Varietes Stablement Rationnelles Non Rationnelles

Arnaud Beauville; Jean-Louis Colliot-Thelene; Jean-Jacques Sansuc; Peter Swinnerton-Dyer

The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 121, No. 2 (Mar., 1985), 283-318.

Stable URL:
http://links.jstor.org/sici?sici=0003-486X%28198503%292%3A121%3A2%3C283%3AVSRNR%3E2.0.CO%3B2-G

The Annals of Mathematics is currently published by Annals of Mathematics.

Annals of Mathematics, 121 (1985), 283–318

Variétés stablement rationnelles non rationnelles

Par Arnaud Beauville, Jean-Louis Colliot-Thélène, Jean-Jacques Sansuc, Sir Peter Swinnerton-Dyer

Introduction

La question qui nous intéresse ici est souvent appelée *problème de Zariski.* Son expression algébrique est très simple. Une extension F d'un corps k est dite pure si elle est k-isomorphe à un corps de fractions rationnelles $k(t_1, \dots, t_d)$, et stablement pure si elle devient pure par addition d'un nombre fini de variables: $F(u_1, \dots, u_m) \simeq k(v_1, \dots, v_n)$. En ces termes, la question est la suivante: *une extension stablement pure est-elle pure*?

De fait cette question est de nature géométrique et il vaut mieux l'exprimer comme suit. Soit X une k-variété algébrique géométriquement intègre, de dimension d: on dit qu'elle est k-rationnelle si elle est k-birationnelle à l'espace affine $\mathbf{A}_k^d$, et stablement k-rationnelle si, pour m convenable, le produit $X \times_k \mathbf{A}_k^m$ est une variété k-rationnelle. En ces termes, la question devient: *une k-variété stablement k-rationnelle est-elle une variété k-rationnelle*? On retrouve l'expression initiale en considérant le corps des fonctions rationnelles $F = k(X)$ de la variété X, auquel cas $n = m + d$.

Cette question a été posée par Zariski pour $k = \mathbf{C}$ (voir [22]). Elle lui est encore attribuée, pour k quelconque, par plusieurs auteurs, dont Voskresenskiĭ qui s'est particulièrement intéressé au cas où X est un tore algébrique [26], [27].

Ce problème est évidemment très naturel du point de vue de la géométrie birationnelle: c'est le problème de la simplification par l'espace affine. Mais il intervient aussi sous d'autres formes et en d'autres occasions. Comme l'a montré Demazure [10], il est étroitement lié à l'étude des tores maximaux du groupe de Cremona $\mathrm{Cr}_{n,k}$ en n variables sur le corps k: une réponse négative signifie l'existence de sous-tores déployés maximaux de dimension $< n$. Il se pose aussi tout naturellement dans le cas de variétés algébriques dont on parvient à établir qu'elles sont stablement k-rationnelles sans savoir si elles sont k-rationnelles. C'est le cas sur $\mathbf{C}$ des variétés de modules $\mathscr{M}_g$ des courbes de genre g pour $3 \leq g \leq 6$ (voir [17]). C'est aussi le cas, si C est une courbe algébrique complexe projective et lisse de genre ≥ 2, des variétés de modules $\mathscr{S}\mathscr{U}_C(r, d)$ des fibrés vectoriels stables sur C, de rang r et déterminant, de degré d, donnés, pour $(r,d) = 1$ (implicite dans [21]). C'est encore le cas, pour k quelconque, de certains tores algébriques (on dispose d'un critère algébrique très simple [26], [27] pour décider si un tore est stablement k-rationnel): on sait, par exemple, que, pour les tores déployés par une extension cyclique K/k de degré n, la question de Zariski a, d'après [12], une réponse positive si $n = p^r$, mais, pour n quelconque, la réponse n'est déjà plus connue pour le tore dont le module des caractères est $\mathbf{Z}[\zeta_n]$.

Les théorèmes de Lüroth et de Castelnuovo donnent une réponse affirmative au problème de Lüroth pour $d = 1$ et k quelconque, et pour $d = 2$ et k algébriquement clos. Il en est de même a fortiori de la question de Zariski dans ces cas-là.

L'objet de cet article est de montrer que *le problème de Zariski a une réponse négative pour $d = 2$ et k non algébriquement clos convenable*, e.g. $k = \mathbf{Q}$, et qu'il a aussi *une réponse négative pour $k = \mathbf{C}$ et $d = 3$*.

De façon précise, soit k un corps parfait de caractéristique $\neq 2$. Si k admet une extension galoisienne de groupe $\mathfrak{S}_3$, nous construisons une k-surface stablement k-rationnelle, qui n'est pas k-rationnelle. Si k est algébriquement clos, nous construisons une k-variété de dimension 3 stablement rationnelle, mais non rationnelle. En termes algébriques, nous exhibons successivement une extension non pure F de k telle que $F(u_1, u_2, u_3) \simeq k(v_1, \ldots, v_5)$ et une extension non pure F de $\mathbf{C}$ telle que $F(u_1, u_2, u_3) \simeq \mathbf{C}(v_1, \ldots, v_6)$. On déduit alors de [10], p. 524, *l'existence d'un tore déployé maximal de dimension* 3 *dans* $\mathrm{Cr}_{5,k}$ *et* $\mathrm{Cr}_{6,\mathbf{C}}$ respectivement.

A l'inverse de ce qui s'est passé pour le problème de Lüroth (voir [4]), nous n'avons pas besoin de nouveau test de non-rationalité. Les techniques nécessaires existent déjà depuis plusieurs années. Pour k non algébriquement clos, il s'agit de travaux d'Iskovskih [15], [16] fondés sur la méthode des systèmes linéaires à points-bases, méthode qui remonte à Max Noether et qui fut utilisée pour la première fois sur un corps non algébriquement clos par B. Segre ([23], voir aussi [18] et [25]). Pour k algébriquement clos, les résultats utilisés sont dus à l'un des auteurs [2], [3]: le test d'irrationalité repose, dans son principe, sur les jacobiennes intermédiaires, et a été introduit par Clemens et Griffiths pour le problème de Lüroth [6], mais sa mise en oeuvre passe par une traduction en termes de variétés de Prym, selon une méthode inaugurée par Mumford dans le même contexte [19]. Dans tous les cas, ces diverses techniques sont fort élaborées.

Ce qui manquait, c'étaient des exemples de variétés stablement rationnelles auxquelles on puisse appliquer les tests de non-rationalité évoqués ci-dessus. Or de tels exemples, très simples comme on le verra, sont apparus dans une étude sur certaines surfaces fibrées en coniques [8], où trois des auteurs généralisent et précisent un travail bien antérieur de F. Châtelet ([5], voir aussi [18] et [7]).

