leqq \deg(D) \leqq 2g(C) - 2$. *On a* $h^0(D) \leqq \frac{1}{2} \deg(D) + 1$.

Lemme 1.4. *Soit $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$ une surface irréductible, non contenue dans un hyperplan. On a* $\deg(\Sigma) \geqq n - 1$; *si Σ n'est pas réglée, on a* $\deg(\Sigma) \geqq 2n - 2$.

Démonstration. Soit $S \to \Sigma$ une désingularisation de Σ; notons $|H|$ le système linéaire sur S image réciproque du système des hyperplans de $\mathbb{P}^n$. Une courbe générique $C \in |H|$ est lisse; on a une suite exacte:

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(H) \to \mathcal{O}_C(D) \to 0, \quad \text{avec } D = H|_C.$$

On déduit de la suite exacte de cohomologie associée l'inégalité $n \leqq h^0(C, D)$. Distinguons maintenant deux cas, suivant le signe du produit HK:

a) Si $HK \geqq 0$ (ce qui est toujours le cas si S n'est pas réglée), la formule du genre montre qu'on a $0 < H^2 \leqq 2g(C) - 2$, ce qui permet d'appliquer le lemme de Clifford (1.3) à D: on trouve

$$h^0(C, D) \leqq \frac{H^2}{2} + 1, \quad \text{d'où } H^2 = \deg(\Sigma) \geqq 2n - 2.$$

b) Si $HK < 0$, on a $H^2 > 2g(C) - 2$ d'où

$$h^0(C, D) = H^2 + 1 - g(C) \quad \text{par Riemann-Roch}$$

et $H^2 \geqq n - 1$.

Remarque 1.5. La démonstration montre que si $\deg(\Sigma) = n - 1$, la surface Σ est *rationnelle.* La liste des surfaces de degré $(n-1)$ dans $\mathbb{P}^n$ est bien connue depuis Del Pezzo (cf. par exemple [G-H], Ch. IV).

De même, on voit facilement que si $\deg(\Sigma) = 2n - 2$, la surface S est réglée ou est une surface $K3$.

Nous rappellerons finalement deux résultats sur les surfaces de type général que nous aurons à utiliser fréquemment.

Théorème 1.6 (Miyaoka [M1]). *Toute surface de type général satisfait à l'inégalité* $K_X^2 \leqq 9\chi(\mathcal{O}_X)$.

Proposition 1.7. *Soit N un entier. Les surfaces minimales de type général telles que $\chi(\mathcal{O}) \leqq N$ (ou $K^2 \leqq N$, ou $p_g \leqq N$) forment une famille limitée.*

Cela signifie que toutes ces surfaces rentrent dans une famille algébrique $(X_s)_{s \in S}$ de surfaces paramétrée par une *variété* S; ou en termes heuristiques, que dans «l'espace des modules» des surfaces de type général, qui contient une *infinité dénombrable* de composantes irréductibles, les surfaces considérées appartiennent à un *nombre fini* de composantes.

Démonstration de 1.7. Compte-tenu des inégalités $K^2 \leqq 9\chi(\mathcal{O})$ (1.6), $\chi(\mathcal{O}) \leqq p_g + 1$ et $K^2 \geqq 2p_g - 4$ (inégalité de Noether, cf. [Bo] p. 209), il suffit de montrer que les surfaces avec $\chi(\mathcal{O})$ et K^2 *fixés* forment une famille limitée. On peut alors appliquer l'argument de [B-H] p. 395.

§ 2. Système canonique composé d'un pinceau

Proposition 2.1. *Soit X une surface de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau de courbes de genre g. Si $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 21$, on a $2 \leqq g \leqq 5$, et le pinceau n'a pas de points fixes.*

On peut compléter l'énoncé pour les petites valeurs de $\chi(\mathcal{O}_X)$: on a $g \leqq 6$ si $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 12$, etc. ... L'intérêt de l'inégalité énoncée vient de ce qu'elle est valable pour «presque toutes» les surfaces minimales de type général - c'est-à-dire toutes à l'exception d'une famille limitée (1.7).

Démonstration. On peut supposer la surface X minimale. D'après (1.1.b) on peut écrire $K \sim_{\text{alg}} Z + aF$, où F est une courbe irréductible et $p_g \leqq a+1$. On a

$$\begin{aligned} 9\chi(\mathcal{O}_X) &\geqq K^2 \\ &\geqq aKF \geqq (p_g - 1)KF \geqq (\chi(\mathcal{O}_X) - 2)KF \end{aligned} \tag{1.6}$$

d'où $KF \leqq 9\chi(\mathcal{O}_X)/(\chi(\mathcal{O}_X)-2) < 10$ si $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 21$.

Remplaçant K par son expression, on en déduit $aF^2 \leqq 9$, d'où $F^2 = 0$ puisque $a \geqq \chi(\mathcal{O}_X) - 2 \geqq 19$. La formule du genre donne alors $g(F) \leqq 5$, d'où la proposition.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe effectivement des familles non limitées de surfaces de type général dont le système canonique est composé d'un pinceau de courbes de genre 2 ou 3. Ces exemples sont construits à partir des revêtements doubles ramifiés, dont nous allons rappeler quelques propriétés.

2.2. Soient X, S deux surfaces lisses; un revêtement double ramifié $\pi: X \to S$ est un morphisme fini de degré 2. Le lieu de ramification de π sur S est alors une courbe lisse Δ (non nécessairement connexe), dont la classe dans $\mathrm{Pic}(S)$ est divisible par 2: on a $\Delta \equiv 2\delta$. La surface S étant fixée, la donnée du revêtement double ramifié $\pi: X \to S$ est équivalente à la donnée d'une classe de diviseur δ dans $\mathrm{Pic}(S)$ et d'une courbe lisse $\Delta \in |2\delta|$; on a alors $\pi_* \mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(-\delta)$.

Notons $\tilde{\Delta}$ le lieu de ramification de π sur X, de sorte qu'on a $2\tilde{\Delta} = \pi^* \Delta$ et $\tilde{\Delta} \equiv \pi^* \delta$. Un calcul immédiat (cf. lemme 3.2 plus loin) donne

$$K_X \equiv \pi^* K_S + \tilde{\Delta} \equiv \pi^*(K_S + \delta)$$

d'où, en appliquant la formule de projection:

$$H^0(X, K_X) \cong H^0(S, K_S) \oplus H^0(S, K_S + \delta).$$

Supposons maintenant qu'on ait $p_g(S) = 0$. Il résulte de ce qui précède que l'application canonique de X se factorise en $\Phi_K = \psi \circ \pi$, où $\psi: S \dashrightarrow \mathbb{P}^{p_g(X)-1}$ désigne l'application associée au système linéaire $|K_S + \delta|$. En particulier si $|K_S + \delta|$ est composé d'un pinceau, il en est de même du système $|K_X|$.

2.3. Exemple 1. L'exemple classique de Pompilj ([Po]). Pompilj construit, par un argument du type Bertini, une courbe plane irréductible D de degré $6h$ $(h \geqq 2)$, admettant comme singularités un point o ordinaire de multiplicité $(6h-6)$ et des points triples $P_1, \ldots, P_{4h-4}$ de type [3, 3] (c'est-à-dire se transformant en points triples ordinaires après un éclatement), tels qu'il existe une courbe irréductible L de degré $(h-1)$ passant par les P_i, et passant par o avec multiplicité $(h-2)$. La surface S est obtenue en éclatant dans $\mathbb{P}^2$ le point o, les points P_i, puis les «points proches» Q_i correspondant à la direction tangente à D en P_i. Notons O le diviseur exceptionnel au-dessus de o, E_i le transformé total de P_i dans S, E_i' la droite exceptionnelle apparue dans l'éclatement de Q_i; soit H l'image réciproque dans S d'une droite de $\mathbb{P}^2$. Le transformé strict $\bar{D}$ de D est donné dans $\mathrm{Pic}(S)$ par la formule: $\bar{D} \equiv 6hH - (6h-6)O - 3\sum_i (E_i + E_i')$.

On pose $\delta = 3hH - (3h-3)O - \sum_i (E_i + 2E_i')$; la courbe $\Delta = \bar{D} + \sum_i (E_i - E_i')$ est lisse, ce qui permet de définit un revêtement double $\pi: X \to S$ ramifié le long de Δ. On a

$$K_S + \delta \equiv (3h-3)H - (3h-4)O - \sum_i E_i'$$

ce qui entraîne que $|K_S + \delta|$ admet comme composantes fixes les courbes $E_i - E_i'$. Si on écrit $K_S + \delta \equiv \sum_i (E_i - E_i') + M$, on trouve $ML = -1$; par conséquent L est une composante fixe de M. Or on a $M - L \equiv (2h-2)(H-O)$, ce qui prouve que le système $|K_S + \delta|$ est composé du pinceau $|H - O|$. Par suite $|K_X|$ est composé d'un pinceau. La surface X est régulière ($q(X) = 0$); les courbes du pinceau sont de genre 2.

Example 2. Le système canonique composé d'un pinceau de courbes de genre 3.

Cet exemple est basé sur une construction qui va nous servir plusieurs fois dans la suite.

2.4. Prenons $S = C \times \mathbb{P}^1$, où C est une courbe lisse; notons $p: S \to C$ et $q: S \to \mathbb{P}^1$ les deux projections, et F une fibre de q. Soit η un diviseur sur C tel que le système $|2\eta|$ n'ait pas de point base, et soit a un entier $\geqq 1$. Posons

$$\delta = p^* \eta + (a+2) F.$$

Il est clair que le système $|2\delta|$ contient un diviseur lisse Δ, ce qui permet de construire un revêtement double $\pi: X \to S$ ramifié le long de Δ; on a $|K_X| = \pi^* |K_S + \delta|$ et $K_S + \delta \equiv p^*(K_C + \eta) + aF$. Le système $|K_C + \eta|$ définit un morphisme $f: C \to \mathbb{P}^r$ (avec $r = h^0(K_C + \eta) - 1$), qui se factorise en $f: C \xrightarrow{\bar{f}} f(C) \xhookrightarrow{j} \mathbb{P}^r$. Notons $i_a: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^a$ le plongement associé au système linéaire $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)|$. L'application canonique de X apparaît alors composée des morphismes suivants:

$$\Phi_K: X \xrightarrow{\pi} C \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{(\bar{f},1)} f(C) \times \mathbb{P}^1 \xhookrightarrow{(j, i_a)} \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^a \xhookrightarrow{s} \mathbb{P}^{p_g(X)-1}$$

où s est le plongement de Segre.

2.5. Supposons maintenant que C soit de genre 2, avec $2\eta \equiv 0$ et $\eta \not\equiv 0$. On a alors $h^0(C, K_C + \eta) = 1$, de sorte que le système $|K_S + \delta|$ est composé du pinceau $|F|$. Par suite le système $|K_X|$ est composé d'un pinceau, dont les courbes sont isomorphes au revêtement étale double de C associé à η. Elles sont donc de genre 3.

La surface X est minimale et satisfait à

$$p_g = a+1 \qquad q = 2 \qquad K^2 = 8\chi(\mathcal{O}_X) = 8a.$$

Lorsque a varie, on obtient donc une famille non limitée de surfaces.

Variante. On peut prendre pour C une courbe elliptique et pour η un diviseur de degré 1; le système canonique des surfaces ainsi construites est composé d'un pinceau de courbes de genre 2.

2.6. Example 3. Le système canonique composé d'un pinceau elliptique.

Soient E, F deux courbes elliptiques, ε un point d'ordre 2 de E, σ l'involution de $E\times F$ définie par $\sigma(e,f)=(e+\varepsilon,\ -f)$ pour $e\in E$, $f\in F$. Considérons la surface bielliptique $S=(E\times F)/\sigma$ (cf. [B1] p. 113). Notons E' la courbe quotient de E par le sous-groupe $\{0,\varepsilon\}$; soient $f_1,\dots,f_4$ les points d'ordre 2 de F, et soient $t_1,\dots,t_4$ leurs images dans la courbe $F/\{\pm 1\}\cong\mathbb{P}^1$. Les projections $p\colon S\to E'$ et $q\colon S\to\mathbb{P}^1$ définissent sur S deux fibrations elliptiques. La fibration p est lisse. La fibration $q\colon S\to\mathbb{P}^1$ a 4 fibres doubles, au-dessus des points t_i; on a $q^*[t_i]=2E_i'$ $(1\leqq i\leqq 4)$, et la courbe E_i' définit une section de la fibration p. Notons enfin qu'on a $K_S\equiv p^*\eta$, où le diviseur η a pour classe dans $\operatorname{Pic}(E')$ l'élément d'ordre 2 associé au revêtement $e\colon E\to E'$.

Soient a un entier $\geqq 2$, D un diviseur de degré a sur E'. Posons $\delta=p^*D+E_1'$. Le système $|2\delta|$ contient une courbe lisse Δ: il est en effet image réciproque par le morphisme $S\to E'\times\mathbb{P}^1$ d'un système linéaire très ample sur $E'\times\mathbb{P}^1$. On en déduit un revêtement double $\pi\colon X\to S$ ramifié le long de Δ, tel que $|K_X|=\pi^*|K_S+\delta|$. On a $K_S+\delta\equiv p^*D'+E_1'$, avec $D'=D+\eta$. Considérons le morphisme $\rho\colon E\times F\to S$; comme $\rho^*(p^*D'+E_1')=pr_1^*(e^*D')+pr_2^*[f_1]$, la courbe ρ^*E_1' est la partie fixe du système linéaire $|\rho^*(K_S+\delta)|$. Il en résulte que E_1' est partie fixe du système $|K_S+\delta|$, donc que celui-ci est composé du pinceau elliptique $p\colon S\to E'$. Par conséquent $|K_X|$ est composé du pinceau elliptique $p\circ\pi\colon X\to E'$; les courbes de ce pinceau sont de genre 2. La surface X est minimale et satisfait à

$$p_g=a \qquad q=1 \qquad K_X^2=4\chi(\mathcal{O}_X)=4a.$$

Lorsque a varie, on obtient donc une famille non limitée.

§ 3. L'image de l'application canonique

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas où l'image de l'application canonique est une *surface* Σ. Celle-ci peut bien sûr être singulière; nous définirons l'application canonique de Σ comme étant l'application rationnelle $\Phi_{K_S}\circ\eta^{-1}$, où S est une surface lisse et $\eta\colon S\to\Sigma$ une application birationnelle (cette définition est évidemment indépendante du choix de S). De même on pose $p_g(\Sigma)=p_g(S)$, et on dit que Σ est de type général si S l'est.

Théorème 3.1. *Soit X une surface de type général telle que l'application canonique $\Phi_K\colon X\to\mathbb{P}^{p_g(X)-1}$ ait pour image une surface Σ. On a alors l'une des deux situations suivantes:*

Cas I. $p_g(\Sigma)=0$.

Cas II. Σ est une surface de type général, plongée dans $\mathbb{P}^{p_g(X)-1}$ par son application canonique (en particulier, $p_g(\Sigma)=p_g(X)$).