Le plan de l'article est le suivant. On commence, au §0, par des rappels qu'il vaut mieux éviter en première lecture. Au §1, on construit des exemples de k-surfaces stablement k-rationnelles, dans le cas d'un corps k non algébriquement clos admettant une extension galoisienne de groupe $\mathfrak{S}_3$. Ces exemples dérivent de [8], mais nous avons adopté une présentation directe. Celle-ci donne lieu à des calculs certes très simples, mais assez peu lumineux. Il nous a donc semblé bon de décrire brièvement au §2 les motivations sous-jacentes. Le §2 contient également la démonstration, fondée sur les travaux d'Iskovskih, de la non-k-rationalité des exemples du §1, résultat que Coray et Tsfasman [9] savent aussi déduire de [25]. Au §3 enfin, on considère les surfaces du §1 dans le cas où k est le corps $k_0(t)$ des fractions rationnelles d'une variable à coefficients dans un corps algébriquement clos k_0. Une telle surface apparaît comme la fibre générique d'une fibration $X \to \mathbf{P}^1_{k_0}$ où X est une k_0-variété de dimension 3 qui est stablement k_0-rationnelle. Quitte à bien choisir les "coefficients", les techniques développées dans [2], [3] s'appliquent à une telle situation et permettent d'établir la non-k_0-rationalité de X.

0. Rappels et notations

Dans tout ce paragraphe, k désigne un corps, k_s une clôture séparable de k et $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ le groupe de Galois de k_s/k. Si X est une k-variété algébrique et A une k-algèbre commutative, on note $X_A = X \times_k A$ et $X(A)$ l'ensemble des points de X à valeurs dans A.

a) *Notions birationnelles*

Soient X et Y deux k-variétés algébriques intègres. On dit qu'elles sont k-birationnellement équivalentes, et on écrit $X \underset{k}{\sim} Y$, si leurs corps de fonctions rationnelles $k(X)$ et $k(Y)$ sont k-isomorphes, autrement dit s'il existe un k-isomorphisme $U \Rightarrow V$ d'un ouvert non vide U de X sur un ouvert V de Y.

Une k-variété intègre X est dite k-rationnelle si elle est k-birationnelle à l'espace affine $\mathbf{A}^d_k$-ou à l'espace projectif $\mathbf{P}^d_k$-de même dimension, autrement dit si $k(X)$ est k-isomorphe au corps de fractions rationnelles $k(t_1, \ldots, t_d)$. Elle est dite stablement k-rationnelle si, pour m et n convenables, $X \times_k \mathbf{A}^m_k \underset{k}{\sim} \mathbf{A}^n_k$, autrement dit si $k(X)(u_1, \ldots, u_m)$ est k-isomorphe à $k(v_1, \ldots, v_n)$. Une k-variété géométriquement intègre X est dite *rationnelle* si X_{k_s} est k_s-rationnelle, et *stablement rationnelle* si X_{k_s} est stablement k_s-rationnelle.

b) *La descente à la Weil*

Soit K/k une extension de corps, finie et séparable. Le groupe $\mathfrak{g}$ opère à gauche sur l'ensemble (fini) Σ des plongements de K/k dans k_s/k et le choix d'un plongement détermine une bijection $\mathfrak{g}$-équivariante $\Sigma \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ où

$\mathfrak{h} = \mathrm{Gal}(k_s/K)$. Soit X une K-variété algébrique. On note $R_{K/k}X$ la k-variété algébrique obtenue à partir de X par descente à la Weil de K à k. Elle est caractérisée par l'égalité fonctorielle en A:

(1)
$$(R_{K/k}X)(A) = X(A \otimes_k K),$$

où A est une k-algèbre commutative quelconque. En particulier:

$$(R_{K/k}X)(k) = X(K),$$

(2)
$$(R_{K/k}X)(k_s) = \prod_{\Sigma} X(k_s).$$

L'action de $\mathfrak{g}$ sur ce dernier produit est l'action naturelle compatible aux actions sur Σ et $X(k_s)$, à savoir, avec des notations évidentes: $(\gamma x)_{\gamma\sigma} = \gamma(x_\sigma)$, et le plongement naturel de $X(K)$ dans ce produit est donné par les divers plongements $\sigma \in \Sigma$. De plus, si Y est une k-variété:

(1′)
$$\mathrm{Hom}_k(Y, R_{K/k}X) = \mathrm{Hom}_K(Y_K, X).$$

Si X est une k-variété, on note encore $R_{K/k}X$ la k-variété $R_{K/k}X_K$ et on a un plongement naturel:

(3)
$$X \hookrightarrow R_{K/k}X$$

correspondant par (1′) à l'identité de X_K: c'est une k-immersion fermée qui s'interprète via (2) comme le plongement diagonal sur les points à valeurs dans k_s. Le choix d'une base $\{\alpha_i\}_{1 \le i \le n}$ de K sur k détermine un élément

$$\alpha(t_i) = t_1\alpha_1 + \cdots + t_n\alpha_n \in k[t_1, \ldots, t_n] \otimes_k K$$

(où $t_i\alpha_i$ désigne $t_i \otimes \alpha_i$) et définit ainsi, d'après (1)-(1′), un k-isomorphisme

(4)
$$\alpha\colon \mathbf{A}_k^n \xrightarrow{\sim} R_{K/k}\mathbf{A}^1.$$

Un point rationnel $(a_i) \in k^n$ a pour image $\alpha(a_i) = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n \in K$. Le foncteur $R_{K/k}$ commute au produit et transforme une immersion ouverte en une autre. On en déduit aussitôt: *si X est une variété K-rationnelle, $R_{K/k}X$ est une variété k-rationnelle.*

Soit K'/k une autre extension finie et séparable de corps et soit Σ' l'ensemble de ses plongements dans k_s/k. Si X est une k-variété, tout k-morphisme $\gamma\colon K \to K'$ induit un k-morphisme

(3′)
$$\gamma\colon R_{K/k}X \to R_{K'/k}X,$$

et un isomorphisme donne un isomorphisme. Sur les points rationnels, c'est le morphisme naturel $X(K) \overset{\gamma}{\hookrightarrow} X(K')$, et sur les points à valeurs dans k_s, c'est le morphisme $\prod_{\Sigma} X(k_s) \to \prod_{\Sigma'} X(k_s)$ déduit de la surjection $\Sigma' \to \Sigma$ définie par $\sigma' \mapsto \sigma' \circ \gamma$. Par exemple, si K/k est galoisienne de groupe G, tout $\gamma \in G$

définit un k-automorphisme de $R_{K/k}X$, encore noté γ: sur les points rationnels, c'est l'action naturelle sur $X(K)$, et sur les points à valeurs dans k_s, c'est l'action sur $\prod_\Sigma X(k_s)$ déduite de l'action à droite de G sur Σ. Soit Γ l'ensemble des k-plongements de K dans K'. Tout $\omega = \sum_{\gamma\in\Gamma} n_\gamma \gamma$, avec $n_\gamma \in \mathbf{N}$, définit un k-morphisme