Pour mettre en relief l'intérêt de ce résultat, il convient de rappeler que la liste des surfaces avec $p_g=0$ est assez restreinte; les modèles minimaux sont les suivants:

(i) Les surfaces réglées.

(ii) Les surfaces elliptiques isotriviales (i.e. de la forme $(C\times E)/G$, où C est une courbe lisse, E une courbe elliptique, G un groupe fini – cf. [B1] p. 107), pour lesquelles $q=1$.

(iii) Les surfaces elliptiques «tordues» à partir de la surface elliptique rationnelle standard (obtenue à partir de $\mathbb{P}^2$ en éclatant les 9 points d'intersection de deux cubiques), qui vérifient $q=0$.

(iv) Certaines surfaces de type général avec $p_g=q=0$, cf. [D].

Nous verrons plus loin (3.5) que toutes ces surfaces peuvent être réalisées comme images canoniques de surfaces de type général.

Lemme 3.2. *Soit $\pi: X \to S$ un morphisme surjectif de surfaces lisses. Parmi les courbes irréductibles sur X contenues dans le lieu de ramification de π, on note $(E_i)_{1 \leqq i \leqq p}$ celles qui sont contractées par π et $(C_j)_{1 \leqq j \leqq q}$ celles dont l'image par π est une courbe Γ_j; pour ces dernières, on définit l'indice de ramification e_j comme le coefficient de C_j dans le diviseur $\pi^* \Gamma_j$. Soit ω une 2-forme holomorphe non nulle sur S; on a:*

$$\operatorname{div}(\pi^* \omega)=\pi^*(\operatorname{div} \omega)+\sum_{j=1}^{q}(e_j-1)\, C_j+\sum_{i=1}^{p} r_i E_i$$

où les r_i sont des entiers $\geqq 0$.

Démonstration. Il est clair que le diviseur de $\pi^* \omega$ est égal à $\pi^*(\operatorname{div} \omega)+D$, où D est un diviseur effectif contenu dans le lieu de ramification de π. On a $D=\sum_j m_j C_j+\sum_i r_i E_i$, avec $m_j, r_i \geqq 0$, et il s'agit de calculer les coefficients m_j.

Fixons un entier j, et écrivons simplement C, Γ, e, m au lieu de C_j, Γ_j, e_j, m_j. Soit p un point générique de C. Il existe un système de coordonnées locales (s, t) sur S au voisinage de $\pi(p)$ tel que $s=0$ soit une équation locale de Γ. On peut écrire $\pi^* s=x^e$, où x définit une équation locale de C en p, et où x et $y=\pi^* t$ forment un système de coordonnées locales sur X au voisinage de p. La forme ω s'écrit $\omega=f(s, t)\, ds \wedge dt$ au voisinage de $\pi(p)$; on a alors:

$$\pi^* \omega=(\pi^* f)\, d(x^e) \wedge dy=(\pi^* f)\, e x^{e-1}\, dx \wedge dy$$

ce qui prouve que le coefficient m est égal à $e-1$, d'où le lemme.

3.3. Démonstration du théorème. Posons $p=p_g(X)$. Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, dashed, "\varphi_K"] \\ S \arrow[r, "\eta"] & \Sigma \subset \mathbb{P}^{p-1} \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

où ε est composé d'un nombre fini d'éclatements, η est une désingularisation de Σ et π est un morphisme surjectif. On suppose qu'il existe sur S une 2-forme holomorphe non nulle ω; on va montrer qu'on est alors dans la situation du Cas II.

Il résulte du diagramme précédent qu'on a $\operatorname{div}(\pi^* \omega)=\pi^* H+Z$, où H est l'image réciproque dans S d'un hyperplan de $\mathbb{P}^{p-1}$ et où Z est un diviseur effectif, partie fixe du système $|K_{\hat{X}}|$. Si on note K_0 le diviseur de ω, on trouve en utilisant les notations (et le résultat) du lemme 3.2 l'égalité entre *diviseurs:*

$$\pi^* H + Z = \pi^* K_0 + \sum_j (e_j - 1)\, C_j + \sum_i r_i E_i.$$

Soient Γ une courbe irréductible quelconque sur S, C une courbe irréductible sur X telle que $\pi(C) = \Gamma$, e le coefficient de C dans le diviseur $\pi^* \Gamma$. Notons h (resp. k) le coefficient de Γ dans H (resp. K_0). En considérant le coefficient de C dans les deux membres de l'égalité précédente, on obtient l'inégalité

$$he \leqq ke + e - 1$$

d'où $h \leqq k$.

On en déduit $K_0 = H + E$, où E est un diviseur effectif. On a alors:

$$p_g(X) \leqq h^0(S, \mathcal{O}_S(H)) \leqq p_g(S) \leqq p_g(X).$$

Toutes ces inégalités sont donc des égalités; ceci prouve que E est la partie fixe du système $|K_S|$ et que η est égal à l'application canonique φ_{K_S}. On est donc dans la situation du Cas II, ce qui démontre le théorème.

Remarquons que la démonstration précédente s'applique sans changement au cas de variétés de dimension quelconque. Si on convient de noter encore $p_g(\Sigma)$ la dimension de l'espace des formes holomorphes de degré maximum sur une variété lisse birationnellement équivalente à la variété Σ, on a donc le théorème suivant.

Théorème 3.4. *Soit X une variété projective et lisse; on suppose que l'image $\Sigma \subset \mathbb{P}^{p_g(X)-1}$ de l'application canonique de X a la même dimension que X. Alors ou bien $p_g(\Sigma) = 0$, ou bien Σ est une variété de type général, plongée dans $\mathbb{P}^{p_g(X)-1}$ par son application canonique.*

3.5. Un cas particulier: $\deg \varphi_K = 2$. Revenant aux surfaces, on va illustrer le théorème 3.1 dans le cas où l'application $\varphi_K \colon X \dashrightarrow \Sigma$ est de degré 2. On peut supposer la surface X minimale.

Remarquons qu'on peut alors trouver un diagramme commutatif (3.3)

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\varepsilon} & X \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \vdots\ {\scriptstyle\varphi_K} \\ S & \xrightarrow{\eta} & \Sigma \subset \mathbb{P}^{p-1} \end{array}$$

où de plus π est un revêtement double ramifié. En effet l'application birationnelle σ de X dans elle-même qui échange les points identifiés par φ_K est un automorphisme de X, puisque X est minimale; en éclatant un ensemble fini de points de X, stable par σ, on obtient un morphisme $\varepsilon' \colon X' \to X$ tel que $\varphi_K \circ \varepsilon'$ soit un morphisme et que σ s'étende en une involution σ' de X'. L'ensemble des points fixes de cette involution est réunion disjointe de courbes lisses et d'un nombre fini de points isolés; on obtient la surface $\hat{X}$ en éclatant ces derniers. L'involution σ' se prolonge en une involution τ de $\hat{X}$ telle que la surface quotient $S = \hat{X}/\tau$ soit lisse, d'où notre assertion.

Notons δ l'élément de Pic(S) associé à π (2.2), de sorte qu'on a:

$$K_{\hat{X}} \equiv \pi^*(K_S+\delta) \quad \text{et} \quad H^0(\hat{X}, K_{\hat{X}}) \cong H^0(S, K_S) \oplus H^0(S, K_S+\delta).$$

Dans ces conditions, les deux possibilités du théorème se traduisent comme suit:

Cas I. On a $p_g(S)=0$ et $|K_{\hat{X}}|=\pi^*|K_S+\delta|$; le système $|K_S+\delta|$ définit un *plongement birationnel* de S dans $\mathbb{P}^{p_g(X)-1}$ (égal au composé du morphisme birationnel $\eta: S \to \Sigma$ et du plongement de Σ dans $\mathbb{P}^{p_g(X)-1}$).