$$\omega\colon R_{K/k}\mathbf{A}^1 \to R_{K'/k}\mathbf{A}^1, \tag{5}$$

qui prolonge multiplicativement (3′) et donne sur les points rationnels l'application $x \mapsto \prod_\Gamma \gamma(x)^{n_\gamma}$ et sur les points à valeurs dans k_s l'application $x \mapsto x'$ où $x'_{\sigma'} = \prod_\Gamma x^{n_\gamma}_{\sigma'\gamma}$. Si K/k est une sous-extension de K'/k, on a un k-morphisme

$$N_{K'/K}\colon R_{K'/k}\mathbf{A}^1 \to R_{K/k}\mathbf{A}^1, \tag{6}$$

qui induit la norme usuelle $K' \to K$ sur les points rationnels et qui s'interprète sur les points à valeurs dans k_s comme l'application $x' \mapsto x$ donnée par $x_\sigma = \prod_{\sigma'\to\sigma} x'_{\sigma'}$. Si α est le k-isomorphisme (4) défini par une base de K sur k, le k-morphisme composé $\omega\circ\alpha$ sera noté

$${}^{\omega}\alpha\colon \mathbf{A}^n_k \to R_{K'/k}\mathbf{A}^1. \tag{7}$$

Si $\gamma \in \Gamma$, le k-morphisme ${}^{\gamma}\alpha$ n'est autre que le morphisme associé à $\{\gamma(\alpha_i)\}$ de la même manière que α est associé à $\{\alpha_i\}$.

c) *Les tores*

On note $\mathbf{G}_{m,k}$ le groupe multiplicatif sur k: la variété sous-jacente est l'ouvert $t \neq 0$ de la droite affine $\mathbf{A}^1_k$ (par un abus qui sera constant par la suite, l'écriture $t \neq 0$ signifie "t inversible"). Un k-tore algébrique est un k-groupe algébrique qui devient isomorphe sur k_s à un produit (fini) de groupes multiplicatifs. Avec les notations de l'alinéa précédent, $R_{K/k}\mathbf{G}_m$ est un k-tore algébrique: la variété sous-jacente est l'ouvert $N_{K/k}(x) \neq 0$ de la k-variété $R_{K/k}\mathbf{A}^1 \simeq \mathbf{A}^n_k$ (comme il est clair sur k_s). Un caractère d'un k-tore algébrique T est un homomorphisme $T \to \mathbf{G}_{m,k}$ de k-tores algébriques. L'étude des k-tores algébriques s'appuie de façon essentielle sur l'existence d'une antiéquivalence de catégories, souvent appelée "dualité":

$$\begin{array}{rcl} k\text{-tores} & \leftrightarrow & \mathfrak{g}\text{-modules continus discrets } \mathbf{Z}\text{-libres de type fini} \\ T & \mapsto & \hat{T} \\ D(M) & \leftarrow\!\shortmid & M. \end{array}$$

A un k-tore T on associe le $\mathfrak{g}$-module $\hat{T}$ des caractères de T_{k_s}. Au $\mathfrak{g}$-module $\mathbf{Z}$-libre de type fini M on associe le k-tore $D(M)$ dont le groupe des points à valeurs dans une k-algèbre commutative A est

$$D(M)(A) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, (A \otimes_k k_s)^*).$$

Cette dualité transforme une suite exacte courte de $\mathfrak{g}$-modules $\mathbf{Z}$-libres de type fini $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ en une suite exacte de k-tores algébriques

$$1 \to D(M'') \to D(M) \to D(M') \to 1.$$

Il est immédiat que, dans cette dualité:

$$R_{K/k}\mathbf{G}_m \leftrightarrow \mathbf{Z}[\Sigma] \simeq \mathbf{Z}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}]$$

où $\mathbf{Z}[\Sigma]$ et $\mathbf{Z}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}]$ désignent respectivement les $\mathfrak{g}$-modules admettant pour $\mathbf{Z}$-base les $\mathfrak{g}$-ensembles Σ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, et où $\mathfrak{h} = \mathrm{Gal}(k_s/K)$ pour l'un quelconque des plongements de K/k dans k_s/k. Plus généralement, on appelle *$\mathfrak{g}$-module de permutation* un $\mathfrak{g}$-module $\mathbf{Z}$-libre de type fini qui possède une $\mathbf{Z}$-base permutée par $\mathfrak{g}$. Il s'écrit donc:

$$M \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{Z}[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_i]$$

où les $\mathfrak{h}_i$ sont des sous-groupes ouverts de $\mathfrak{g}$. Le dual $D(M)$ d'un tel $\mathfrak{g}$-module est appelé *tore quasi-trivial*. Il est donc de la forme:

$$T \simeq \prod_{i=1}^{n} R_{k_i/k}\mathbf{G}_m$$

où $k_i = k_s^{\mathfrak{h}_i}$ est le corps des invariants de k_s sous $\mathfrak{h}_i$. On en déduit (cf. b)): *un tore quasi-trivial est une variété k-rationnelle*. Un $\mathfrak{g}$-module $\mathbf{Z}$-libre de type fini M est dit *stablement de permutation* s'il existe deux $\mathfrak{g}$-modules de permutation P_1 et P_2 et un $\mathfrak{g}$-isomorphisme $M \oplus P_1 \simeq P_2$.

Si Γ est, avec les mêmes hypothèses qu'en b), l'ensemble des plongements d'une extension K/k dans une autre K'/k, tout $\omega = \sum_{\gamma \in \Gamma} n_\gamma \gamma$, avec $n_\gamma \in \mathbf{Z}$, définit, de façon analogue à (5), un k-morphisme

$$\omega\colon R_{K/k}\mathbf{G}_m \to R_{K'/k}\mathbf{G}_m, \tag{5'}$$

qu'on notera $x \mapsto \omega(x)$ ou ${}^{\omega}x$. Par exemple, si K/k est galoisienne finie de groupe G, tout $\omega \in \mathbf{Z}[G]$ définit ainsi un k-endomorphisme de $R_{K/k}\mathbf{G}_m$, dont on voit aisément que c'est le dual de l'endomorphisme de $\mathbf{Z}[G]$ défini par $1 \mapsto \omega$.

LEMME 1. *Si K/k est une extension finie et séparable, le k-tore $R_{K/k}\mathbf{G}_m/\mathbf{G}_m$ est une variété k-rationnelle.*

Le tore $R_{K/k}\mathbf{G}_m/\mathbf{G}_m$ est le quotient du tore $R_{K/k}\mathbf{G}_m$ par le sous-tore $\mathbf{G}_{m,k}$ plongé diagonalement via (3). Avec les notations introduites plus haut, son module des caractères est le module $I_\Sigma \simeq I_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ défini par la suite exacte:

$$0 \to I_\Sigma \to \mathbf{Z}[\Sigma] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

où ε est l'augmentation. Si l'on considère les plongements naturels et l'isomorphisme (4) défini par une base de K sur k:

$$\mathbf{G}_{m,k} \hookrightarrow R_{K/k}\mathbf{G}_m \hookrightarrow R_{K/k}\mathbf{A}^1 \simeq \mathbf{A}^n_k,$$

on voit que l'action de $\mathbf{G}_{m,k}$ par translations sur $R_{K/k}\mathbf{G}_m$ est induite par l'action diagonale naturelle sur $\mathbf{A}^n_k$. Le tore $R_{K/k}\mathbf{G}_m/\mathbf{G}_m$ s'identifie donc ainsi à un ouvert de $\mathbf{P}^{n-1}_k$.