Cas II. On a $|K_S+\delta|=\emptyset$, $|K_{\hat{X}}|=\pi^*|K_S|$ et $\varphi_{K_{\hat{X}}}=\varphi_{K_S}\circ\pi$.

Il est facile d'obtenir des exemples du Cas I: il suffit de prendre une surface S arbitraire avec $p_g(S)=0$ et un diviseur δ sur S suffisamment ample pour que $K_S+\delta$ soit très ample et que le système $|2\delta|$ contienne un diviseur lisse. On voit ainsi, en particulier, que *pour toute surface S telle que $p_g(S)=0$, il existe une surface de type général X pour laquelle l'application canonique φ_{K_X} est un revêtement double (ramifié) de S.*

En revanche le Cas II apparaît tout-à-fait exceptionnel. Je n'en ai en fait qu'un seul exemple - ce qui est quelque peu contraire à la philosophie générale de ce travail. J'ignore en particulier s'il existe une famille non limitée de surfaces satisfaisant à II.

Voici maintenant l'exemple en question.

Proposition 3.6. *Il existe une surface X avec $p_g=4$, $q=0$, telle que l'application canonique de X soit un morphisme φ fini de degré 2 sur une quintique Σ dans $\mathbb{P}^3$. La quintique Σ a pour seules singularités* 20 *points doubles ordinaires et le revêtement φ est étale en dehors de ces* 20 *points.*

Démonstration. Partons d'un système linéaire Π de quadriques dans $\mathbb{P}^4$, de dimension projective 3. On demande que Π satisfasse aux conditions de *position générale* suivantes:

(i) Si un point de $\mathbb{P}^4$ est singulier pour une quadrique de Π, il n'appartient pas à toutes les quadriques de Π.

(ii) Si une droite de $\mathbb{P}^4$ est singulière pour une quadrique de Π, elle n'est pas contenue dans une autre quadrique de Π.

On peut interpréter ces conditions de manière légèrement différente. L'ensemble des quadriques de $\mathbb{P}^4$ forme un espace projectif $\mathbb{P}^{14}$, dans lequel les quadriques de rang ≤ 4 (resp. ≤ 3) forment une variété irréductible V_{13} (resp. V_{11}) de dimension 13 (resp. 11). Il est clair que $\deg(V_{13})=5$; on a $\deg(V_{11})=20$ par une formule classique ([S]). Il est bien connu (et facile) qu'une quadrique Q définit un point lisse de V_{13} (resp. V_{11}) si et seulement si le rang de Q est égal à 4 (resp. 3); le sous-espace projectif tangent à V_{13} (resp. V_{11}) en Q est alors l'ensemble des quadriques qui contiennent le point singulier (resp. la droite singulière) de Q. La condition (i) (resp. (ii)) signifie donc que le sous-espace projectif Π est *transverse* à V_{13} (resp. V_{11}) dans $\mathbb{P}^{14}$. Sous cette forme, il est immédiat que ces conditions sont satisfaites par un système Π assez général.

Notons Σ l'ensemble des quadriques singulières de Π. C'est une surface de degré 5 dans Π; les conditions de transversalité entraînent qu'elle a comme seules singularités 20 points doubles ordinaires $s_1, \ldots, s_{20}$, correspondant aux quadriques de rang 3 de Π.

Chaque quadrique de Σ contient deux systèmes de 2-plans, qui coïncident lorsque la quadrique est de rang 3; l'ensemble de ces systèmes définit une variété X munie d'un morphisme $\varphi: X \to \Sigma$, étale de degré 2 au-dessus de $\Sigma - \{s_1, \ldots, s_{20}\}$, mais tel que $\varphi^{-1}(s_i)$ soit réduit à un point $\tilde{s}_i$ $(1 \leqq i \leqq 20)$. On vérifie facilement, par un calcul local, que X est lisse[2].

Notons $\eta: S \to \Sigma$ (resp. $\varepsilon: \hat{X} \to X$) l'éclatement des 20 points s_i (resp. $\tilde{s}_i$), C_i la courbe rationnelle de carré (-2) sur S qui apparaît dans l'éclatement de s_i. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\varepsilon} & X \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ S & \xrightarrow{\eta} & \Sigma \end{array}$$

où π est un revêtement double ramifié le long de $\Delta = \bigcup_i C_i$; il existe donc un diviseur δ sur S tel que $2\delta \equiv \sum_i C_i$. On a $\delta^2 = -10$, $\delta K = 0$ et par conséquent:

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_X) &= \chi(\mathcal{O}_S) + \chi(\mathcal{O}_S(-\delta)) \\ &= 2\chi(\mathcal{O}_S) + \tfrac{1}{2}(\delta^2 + \delta K_S) = 5 \qquad \text{par Riemann-Roch} \\ K_{\hat{X}}^2 &= 2(K_S + \delta)^2 = -10 \qquad \text{d'où } K_X^2 = 10. \end{aligned}$$

Le morphisme composé $S \xrightarrow{\eta} \Sigma \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ est égal à l'application canonique de S; pour montrer qu'on est dans le cas II, il suffit de prouver l'égalité $p_g(X) = 4$, ou encore $q(X) = 0$. Or cela résulte aussitôt du corollaire 5.7 ci-dessous, compte tenu de l'inégalité $K_X^2 < 3\chi(\mathcal{O}_X)$ et du fait que X n'admet pas d'application rationnelle de degré 2 sur une surface réglée (sans quoi l'application canonique de X se factoriserait à travers cette surface, ce qui est absurde).

Remarques 3.7. 1) Une surface pour laquelle φ_K est un revêtement double d'une quintique avec 20 points doubles apparaît déjà dans Enriques ([E], p. 300); toutefois la construction s'appuie sur un argument de Franchetta qui demanderait une justification rigoureuse. Une autre construction, due à Gallarati, a été étudiée récemment par F. Catanese (notes personnelles). Enfin une quintique Σ particulière est apparue comme une des surfaces modulaires de Hilbert associées au corps $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ ([V – Z]). Nous allons voir que toutes ces descriptions sont des cas particuliers de la nôtre.

2) On peut montrer en effet que notre construction fournit *toutes* les quintiques Σ dans $\mathbb{P}^3$ admettant 20 points doubles ordinaires tels que la somme

---

[2] Il suffit en fait de vérifier que X est *normale* en $\tilde{s}_i$, car il n'y a alors qu'un seul modèle local possible pour φ, à savoir le quotient d'une variété lisse par une involution ayant un point fixe. Pour cela on peut choisir un point fixe 0 du système Π et considérer X comme plongée dans $G_2(\mathbb{P}^4) \times \Pi$, où $G_2(\mathbb{P}^4)$ est la grassmannienne des 2-plans de $\mathbb{P}^4$: l'image de X est formée des couples (π, Q) tels que $0 \in \pi$, $\pi \subset Q$. Sous cette forme il est immédiat que X est localement intersection complète, donc normale puisqu'elle n'a au plus que des singularités isolées

des 20 droites de carré (-2) correspondantes soit divisible par 2 dans $\mathrm{Pic}(S)$. Indiquons brièvement l'idée de la démonstration, qui suit de très près celle de la prop. 6.23 de [B2]. Soient $\Sigma \subset \Pi$ une telle quintique, S sa désingularisée, δ l'élément de $\mathrm{Pic}(S)$ tel que $2\delta \equiv \Delta = \Sigma C_i$. On considère l'homomorphisme

$$\varphi: S^2 H^0(S, 2K-\delta) \to H^0(S, 4K-\Delta).$$

On interprète $H^0(S, 4K-\Delta)$ comme l'espace des polynômes de degré 4 sur Π s'annulant aux points doubles de Σ. On a $h^0(S, 2K-\delta)=5$, de sorte que φ définit un diviseur R dans $\Pi \times \mathbb{P}^4$, fibré en quadriques au-dessus de Π. Soit $l \subset \Pi$ une droite coupant Σ en 5 points $p_1, \ldots, p_5$ distincts; on voit aisément qu'il n'y a pas de section de $H^0(S, 2K-\delta)$ qui s'annule en tous les p_i. L'argument de [B2], p. 375 montre alors que le diviseur R vérifie les conditions (i) et (ii) du lemme 6.22 de *loc. cit.* (le lemme est énoncé sous l'hypothèse $\dim \Pi = 2$, mais celle-ci n'est pas utilisée dans la démonstration), ce qui prouve que Σ est la surface discriminante d'un système linéaire de quadriques.

3) On vérifie sans peine que la construction de la surface X dépend de 20 modules. D'autre part, un calcul fastidieux montre que le groupe $H^2(X, T_X)$ est nul, d'où l'on déduit $h^1(T_X)=10\chi(\mathcal{O}_X)-2K^2=30$ par Riemann-Roch. Il en résulte que X admet un espace de modules de dimension 30, lisse au voisinage de X; pour une déformation générique de X, l'application canonique est un morphisme birationnel sur une surface de degré 10 dans $\mathbb{P}^3$.

4) Notons C_5 le groupe cyclique d'ordre 5, σ un générateur de C_5, $\zeta = \exp(2i\pi/5)$. Considérons l'action de C_5 sur $\mathbb{P}^4$ définie par $\sigma(X_0, \ldots, X_4) = (X_0, \zeta X_1, \ldots, \zeta^4 X_4)$. On peut trouver un système de quadriques Π en position générale, stable sous l'action de C_5, tel que le groupe C_5 opère librement sur Σ et donc sur X. La surface quotient X/C_5 est une surface de type général avec $p_g=0$, $K^2=2$, $\Pi_1 = C_5$. Elle admet un morphisme fini de degré 2 sur la surface Σ/C_5, qui est une *surface de Godeaux* ($p_g=0$, $K^2=1$) avec 4 points doubles ordinaires.

§4. Le degré de l'application canonique

On considère encore les surfaces minimales de type général pour lesquelles l'application canonique a pour image une *surface*.

Proposition 4.1. *Sauf pour une famille limitée de surfaces, le degré de l'application canonique est* $\leqq 9$.

De manière plus précise, soit X une surface de type général, telle que $\varphi_K(X)$ soit une surface Σ. Dans chacun des deux cas distingués par le théorème 3.1, *on a les majorations suivantes:*

Cas I ($p_g(\Sigma)=0$): *si* $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 31$, *on a* $\deg \varphi_K \leqq 9$.

Si de plus la surface Σ n'est pas réglée, on a $\deg \varphi_K \leqq 4$.

Cas II (Σ *canonique*): *si* $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 14$, *on a* $\deg \varphi_K \leqq 3$.

Démonstration. Notons d le degré de φ_K. On a

$$\begin{aligned} 9\chi(\mathcal{O}_X) &\geqq K_X^2 && (1.6)\\ &\geqq d \deg(\Sigma) && (1.2)\\ &\geqq d(p_g(X)-2) && (1.4)\\ &\geqq d(\chi(\mathcal{O}_X)-3) \end{aligned}$$

d'où $d \leqq 9\chi(\mathcal{O}_X)/(\chi(\mathcal{O}_X)-3) < 10$ dès que $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 31$.

Si Σ n'est pas réglée, on a $\deg(\Sigma) \geqq 2(p_g(X)-2)$ par (1.4), d'où $d<5$ pour $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 31$.

Dans le cas II, la surface canonique Σ satisfait à l'inégalité de Castelnuovo $\deg(\Sigma) \geqq 3p_g(\Sigma)-7$ (remarque 5.6.1 ci-dessous). On en déduit: $d \leqq 9\chi(\mathcal{O}_X)/(3\chi(\mathcal{O}_X)-10)$, d'où $d<4$ dès que $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 14$.

Remarques 4.2. 1) On peut bien sûr compléter les inégalités précédentes: on a ainsi $\deg \varphi_K \leqq 10$ si $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 17$, etc.... Comme nous l'avons déjà indiqué, l'important nous paraît d'avoir un résultat valable pour toutes les surfaces de type général à l'exception d'une famille limitée.

2) Si $q(X) \geqq 4$, la démonstration donne $\deg \varphi_K \leqq 8$, et $\deg \varphi_K \leqq 2$ dans le cas II.

3) Dans tous les cas, il ressort de la démonstration que les surfaces avec $\deg \varphi_K = 9$, ou avec $\deg \varphi_K = 3$ dans le cas II, doivent satisfaire à $K^2 > 8\chi(\mathcal{O}_X)$. On connaît jusqu'à présent très peu de surfaces de ce type, de sorte qu'il semble difficile d'établir l'existence d'une famille non limitée de surfaces avec $\deg \varphi_K = 9$.

Nous allons par contre montrer qu'il existe des familles non limitées de surfaces avec $\deg \varphi_K = 8$.

Exemples

4.3. Reprenons la construction (2.4), en choisissant le diviseur η sur C de façon que $h^0(C, K_C+\eta) \geqq 2$. Le morphisme f associé au système $|K_C+\eta|$ a alors pour image une courbe, et φ_{K_X} est un morphisme fini de X sur $f(C) \times \mathbb{P}^1$, de degré $2\deg(\bar{f})$.

Prenons C de genre 3, non hyperelliptique; soit η un diviseur sur C tel que $2\eta \equiv 0$, $\eta \not\equiv 0$. Alors f est un morphisme de degré 4 de C sur $\mathbb{P}^1$; par suite l'application canonique de X est de degré 8. La surface X est minimale et satisfait à:

$$p_g = 2a+2 \qquad q=3 \qquad K^2 = 8\chi(\mathcal{O}_X) = 16a.$$

On obtient donc une famille non limitée de surfaces avec $\deg \varphi_K = 8$.

4.4. Prenons pour C une courbe de genre 2, et pour η un diviseur sur C tel que $2\eta \equiv K_C$, $h^0(C, \eta) = 0$. Le morphisme $f\colon C \to \mathbb{P}^1$ est de degré 3; la surface X correspondante vérifie donc

$$\deg \varphi_K = 6 \qquad p_g = 2a+2 \qquad q=2 \qquad K^2 = 6(\chi(\mathcal{O}_X)-1) = 12a.$$

Notons qu'en prenant $\eta = [r]$, où r est un point de Weierstrass de C, on aurait trouvé les mêmes invariants numériques pour X mais $\deg \varphi_K = 4$.

§5. L'inégalité de Castelnuovo

Un résultat classique de M. Noether énonce qu'une surface minimale de type général satisfait à l'inégalité $K^2 \geqq 2p_g - 4$; la démonstration est basée sur le lemme de Clifford (1.3). Une amélioration de celui-ci va nous conduire à l'inégalité de Castelnuovo.

Lemme 5.1. *Soit C une courbe lisse. Tout diviseur D sur C tel que $0 \leqq \deg(D) \leqq g(C) - 1$ satisfait à l'une des deux propriétés suivantes:*

(i) $h^0(D) \leqq \frac{1}{3}(\deg(D) + 4)$.