Pour rendre plus directement compréhensible la lecture des diagrammes figurant au §1, nous désignerons souvent un k-tore T par le groupe $T(k)$ de ses points rationnels. Cet abus de notation est à éviter en général (un épimorphisme de tores n'induit pas en général une surjection sur les groupes des points rationnels), mais ici il n'y aura pas d'inconvénient. Voici quelques exemples de traductions:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_{m,k} & \longleftrightarrow & k^* \\ R_{K/k}\mathbf{G}_m & \longleftrightarrow & K^* \\ R_{K/k}\mathbf{G}_m/\mathbf{G}_m & \longleftrightarrow & K^*/k^*. \end{array}$$

d) *Torseurs*

Soient X une k-variété algébrique et S un k-groupe algébrique. On appelle torseur sur X sous S un espace principal homogène $\mathscr{T} \to X$ sous l'action de S, localement trivial pour la topologie étale sur X. Toute suite exacte de k-tores

$$1 \to T' \to T \to T'' \to 1$$

fait de T un torseur sur T'' sous l'action de T' par translations. Si $S \to S'$ est un morphisme de k-groupes algébriques, on note $\mathscr{T} \times {}^S S'$ le torseur sur X sous S' déduit de $\mathscr{T}$ par le changement de groupe structural $S \to S'$, et obtenu par produit contracté.

1. Construction de k-surfaces stablement k-rationnelles

La méthode utilisée pour établir la k-rationalité stable des surfaces X considérées dans ce paragraphe est la suivante. On construit un certain torseur $\mathscr{T} \to X$ dont le groupe structural est un tore S, et on établit successivement les résultats suivants:

S est une variété k-rationnelle;

le torseur $\mathscr{T} \to X$ admet une section, a fortiori $\mathscr{T} \underset{k}{\sim} X \times_k S$,

$\mathscr{T}$ est un ouvert d'une intersection de deux quadriques dont on prouve que c'est une variété k-rationnelle.

Le torseur $\mathscr{T} \to X$ est obtenu par changement de base à partir d'un torseur-type défini par une certaine suite exacte de tores qui fait l'objet d'une étude préliminaire.

a) *Constructions préparatoires*

On considère dans cet alinéa une extension galoisienne de corps K'/k, de groupe de Galois $G = \mathfrak{S}_3 = \langle \sigma, \tau \rangle$ avec $\sigma^2 = \tau^3 = 1$ et $\sigma\tau\sigma = \tau^2$. On a alors le diagramme suivant:

(8)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & K' \arrow[dl, dash, "\sigma"'] \arrow[dr, dash, "\tau"] & \\ K \arrow[dr, dash] & & k' \arrow[dl, dash] \\ & k & \end{tikzcd}$$

où $K = K'^{\sigma}$ et $k' = K'^{\tau}$.

Lemme 2. *Avec ces hypothèses et notations, on a une suite exacte de k-tores, définissant le tore* S:

(9)
$$1 \to S \underset{\mu}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} \mathbf{G}_{m,k} \times {}_k R_{K'/k}\mathbf{G}_m \underset{\lambda}{\overset{\eta}{\rightleftarrows}} R_{K/k}\mathbf{G}_m \to 1.$$

Cette suite est scindée, et elle se traduit sur les points rationnels par la suite exacte:

(9′)
$$1 \to S(k) \xrightarrow{\iota} k^* \times K'^* \xrightarrow{\eta} K^* \to 1.$$

La projection η, la section λ et la rétraction μ associée sont données par:

$$\eta(t, x) = t^{-1} \cdot N_{K'/K}(x)$$

$$\lambda(y) = \left(N_{K/k}(y)^{-1}, \tau(y)^{-1}\right)$$

$$\iota\mu(t, x) = \left(t^{-2} \cdot N_{K'/k}(x), t^{-1}x \cdot \tau\left(N_{K'/K}(x)\right)\right).$$

En résumé, les applications $\iota \cdot \lambda$ et (μ, η) définissent des isomorphismes réciproques:

(10)
$$S \times {}_k R_{K/k}\mathbf{G}_m \simeq \mathbf{G}_{m,k} \times {}_k R_{K'/k}\mathbf{G}_m.$$

La vérification est immédiate par dualité. On peut définir la suite (9) comme la suite duale de la suite exacte de G-modules $\mathbf{Z}$-libres de type fini:

(11)
$$0 \to \mathbf{Z}[G/\sigma] \underset{j}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}[G] \xrightarrow{f} \hat{S} \to 0$$

où i et j sont définies par:

$$\begin{aligned} i(1) &= (-1, 1+\sigma), \\ j(1,0) &= -(1+\tau+\tau^2), \\ j(0,1) &= -\tau. \end{aligned}$$

On vérifie aussitôt que $j \circ i$ est l'identité de $\mathbf{Z}[G/\sigma]$. On obtient ainsi, par dualité, $\eta = D(i)$ et $\lambda = D(j)$. Explicitons par exemple η: pour toute k-algèbre commutative A, le morphisme

$$\eta(A)\colon A^* \times (A \otimes_k K')^* \to (A \otimes_k K)^*$$

est donné par:

$$(t, x) \mapsto t^{-1} \cdot {}^{1+\sigma}x = t^{-1} \cdot N_{K'/K}(x).$$

Lemme 3. *On garde les mêmes hypothèses et notations et on considère le k-tore*

$$S' = R_{K/k}\big(R_{K'/K}\mathbf{G}_m/\mathbf{G}_{m,K}\big).$$

(i) *On a une suite exacte de k-tores*:

$$1 \to \mathbf{G}_{m,k} \xrightarrow{\beta} S \xrightarrow{\gamma} S' \to 1, \tag{12}$$

soit, sur les points rationnels:

$$1 \to k^* \xrightarrow{\beta} S(k) \xrightarrow{\gamma} K'^*/K^* \to 1. \tag{12'}$$

Via $\iota\colon S \hookrightarrow \mathbf{G}_{m,k} \times_k R_{K'/k}\mathbf{G}_m$, *les applications β et γ sont données par les formules (où l'on pose $\beta' = \iota\beta$ et $\gamma = \kappa\gamma'\iota$)*:

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= (t^2, t), \\ \gamma'(t, x) &= \tau^2(x^{-1}). \end{aligned}$$

(ii) *Les tores S et S' sont des variétés k-rationnelles, de dimension 4 et 3 respectivement.*

La suite exacte (12′) est définie par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & & K^* \arrow[r, equal] \arrow[d, "\lambda"'] & K^* \arrow[d, "\alpha"] & \\
1 \arrow[r] & k^* \arrow[r, "\beta''"] \arrow[d, equal] & k^* \times K'^* \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\mu"'] & K'^* \arrow[r] \arrow[d, "\kappa"] & 1 \\
1 \arrow[r] & k^* \arrow[r, "\beta"] & S(k) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] \arrow[u, bend right, "\iota"'] & K'^*/K^* \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd} \tag{13}$$

dans lequel λ, μ et γ' sont les applications définies plus haut, α et κ sont l'injection et la surjection naturelles, et $\beta''(t) = (t^{-1}, 1)$. Ceci définit les deux premières lignes du diagramme, et la dernière ligne en résulte par passage au quotient. On calcule alors β' via $\beta' = \iota\mu\beta''$.

La définition et la vérification de (13) se font par dualité et résultent de l'existence du diagramme commutatif suivant, formé de suites exactes de G-modules $\mathbf{Z}$-libres de type fini:

$$
(13')\qquad
\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \hat{S}' \arrow[r] \arrow[d] & \hat{S} \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\omega"', shift right] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}[G] \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "j'"'] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}[G] \arrow[r, "\pi"] \arrow[u, "f"', shift right, bend right] \arrow[d, "j"', shift right] & \mathbf{Z} \arrow[r] & 0 \\
& \mathbf{Z}[G/\sigma] \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbf{Z}[G/\sigma] \arrow[d] \arrow[u, "i"', shift right, bend right] & & \\
& 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

où

$$
\begin{aligned}
j'(1) &= 1, \\
i'(1) &= (0, -\tau^2), \\
\pi(a, b) &= -a,
\end{aligned}
$$

où j a été définie plus haut et où ω est caractérisée par $\omega \circ f = \mathrm{id} - i \circ j$, soit:

$$
\begin{aligned}
\omega \circ f(1,0) &= \big(-2, (1+\sigma)(1+\tau+\tau^2)\big), \\
\omega \circ f(0,1) &= (-1, 1+\tau+\tau\sigma).
\end{aligned}
$$

Le fait que S' est une variété k-rationnelle résulte du §0, b) et c), lemme 1. Le théorème 90 de Hilbert assure que le torseur défini par (12) est localement trivial pour la topologie de Zariski sur S', en particulier $S \underset{k}{\sim} S' \times_k \mathbf{G}_{m,k}$.

Remarque 1. On peut dire, avec quelques abus de notations, que S est le sous-tore de K'^* formé des x tels que $N_{K'/K}(x) \in k^*$. Autrement dit, en utilisant les notations introduites ci-après dans la démonstration du théorème 1, le tore S apparaît comme la sous-variété de l'espace affine $\mathbf{A}_k^6$, de coordonnées (U_i, V_i), $i = 1, 2, 3$, définie par:

$$\mathscr{X}^2 - a\mathscr{Y}^2 = Q(0,0; U_i, V_i) \in \mathbf{G}_{m,k} \hookrightarrow R_{K/k}\mathbf{G}_m.$$

C'est donc un ouvert de la sous-variété définie par le système:

$$(14)\qquad \begin{aligned} Q_2(0,0;U_i,V_i) &= 0 \\ Q_3(0,0;U_i,V_i) &= 0. \end{aligned}$$

Quant à S' c'est un ouvert de l'intersection de deux quadriques définie dans $\mathbf{P}_k^5$ par ce système homogène. On pourrait donc établir la k-rationalité de S' et de S comme pour les torseurs $\mathcal{T}'$ et $\mathcal{T}$ ci-après, en utilisant la proposition 1 de l'alinéa suivant.

b) *Le résultat principal*

Nous avons ainsi mis en place le matériel préparatoire pour la démonstration du théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$. On considère la k-surface affine X définie dans $\mathbf{A}_k^3$ de coordonnées x, y, z par l'équation*

$$(15)\qquad y^2 - az^2 = P(x) \neq 0,$$

où $P \in k[x]$ est un polynôme séparable et irréductible de degré 3, et où

$$a = \operatorname{disc}(P) \in k^*$$

est le discriminant de P. Sous ces hypothèses, la k-variété $X \times_k \mathbf{A}_k^3$ est k-birationnelle à $\mathbf{A}_k^5$.

La démonstration occupe le reste de ce paragraphe. Si a est un carré dans k^*, il est immédiat que X est k-birationnelle à $\mathbf{A}_k^2$. On supposera donc pour la suite que a n'est pas un carré dans k.

On note c le coefficient dominant de P (on pourrait en fait supposer $c = 1$). On note $K = k[x]/(P)$ et θ la classe de x dans K. On note $k' = k[x]/(x^2 - a)$ et $\sqrt{a}$ la classe de x dans k'. Les hypothèses sur a entraînent que la clôture galoisienne de K est le corps composé $K' = K \otimes_k k'$. On retrouve ainsi exactement la situation décrite par le diagramme (8) de l'alinéa précédent, et on en reprend toutes les notations: $G, \sigma, \tau, S, S', \ldots$. La démonstration comporte trois étapes.

1. *Construction des torseurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$.* Soit $A = H^0(X, \mathcal{O}_X)$ l'algèbre affine de X. Un k-morphisme de X dans $R_{K/k}\mathbf{G}_m$ n'est autre qu'un point de $R_{K/k}\mathbf{G}_m$ à valeurs dans A, i.e. un élément de $(A \otimes_k K)^*$ (cf. §0 b) (1)-(1')). L'élément $x \otimes 1 - 1 \otimes \theta$, noté abusivement

$$x - \theta \in (A \otimes_k K)^*,$$

définit donc un k-morphisme

$$(16)\qquad \phi\colon X \to R_{K/k}\mathbf{G}_m$$

qui n'est autre, sur les points rationnels, que le morphisme donné par:

$$\phi(x, y, z) = x - \theta \in K^*.$$

La suite exacte de k-tores

$$1 \to S \xrightarrow{\iota} \mathbf{G}_{m,k} \times {}_k R_{K'/k}\mathbf{G}_m \xrightarrow{\eta} R_{K/k}\mathbf{G}_m \to 1 \tag{9}$$

fait du tore médian un torseur sur la variété $R_{K/k}\mathbf{G}_m$ sous le tore S. De plus, ce torseur admet, d'après le lemme 2, une section λ.