(ii) *Il existe une courbe lisse Γ, un revêtement double ramifié $\pi: C \to \Gamma$ et un diviseur Δ sur Γ tel que $|D| = D_f + \pi^* |\Delta|$, D_f désignant la partie fixe de $|D|$; on a $\deg(\Delta) > 2g(\Gamma) - 2$ et $h^0(D) \leqq \frac{1}{2}\deg(D) + 1 - g(\Gamma)$.*

Démonstration. Soit $\varphi_D: C \to \Gamma$ le morphisme associé au système linéaire $|D|$, avec $\Gamma \subset \mathbb{P}^{h^0(D)-1}$. La courbe Γ n'est pas contenue dans un hyperplan, donc $\deg(\Gamma) \geqq h^0(D) - 1$; si $\deg \varphi_D \geqq 3$, on trouve:

$$\deg(D) \geqq 3 \deg(\Gamma) \geqq 3(h^0(D) - 1)$$

et l'inégalité (i) est satisfaite.

Si $\deg(\varphi_D) = 2$, on est dans la situation (ii); il faut noter de plus que si l'on avait $0 \leqq \deg(\Delta) \leqq 2g(\Gamma) - 2$, le lemme de Clifford (1.3) donnerait $h^0(D) = h^0(\Delta) \leqq \frac{1}{4}\deg(D) + 1$, et l'inégalité (i) serait satisfaite. On peut donc supposer $\deg(\Delta) > 2g(\Gamma) - 2$, d'où par Riemann-Roch:

$$h^0(D) = \deg(\Delta) + 1 - g(\Gamma) \leqq \tfrac{1}{2}\deg(D) + 1 - g(\Gamma).$$

Il reste à montrer que l'inégalité (i) est satisfaite lorsque φ_D est un morphisme birationnel. Nous utiliserons pour cela la *majoration de Castelnuovo* pour le genre de la courbe C (cf. par exemple [G-H]):

$$g(C) \leqq (d - h + 1) + (d - 2h + 3) + (d - 3h + 5) + \dots$$

avec $d = \deg(D)$, $h = h^0(D)$.

Supposons que l'inégalité (i) ne soit pas satisfaite; on a alors $d - 3h + 5 \leqq 0$, mais $d - 2h + 3 \geqq 0$ par le lemme de Clifford. La majoration de Castelnuovo s'écrit donc:

$$g(C) \leqq 2d - 3h + 4 \leqq d - 1,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Remarque 5.2. La démonstration montre de plus qu'en cas d'égalité dans (i), on a $\deg(D) = g(C) - 1$ et la courbe C est une *courbe extrémale* au sens de Castelnuovo; ceci entraîne $2D \equiv K_C$. Il est alors facile de dresser la liste des courbes de genre g admettant un diviseur avec ces propriétés; de telles courbes existent pour toutes les valeurs de g divisibles par 3 ([C]).

Lemme 5.3. *Soit X une surface minimale de type général, dont le système canonique est composé d'un pinceau. On a alors $K^2 \geqq 3p_g - 6$.*

a) Démontrons l'inégalité lorsque le pinceau a des points base. Il est dans ce cas rationnel, de sorte qu'on peut écrire $K \equiv Z + aF$, où F est une courbe irréductible et $a = p_g - 1$. On a

$$K^2 \geqq aKF \geqq a^2 F^2 = (aF^2)(p_g - 1).$$

L'inégalité de l'énoncé est donc vérifiée dès que $aF^2 \geqq 3$. Elle est triviale pour $a = 1$; enfin si $a = 2$, $F^2 = 1$, on trouve $K^2 \geqq 4 = 3p_g - 5$, d'où le résultat.

Nous supposerons désormais que le pinceau canonique est sans point base. Il existe donc une courbe B, un morphisme $p: X \to B$ et un diviseur D_a de degré a sur B tels que $K \equiv Z + p^* D_a$; la fibre générique F de p est irréductible et lisse.

b) Si $g(F) \geqq 3$, on obtient

$$K^2 \geqq aKF \geqq 4a \geqq 4(p_g - 1)$$

d'où l'inégalité cherchée dans ce cas.

On suppose désormais que F est de genre 2. On écrira $Z = V + H$, où V est la somme des composantes verticales (i.e. contenues dans une fibre du pinceau) de Z. On a $HF = 2$.

c) Supposons H *réduit*, de sorte que H est, soit une courbe irréductible, soit la somme de deux courbes irréductibles. On a alors:

$$HK + H^2 \geqq -4 \quad \text{par la formule du genre}$$
$$HK - H^2 = HV + 2a \geqq 2a$$

d'où

$$HK \geqq a - 2$$

et

$$K^2 \geqq HK + 2a \geqq 3a - 2 \geqq 3p_g - 5.$$

d) Reste à examiner le cas où $H = 2C$, C étant une courbe irréductible qui définit une section de p. La fibre générique de p étant hyperelliptique, il existe une involution birationnelle σ de X induisant sur les fibres lisses de p l'involution hyperelliptique; comme X est minimale, σ est un automorphisme de X. En éclatant les points fixes isolés de σ, on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "\hat{p}"] & S \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

où π est un revêtement double ramifié, S est une surface réglée (lisse) de base B, et ε est un morphisme birationnel.

La courbe C ne contient pas de point fixe isolé de σ: en effet la formule d'adjonction

$$K_F \equiv (K_X + F)|_F \equiv 2(C|_F)$$

montre que C découpe sur F un point de Weierstrass de F, donc que C est une composante de l'ensemble des points fixes de σ. Par conséquent son transformé total $\varepsilon^* C$ est une courbe irréductible $\hat{C}$ sur $\hat{X}$. On a

$$K_{\hat{X}} \equiv \hat{V} + 2\hat{C} + \hat{p}^* D_a$$

où $\hat{V}$ est un diviseur vertical pour $\hat{p}$, et $\hat{V}+2\hat{C}$ est la partie fixe de $|K_{\hat{X}}|$. On sait d'autre part (2.2) que

$$|K_{\hat{X}}| = \pi^* |K_S + \delta|$$

δ étant l'élément de $\mathrm{Pic}(S)$ associé à π. Il en résulte qu'il existe sur S une courbe Γ, définissant une section de q, et un diviseur W vertical pour q tels que

$$K_S + \delta \equiv W + \Gamma + q^* D_a, \qquad \pi^* \Gamma = 2\hat{C}.$$

Appliquons Riemann-Roch au diviseur $E = \Gamma + q^* D_a$ sur S:

$$a+1 \geqq h^0(S, \mathcal{O}_S(E)) \geqq \chi(\mathcal{O}_S(E)) = \chi(\mathcal{O}_S) + \tfrac{1}{2}(E^2 - EK).$$

Notons b le genre de la courbe B. On a $\Gamma^2 + \Gamma K = 2b-2$, d'où $E^2 - EK = \Gamma^2 - \Gamma K + 4a = 2\Gamma^2 - 2(b-1) + 4a$.

L'inégalité précédente donne alors $a+1 \geqq 1 - b + \Gamma^2 + (1-b) + 2a$, c'est-à-dire $\Gamma^2 \leqq 2b - 1 - a$.

Revenant à X, on en déduit

$$C^2 = \hat{C}^2 \leqq b - \tfrac{1}{2}(a+1)$$

d'où

$$CK \geqq b - 2 + \tfrac{1}{2}(a+1) \qquad \text{par la formule du genre}$$

et

$$K^2 \geqq 2CK + 2a \geqq 3a - 3 \geqq 3p_g - 6$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Remarques 5.4. 1) La démonstration donne en fait un résultat plus précis, en fonction du genre b du pinceau canonique. Supposons pour simplifier $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 2$; on a alors $h^0(B, D_a) = p_g > q \geqq b$, ce qui impose que le diviseur D_a n'est pas spécial, d'où $a = p_g + b - 1$ par Riemann-Roch. La démonstration du lemme fournit alors les inégalités:

$$\begin{aligned} &K^2 \geqq 4p_g + 4(b-1) && \text{si } g(F) \geqq 3 \\ &K^2 \geqq 3p_g + 5(b-1) && \text{si } H \text{ est réduit} \\ &K^2 \geqq 3p_g + 6(b-1) && \text{si } H \text{ n'est pas réduit.} \end{aligned}$$

On a donc $K^2 \geqq 3p_g + 5(b-1)$ *si* $b \geqq 1$ *(et* $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 2)$[3].

---

[3] La même méthode montre que cette inégalité est encore satisfaite lorsque $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$, sauf dans le cas où $p_g = q = b = 2$, $K^2 = 8$ ou 9

2) Dans le cas $b=0$, Horikawa ([Ho]) a démontré l'inégalité $K^2 \geqq 4p_g - 7$ pour $p_g \geqq 5$ (et $K^2 \geqq 3p_g - 4$ pour $p_g \geqq 3$). Sa méthode repose sur une analyse fine des surfaces munies d'un pinceau de courbes de genre 2; elle devrait également permettre d'améliorer l'inégalité précédente pour $b \geqq 1$.

3) Le lemme 5.3, joint à la remarque de Bombieri ([Bo], p. 209), permet de montrer que toute surface minimale de type général vérifie l'inégalité $K^2 \geqq 2p_g + q - 4$.

Théorème 5.5. *Soit X une surface minimale de type général, vérifiant l'inégalité $K^2 < 3p_g - 7$. L'application canonique de X est alors une application rationnelle de degré 2 sur une surface réglée.*

Après éclatement éventuel d'un ensemble fini de points, la surface X apparait donc comme un *revêtement double ramifié* d'une surface réglée S; il revient au même de dire que X admet un *pinceau de courbes hyperelliptiques.* Etant donnée la structure très simple des revêtements doubles ramifiés (2.2), on peut considérer que les surfaces de type général avec $K^2 < 3p_g - 7$ admettent une description explicite. Il ne faut cependant pas être trop optimiste: la surface S n'est pas a priori minimale, et sa structure peut être assez compliquée (cf. [P]).

L'inégalité $K^2 \geqq 3p_g - 7$ lorsque le système canonique est très ample est due à Castelnuovo ([C]).

Démonstration du théorème 5.5. Le lemme 5.3 montre que l'application canonique φ_K a pour image une surface $\Sigma \subset \mathbb{P}^{p_g - 1}$. Si $d = \deg \varphi_K$, on a

$$3p_g - 7 > K^2 \geqq d \deg(\Sigma) \geqq d(p_g - 2) \qquad (1.2) \text{ et } (1.4)$$

ce qui impose $d \leqq 2$. Si $d=2$ et si Σ n'est pas réglée, on trouve d'après (1.4) $3p_g - 7 > 4(p_g - 2)$, ce qui est impossible.

Il reste à montrer que φ_K ne peut être birationnelle. Supposons que ce soit le cas; soit $\varepsilon: \hat{X} \to X$ un morphisme birationnel tel que $\Phi_K \circ \varepsilon$ soit un morphisme de $\hat{X}$ dans $\mathbb{P}^{p_g - 1}$, et soit $|\hat{M}|$ le système linéaire sur $\hat{X}$ correspondant à ce morphisme. On a $K_{\hat{X}} \equiv Z + \hat{M}$, où Z est la partie fixe de $|K_{\hat{X}}|$. Une courbe générique $C \in |\hat{M}|$ est lisse (et connexe); notons D la restriction à C du diviseur $\hat{M}$. La formule d'adjonction: $(Z + 2\hat{M})|_C \equiv K_C$ montre que $\deg(D) \leqq g(C) - 1$, et il est clair que le morphisme φ_D associé à $|D|$ est birationnel. On déduit donc du lemme (5.1) l'inégalité:

$$h^0(C, D) \leqq \tfrac{1}{3}(\hat{M}^2 + 4).$$

D'autre part la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(\hat{M}) \to \mathcal{O}_C(D) \to 0$$

fournit l'inégalité:

$$h^0(S, \hat{M}) \leqq 1 + h^0(C, D)$$

d'où

$$\begin{aligned} p_g = h^0(S, \hat{M}) &\leqq \tfrac{1}{3}(\hat{M}^2 + 7) = \tfrac{1}{3}(\deg(\varphi_K(X)) + 7) \\ &\leqq \tfrac{1}{3}(K^2 + 7) \quad \text{par } (1.2) \end{aligned}$$

ce qui contredit l'hypothèse du théorème.

Remarques 5.6. 1) Si φ_K est birationnelle, la démonstration donne l'inégalité $\deg \varphi_K(X) \geqq 3p_g - 7$.

2) Il ressort de la démonstration que pour les surfaces qui satisfont à l'égalité $K^2 = 3p_g - 7$, l'application canonique est, ou bien une application rationnelle de degré 2 sur une surface réglée, ou bien un morphisme birationnel. Castelnuovo donne dans [C] la liste complète des surfaces canoniques (lisses) de degré $3p_g - 7$ dans $\mathbb{P}^{p_g - 1}$.

Corollaire 5.7. *Soit* X *une surface minimale de type général satisfaisant à* $K^2 < 3\chi(\mathcal{O}_X)$ *et* $\mathrm{Card}(\Pi_1^{\mathrm{alg}}(X)) \geqq 11$ *(cette dernière condition étant évidemment réalisée si* $q(X) \geqq 1$*). Il existe alors une application rationnelle de degré 2 de* X *sur une surface réglée; si* $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 12$*, l'application canonique de* X *possède cette propriété.*

Démonstration. Soit $\tilde{X} \to X$ un revêtement étale galoisien de groupe G, avec $\mathrm{Gard}(G) \geqq 11$. On a

$$K_{\tilde{X}}^2 - 3\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) = (\mathrm{Card}(G))(K_X^2 - 3\chi(\mathcal{O}_X)) \leqq -11$$

d'où $K_{\tilde{X}}^2 < 3p_g(\tilde{X}) - 7$.

Il résulte du théorème 5.5 que l'application canonique $\varphi_{K_{\tilde{X}}}$ est une application rationnelle de degré 2 sur une surface réglée $\tilde{\Sigma}$. Le groupe G opère sur $\tilde{\Sigma}$ de façon que $\varphi_{K_{\tilde{X}}}$ soit équivariante; si S désigne une désingularisation de $\tilde{\Sigma}/G$, on en déduit une application rationnelle $\varphi\colon X \dashrightarrow S$ de degré 2, d'où la première assertion de l'énoncé.

La remarque 5.4.1 montre que le système canonique $|K_X|$ n'est pas composé d'un pinceau irrationnel, et il résulte de la remarque 5.4.2 qu'il n'est pas composé d'un pinceau rationnel si $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 11$. L'application canonique φ_K de X est alors une application rationnelle de degré d sur une surface $\Sigma \subset \mathbb{P}^{p_g - 1}$. Le calcul de degré habituel fournit les inégalités:

$$3\chi(\mathcal{O}_X) > K^2 \geqq d \deg(\Sigma) \geqq d(p_g - 2) \geqq d(\chi(\mathcal{O}_X) - 3)$$

d'où $d < 3\chi(\mathcal{O}_X)/(\chi(\mathcal{O}_X) - 3)$, soit $d < 4$ si $\chi(\mathcal{O}_X) \geqq 12$. Or φ_K se factorise à travers la surface réglée S (2.2); on a donc nécessairement $d = 2$, et la surface Σ est birationnellement équivalente à S, d'où le corollaire.