Par changement de base via ϕ, on en déduit un torseur $\mathscr{T}$ sur X sous S. C'est le produit fibré de ϕ et de η:

$$\mathscr{T} = X \times_{R_{K/k}\mathbf{G}_m} (\mathbf{G}_{m,k} \times {}_k R_{K'/k}\mathbf{G}_m). \tag{17}$$

Autrement dit, avec des notations évidentes, c'est la sous-variété du produit $\mathbf{A}^3_k \times {}_k \mathbf{A}^1_k \times {}_k R_{K'/k}\mathbf{A}^1$, de coordonnées $(x, y, z; t; \xi)$, définie par les équations:

$$y^2 - az^2 = P(x) \neq 0 \tag{15}$$

$$t(x - \theta) = N_{K'/K}(\xi) \neq 0. \tag{18}$$

Le tore S agit sur $\mathscr{T}$ via le facteur de droite $\mathbf{G}_{m,k} \times {}_k R_{K'/k}\mathbf{G}_m$ sur lequel il opère par translations via ι. Un point de S est un point $(t_0; \xi_0)$ de $\mathbf{A}^1_k \times {}_k R_{K'/k}\mathbf{A}^1$ tel que:

$$N_{K'/K}(\xi_0) = t_0 \neq 0,$$

et il agit sur $\mathscr{T}$ par:

$$(t_0; \xi_0) \cdot (x, y, z; t; \xi) = (x, y, z; t_0 t; \xi_0 \xi).$$

Le torseur $\mathscr{T}$ admet une section ν, déduite de λ et donnée par:

$$\nu(x, y, z) = \left(x, y, z; N_{K/k}(x - \theta)^{-1}; {}^{\tau}(x - \theta)^{-1}\right). \tag{19}$$

On peut voir directement que $\nu(x, y, z)$ vérifie (18); ceci équivaut en effet à:

$$(x - \theta) \cdot {}^{-1-\tau-\tau^2}(x - \theta) = {}^{-(1+\sigma)\tau}(x - \theta),$$

ce qui résulte des égalités: $(1 + \sigma)\tau = \tau + \tau^2\sigma$ et ${}^{\sigma}(x - \theta) = x - \theta$. On a donc un k-isomorphisme $X \times {}_k S \simeq \mathscr{T}$ et, par suite, d'après le lemme 3 (ii):

$$X \times {}_k \mathbf{A}^4_k \underset{k}{\sim} \mathscr{T}.$$

On considère ensuite le torseur $\mathscr{T}'$ déduit de $\mathscr{T}$ par le changement de groupe structural $S \xrightarrow{\gamma} S'$ défini au lemme 3. C'est donc le torseur obtenu par passage au quotient à partir de $\mathscr{T}$ sous l'action de $\mathbf{G}_{m,k}$ opérant via β comme sous-groupe de S. D'après le lemme 3 qui décrit β et d'après la description ci-dessus de l'action de S sur $\mathscr{T}$, cette action de $\mathbf{G}_{m,k}$ est donnée par:

(20) $$t_0 \cdot (x, y, z; t; \xi) = (x, y, z; t_0^2 t; t_0 \xi).$$

Ce torseur $\mathscr{T}'$ admet pour section l'application induite par la section ν de $\mathscr{T}$. On obtient ainsi un k-isomorphisme:

$$X \times_k S' \simeq \mathscr{T}'$$

(équivariant pour l'action de S', mais cela n'importe pas ici). Comme, d'après le lemme 3 (ii), le tore S' est une variété k-rationnelle de dimension 3, on a donc:

(21) $$X \times_k \mathbf{A}_k^3 \underset{k}{\sim} \mathscr{T}'.$$

Pour établir le théorème, il suffit donc de prouver que $\mathscr{T}'$ est une variété k-rationnelle.

2. *Les variétés $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ comme intersections de deux quadriques.* Le torseur $\mathscr{T}$ est la sous-variété de l'espace $\mathbf{A}_k^4 \times_k R_{K'/k}\mathbf{A}^1$, de coordonnées $(x, y, z; t; \xi)$, définie par les équations (15) et (18). Avec les notations du §0 b), ces équations s'écrivent:

(15′) $$0 \neq {}^{1+\sigma}(y + z\sqrt{a}) = c \cdot {}^{1+\tau+\tau^2}(x - \theta),$$

(18′) $$0 \neq t(x - \theta) = {}^{1+\sigma}\xi,$$

où l'on considère $y + z\sqrt{a}$ comme une fonction, définie sur k, à valeurs dans $R_{k'/k}\mathbf{A}^1$ et $x - \theta$ comme une fonction, définie sur k, à valeurs dans $R_{K/k}\mathbf{A}^1 \hookrightarrow R_{K'/k}\mathbf{A}^1$. Compte tenu de (18′), l'équation (15′) équivaut à:

(15″) $$0 \neq {}^{1+\sigma}(y + z\sqrt{a}) = ct^{-3} \cdot {}^{(1+\sigma)(1+\tau+\tau^2)}\xi.$$

Introduisons alors deux nouvelles variables Y et Z, et considérons dans l'espace $\mathbf{A}_k^6 \times_k R_{K'/k}\mathbf{A}^1$, de coordonnées $(x, y, z, Y, Z; t; \xi)$, la sous-variété définie par les équations précédentes et par l'équation supplémentaire:

(22) $$Y + Z\sqrt{a} = (y + z\sqrt{a}) \cdot t^2 \cdot {}^{-1-\tau-\tau^2}\xi,$$

dont les deux membres sont des fonctions, définies sur k, à valeurs dans $R_{k'/k}\mathbf{A}^1$. Comme cette dernière équation détermine Y et Z, une fois les autres coordonnées connues, il est clair que cette nouvelle variété est k-isomorphe à la précédente par la projection $(x, y, z, Y, Z; t; \xi) \mapsto (x, y, z; t; \xi)$. Mais, compte tenu de (22), l'équation (15″) équivaut à:

(23′) $$0 \neq {}^{1+\sigma}(Y + Z\sqrt{a}) = ct.$$

A ce stade, $\mathscr{T}$ apparaît donc comme la sous-variété de $\mathbf{A}_k^6 \times_k R_{K'/k}\mathbf{A}^1$ définie par les équations (18′), (22) et (23′), en les inconnues x, y, z, Y, Z, t et ξ. Comme l'équation (22) détermine y et z, une fois les autres coordonnées connues, on peut oublier y, z et cette équation. Ainsi, $\mathcal{T}$ peut être définie, dans l'espace $\mathbf{A}_k^4 \times {}_kR_{K'/k}\mathbf{A}^1$, de coordonnées $(x, Y, Z; t; \xi)$, par les équations:

$$0 \neq t(x-\theta) = {}^{1+\sigma}\xi, \tag{18'}$$

$$0 \neq ct = Y^2 - aZ^2. \tag{23}$$

On voit aussitôt sur (22) que l'action de $\mathbf{G}_{m,k}$ sur $\mathcal{T}$ décrite initialement par (20) est donnée dans ce nouveau système de coordonnées par:

$$t_0 \cdot (x, Y, Z; t; \xi) = \left(x, t_0 Y, t_0 Z; t_0^2 t; t_0 \xi\right). \tag{20'}$$