Sous les hypothèses du corollaire, si φ_K est une application rationnelle de degré 2 sur une surface réglée S, on peut montrer qu'elle induit un isomorphisme de $\mathrm{Alb}(X)$ sur $\mathrm{Alb}(S)$; en particulier on a $q(X) = q(S)$.

Corollaire 5.8. *Soit* X *une surface minimale de type général, telle que* $K_X^2 \leqq 2\chi(\mathcal{O}_X)$ *et* $q(X) = 0$. *Si le groupe* $\Pi_1^{\mathrm{alg}}(X)$ *est d'ordre* $\geqq 11$*, il est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/(2))^r$*, où* r *est un entier* $\geqq 4$.

Démonstration. Si $\mathrm{Card}(\Pi_1^{\mathrm{alg}}(X)) \geqq 11$, on voit comme précédemment qu'il existe un revêtement étale $\tilde{X} \to X$, galoisien de groupe G, avec $\mathrm{Card}(G) \geqq 11$, tel que l'application canonique de $\tilde{X}$ soit de degré 2 et ait pour image une surface réglée. Quitte à éclater un sous-ensemble fini de $\tilde{X}$ stable par G, on peut supposer qu'il existe un revêtement double ramifié G-équivarient $\pi\colon \tilde{X} \to \tilde{S}$, où $\tilde{S}$ est une surface réglée (lisse) sur laquelle G opère.

Observons que tout élément g de G qui n'opère pas librement sur $\tilde{S}$ est d'ordre 2. En effet, soit σ l'involution de $\tilde{X}$ qui échange les deux feuillets de π, et soit x un point de $\tilde{X}$ tel que $g\pi(x)=\pi(x)$. On a alors $\pi(gx)=\pi(x)$, d'où $gx=\sigma x$ puisque g opère librement sur X; on en déduit:

$$g^2 x = g\sigma(x) = \sigma(gx) = x, \qquad \text{ce qui entraîne } g^2 = 1.$$

Si $\tilde{S}$ est rationnelle, on en déduit que tout élément de G est d'ordre 2, et par suite que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2)^k$, pour k convenable; il existe donc un entier $r \geqq 4$ tel que $\Pi_1^{\mathrm{alg}}(X) \cong H_1(X, \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/2)^r$.

Supposons $\tilde{S}$ non rationnelle, de sorte qu'il existe une courbe $\tilde{B}$, munie d'une action de G, et un morphisme G-équivariant $p: \tilde{X} \to \tilde{B}$. Nous allons montrer que les fibres de p sont de genre 2, donc n'admettent pas d'automorphisme sans points fixes; ceci entraîne que G opère librement sur $\tilde{B}$. Mais alors la courbe $B = \tilde{B}/G$ est de genre $\geqq 1$, et p définit par passage aux quotients un morphisme de X sur B, ce qui amène une contradiction.

Pour calculer le genre d'une fibre générique F de p, on peut revenir au cas où la surface $\tilde{X}$ est *minimale.* Notons simplement $K = K_{\tilde{X}}$, $p_g = p_g(\tilde{X})$. Soient Z la partie fixe de $|K|$, M sa partie mobile. L'application canonique $\varphi_K: \tilde{X} \to \Sigma$ est de degré 2, et son image $\Sigma \subset \mathbb{P}^{p_g-1}$ est une surface réglée, birationnellement équivalente à $\tilde{S}$. En utilisant le lemme 1.2 et la remarque 1.5, on obtient les inégalités:

$$2p_g \geqq 2\chi(\mathcal{O}_{\tilde{X}}) \geqq K^2 \geqq M^2 \geqq 2\deg(\Sigma) \geqq 2(p_g - 1).$$

Il résulte alors de [H], p. 115, cor. (2.4) que la surface Σ, qui est de degré $\leqq p_g$ dans $\mathbb{P}^{p_g-1}$, est *réglée en droites*[4]; autrement dit, on a $MF=2$. D'autre part on déduit de ce qui précède l'inégalité $K^2 - M^2 \leqq 2$, d'où $KZ + MZ \leqq 2$. Or la 2-connexion du diviseur canonique ([Bo], p. 181, lemma 1) entraîne $MZ \geqq 2$, donc $KZ = 0$. Ainsi Z est réunion de courbes rationnelles, qui sont contractées par p; ceci entraîne $ZF = 0$, d'où finalement $KF = 2$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 5.9. Le corollaire 5.8 est particulièrement intéressant pour les surfaces X avec $p_g = 0$, $K^2 = 2$; en effet un résultat de Miyaoka ([M2]) entraîne que le sous-groupe de 2-torsion de $\mathrm{Pic}(X)$ est au plus égal dans ce cas à $(\mathbb{Z}/2)^3$. On obtient donc pour ces surfaces la majoration $\mathrm{Card}(\Pi_1^{\mathrm{alg}}(X)) \leqq 10$.

En approfondissant cette méthode, M. Reid a montré qu'on a en fait $\mathrm{Card}(\Pi_1^{\mathrm{alg}}(X)) \leqq 8$ et a caractérisé les surfaces pour lesquelles l'égalité a lieu ([R]).

Bibliographie

[B1] Beauville, A.: Surfaces algébriques complexes. Astérisque n° 54 (1978)

[B2] Beauville, A.: Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires. Annales de l'ENS, **10**, 309–391 (1977)

[Bo] Bombieri, E.: Canonical models of surfaces of general type. Publ. Math. IHES **42**, 171–219 (1973)

[4] L'idée d'utiliser le résultat de Hartshorne, qui simplifie ma démonstration originale, est due à M. Reid ([R])

[B-H] Bombieri, E., Husemoller, D.: Classification and embeddings of surfaces. Proceedings of Symposia in Pure Math. n° 29, Algebraic Geometry, p. 329-420, 1974

[C] Castelnuovo, G.: Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie, Nota II. Rendiconti del R. Istituto Lombardo, s. II, vol. 24, 1891

[D] Dolgachev, I.: Algebraic surfaces with $q=p_g=0$. Notes du CIME 1977 - Cortona (à paraître)

[E] Enriques, F.: Le Superficie algebriche. Bologne: Zanichelli 1949

[G-H] Griffiths, P., Harris, J.: Algebraic geometry. New York: John Wiley 1978

[H] Hartshorne, R.: Curves with high self-intersection on algebraic surfaces. Publ. Math. IHES **36**, 111-125 (1969)

[Ho] Horikawa, E.: Algebraic surfaces of general type with small c_1^2, III. Inventiones math. **47**, 209-248 (1978)

[M1] Miyaoka, Y.: On the Chern numbers of surfaces of general type. Inventiones math. **42**, 225-237 (1977)

[M2] Miyaoka, Y.: On numerical Campedelli surfaces. Complex analysis and algebraic geometry (dedicated to K. Kodaira), Cambridge Univ. Press 1977

[P] Persson, U.: Double coverings and surfaces of general type. Proceedings of the algebraic geometry conference in Tromsø, Springer Lecture Notes n° 687; Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978

[Po] Pompilj, G.: Alcuni esempi di superficie algebriche a sistema canonico puro degenere. Rendiconti dei Lincei s. 8ª, **4**, 539-544 (1948)

[R] Reid, M.: Surfaces with $p_g=0$, $K^2=2$. (preprint)

[S] Segre, C.: Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice. Atti della R. Acc. dei Lincei, **9**, 253-260 (1900)

[V-Z] van der Geer, G., Zagier, D.: The Hilbert modular group for the field $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$. Inventiones math. **42**, 93-134 (1977)

Reçu le 23 fevrier 1979