Comme nous l'avons indiqué au §0 b), la base $\{1, \theta, \theta^2, \sqrt{a}, \theta\sqrt{a}, \theta^2\sqrt{a}\}$ de K' sur k définit un k-isomorphisme

$$\Theta\colon \mathbf{A}_k^6 \Rightarrow R_{K'/k}\mathbf{A}^1$$

par:

$$\Theta(U_i, V_i) = U_1 + U_2\theta + U_3\theta^2 + \left(V_1 + V_2\theta + V_3\theta^2\right)\sqrt{a},$$

où $i = 1, 2, 3$. Le changement de variables:

$$\xi = \Theta(U_i, V_i)$$

transforme donc l'équation (18′) en l'équation:

$$0 \neq t(x-\theta) = {}^{1+\sigma}\Theta(U_i, V_i). \tag{18''}$$

Si l'on introduit les formes linéaires:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(U_i, V_i) &= U_1 + U_2\theta + U_3\theta^2, \\ \mathcal{Y}(U_i, V_i) &= V_1 + V_2\theta + V_3\theta^2, \end{aligned} \tag{24}$$

définies sur k, à valeurs dans $R_{K/k}\mathbf{A}^1$, le second membre de (18″) s'écrit:

$${}^{1+\sigma}\Theta = \mathcal{X}^2 - a\mathcal{Y}^2.$$

On a ainsi réalisé $\mathcal{T}$ comme la sous-variété de $\mathbf{A}_k^{10}$, de coordonnées $(x, Y, Z; t; U_i, V_i)$, définie par les équations:

$$\begin{aligned} 0 \neq ct &= Y^2 - aZ^2, \\ 0 \neq t(x-\theta) &= \mathcal{X}^2 - a\mathcal{Y}^2, \end{aligned}$$

ou encore, de façon équivalente, par:

$$ct = Y^2 - aZ^2, \tag{25}$$

$$ctx = c(\mathcal{X}^2 - a\mathcal{Y}^2) + (Y^2 - aZ^2)\theta, \tag{26}$$

$$0 \neq (Y^2 - aZ^2)(\mathcal{X}^2 - a\mathcal{Y}^2). \tag{27}$$

Posons:

$$(24') \qquad Q(Y, Z; U_i, V_i) = c(\mathscr{X}^2 - a\mathscr{Y}^2) + (Y^2 - aZ^2)\theta.$$

D'après (24), c'est une forme quadratique, définie sur k, à valeurs dans $R_{K/k}\mathbf{A}^1$, et on peut l'écrire:

$$Q = Q_1 + Q_2\theta + Q_3\theta^2,$$

où les Q_i sont trois formes quadratiques ordinaires en les 8 variables Y, Z, U_i et V_i, à coefficients dans k (on peut penser au k-isomorphisme $\mathbf{A}_k^3 \Rightarrow R_{K/k}\mathbf{A}^1$ défini par $(W_i) \mapsto W_1 + W_2\theta + W_3\theta^2$).

Considérons alors la projection $\mathbf{A}_k^{10} \to \mathbf{A}_k^8$ qui consiste à oublier x et t. Il est clair qu'elle induit, en conservant (27), un k-isomorphisme de la variété définie par les équations (25) et (26), sur la sous-variété de $\mathbf{A}_k^8$ définie par:

$$(28') \qquad Q(Y, Z; U_i, V_i) \in \mathbf{A}_k^1 \hookrightarrow R_{K/k}\mathbf{A}^1,$$

et cette condition équivaut naturellement au système des deux équations:

$$(28) \qquad \begin{aligned} Q_2(Y, Z; U_i, V_i) &= 0, \\ Q_3(Y, Z; U_i, V_i) &= 0. \end{aligned}$$

Finalement, $\mathscr{T}$ est donc réalisée dans l'espace affine $\mathbf{A}_k^8$ comme l'ouvert de cette intersection de deux quadriques défini par (27). D'après (20′), et vu la linéarité de $\Theta(U_i, V_i)$, l'action de $\mathbf{G}_{m,k}$ sur $\mathscr{T}$ ainsi plongée dans $\mathbf{A}_k^8$ est donnée par:

$$(20'') \qquad t_0 \cdot (Y, Z; U_i, V_i) = (t_0 Y, t_0 Z; t_0 U_i, t_0 V_i).$$

La k-variété $\mathscr{T}'$, qui est le quotient de $\mathscr{T}$ par cette action, est donc k-isomorphe à la k-variété définie dans l'espace projectif $\mathbf{P}_k^7$ par le système *homogène* (28) et par l'inégalité (27). C'est donc un *ouvert*, par construction non vide, lisse et géométriquement intègre de dimension 5, de l'intersection des deux quadriques, définies sur k, d'équations $Q_2 = 0$ et $Q_3 = 0$. Quant à $\mathscr{T}$, c'est le cône affine projetant épointé de $\mathscr{T}'$.

3. *k-rationalité de $\mathscr{T}$ et de $\mathscr{T}'$.* Pour étudier les propriétés géométriques de l'intersection de deux quadriques définie par (28), il est commode d'en écrire d'autres équations sur la clôture algébrique $\bar{k}$ de k. Soient θ_1, θ_2 et θ_3 les racines de P dans $\bar{k}$, et $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ les racines carrées de a. On note Θ_j et $\Theta'_j \in \bar{k}[U_i, V_i]$, puis $Q'_j \in \bar{k}[Y, Z, U_i, V_i]$, les images respectives de Θ, ${}^\sigma\Theta$ et Q par $\theta \mapsto \theta_j$, pour $j = 1, 2, 3$. On note enfin $L = Y + Z\sqrt{a}$ et $L' = Y - Z\sqrt{a}$. On a donc en particulier:

$$Q'_j = Q_1 + Q_2\theta_j + Q_3\theta_j^2 = c\Theta_j\Theta'_j + \theta_j LL'.$$

Le système (28) équivaut donc, sur $\bar{k}$, au système:

$$(28'') \quad \begin{aligned} Q_2'' &:= Q_2' - Q_1' = -c\Theta_1\Theta_1' + c\Theta_2\Theta_2' + (\theta_2 - \theta_1)LL' = 0, \\ Q_3'' &:= Q_3' - Q_1' = -c\Theta_1\Theta_1' + c\Theta_3\Theta_3' + (\theta_3 - \theta_1)LL' = 0. \end{aligned}$$

Les 8 formes linéaires Θ_j, Θ_j', L et L' sont indépendantes et peuvent donc remplacer sur $\mathbf{A}^8_{\bar{k}}$ le système de coordonnées initial $(Y, Z; U_i, V_i)$. Un calcul immédiat montre alors que toute forme quadratique du pinceau engendré sur $\bar{k}$ par Q_2'' et Q_3'' est une forme quadratique de rang ≥ 6, et en général de rang 8. Les équations (28) définissent donc une intersection pure, géométriquement intègre, de deux quadriques, de dimension 5 dans $\mathbf{P}^7_k$ (pour ce genre d'énoncé, voir [8]). En fait, on a mieux: en écrivant la matrice jacobienne de (28″), on voit que les seuls points singuliers de (28) sur $\bar{k}$ sont les 8 sommets du nouveau polyèdre de référence. En particulier, la variété définie par (28) n'est pas un cône.

Par ailleurs, il résulte aussitôt de (24), (24′) et (28′), que la k-variété définie par (28) dans $\mathbf{P}^7_k$ contient la droite k-rationnelle définie par:

$$Y = Z = U_2 = U_3 = V_2 = V_3 = 0.$$

Or, on a le critère suivant:

PROPOSITION 1. *Soit X une intersection pure géométriquement intègre de deux quadriques dans $\mathbf{P}^n_k$ pour $n \geq 4$. Si X contient une droite k-rationnelle qui n'est pas contenue dans le lieu singulier de X, et si X n'est pas un cône, alors X est k-birationnelle à l'espace projectif $\mathbf{P}^{n-2}_k$.*

Nous indiquons seulement une esquisse de démonstration (voir [8] pour les détails algébriques). Tout 2-plan passant par la droite k-rationnelle donnée Δ coupe chaque quadrique en Δ et une droite résiduelle, et ces deux droites résiduelles se coupent en général en un seul point, ce qui définit une correspondance k-birationnelle entre X et l'espace $\mathbf{P}^{n-2}_k$ des 2-plans passant par Δ.

Ainsi, $\mathcal{T}'$ est k-isomorphe à l'ouvert dense, défini par (27), de l'intersection géométriquement intègre de deux quadriques définie dans $\mathbf{P}^7_k$ par le système (28). Cette intersection vérifie les hypothèses de la proposition 1. Elle est donc k-birationnelle à $\mathbf{P}^5_k$. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

Exemples **1.** On peut prendre pour k le corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels et pour X la $\mathbf{Q}$-surface d'équation affine:

$$(29) \quad y^2 + 3z^2 = x^3 - 2.$$

2. On peut prendre pour k le corps $k_0(t)$ des fractions rationnelles d'une variable t à coefficients dans un corps k_0 de caractéristique $\neq 2$. Le cas particulièrement intéressant est celui où k_0 est algébriquement clos, par exemple le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Le théorème 1 prend alors la forme suivante:

THÉORÈME 1'. *Soient $k_0(t)$ le corps des fractions rationnelles en une variable t à coefficients dans le corps k_0 de caractéristique $\neq 2$ et $P(t,x) \in k_0[t,x]$. On suppose P séparable, irréductible et de degré 3, comme polynôme en x à coefficients dans $k_0(t)$. Soit X la k_0-variété de dimension 3 définie par l'équation affine*

$$y^2 - a(t)z^2 = P(t,x), \tag{30}$$

en les variables x, y, z, t. On suppose:

$$a(t) = \operatorname{disc}_x P.$$

Alors, la k_0-variété X est stablement k_0-rationnelle, et de façon précise:

$$X \times_{k_0} \mathbf{A}^3_{k_0} \underset{k_0}{\sim} \mathbf{A}^6_{k_0}.$$

Il suffit d'appliquer le théorème 1 à la fibre générique de la projection $X \to \mathbf{A}^1_{k_0}$ définie par t. Cette fibre générique est une $k_0(t)$-surface justiciable du théorème 1 pour $k = k_0(t)$.

Ce théorème 1' sera utilisé de façon essentielle au §3.

2. Motivations

L'objet de ce paragraphe est d'indiquer, dans ses grandes lignes, la problématique qui nous a conduits à la considération et à l'étude des surfaces du §1. Le §3 est indépendant et peut être lu directement.

Dans ce paragraphe, k désigne un corps *parfait* et *infini* et $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. On note $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Si X est une k-variété algébrique, on note $\bar{X} = X \times_k \bar{k}$.

a) *Un invariant k-birationnel.* L'énoncé qui suit fournit un invariant k-birationnel qui joue un rôle important dans l'étude de certaines variétés.

PROPOSITION 2. *Soit X une k-variété algébrique, propre, lisse et géométriquement intègre. Si X est stablement k-rationnelle, alors le $\mathfrak{g}$-module* $\operatorname{Pic} \bar{X}$, *qui est $\mathbf{Z}$-libre de type fini, est stablement de permutation.*

Pour le cas d'une surface k-rationnelle, voir Manin [18, chap. IV, 7.3]. Pour le cas d'une variété k-rationnelle de dimension arbitraire, voir Voskresenskiĭ [27, chap. V, §5]. On peut en fait donner une démonstration simple qui n'utilise pas la résolution des singularités. Pour étendre le résultat au cas où X est stablement

k-rationnelle, il suffit d'utiliser l'isomorphisme naturel:

$$\operatorname{Pic} X \oplus \operatorname{Pic} Y \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}(X \times_k Y),$$

qui vaut si X et Y sont lisses et si Y est k-rationnelle (se ramener à l'invariance homotopique $\operatorname{Pic} A \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic} A[t]$ lorsque A est un anneau régulier).

b) *Les torseurs universels.* Soit X une k-variété algébrique propre, lisse et géométriquement intègre. On suppose X *rationnelle* (mais non nécessairement k-rationnelle!). Le $\mathfrak{g}$-module $\operatorname{Pic} \bar{X}$ est alors $\mathbf{Z}$-libre de type fini. On peut donc considérer le k-tore dual S_0 (voir §0 c)). On a alors une application naturelle:

$$H^1_{\text{ét}}(X, S_0) \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(\hat{S}_0, \operatorname{Pic} \bar{X}),$$

définie comme suit: soit $[\mathcal{T}]$ la classe dans $H^1_{\text{ét}}(X, S_0)$ d'un torseur $\mathcal{T}$ sur X sous S_0; notons χ: $\bar{S}_0 \to \mathbf{G}_{m,\bar{k}}$ un caractère arbitraire de $\bar{S}_0$; l'application ci-dessus associe à $[\mathcal{T}]$ l'homomorphisme $\chi \mapsto [\mathcal{T}_\chi] \in H^1_{\text{ét}}(\bar{X}, \mathbf{G}_m) = \operatorname{Pic} \bar{X}$, où $\mathcal{T}_\chi$ est le produit contracté $\bar{\mathcal{T}} \times^{\bar{S}_0} \bar{\mathbf{G}}_m$ de $\bar{\mathcal{T}}$ et de $\mathbf{G}_{m,\bar{k}}$ sous $\bar{S}_0$ via χ. On appelle *torseur universel* sur X (voir [7] II C) tout torseur $\mathcal{T}$ sur X sous S_0 dont l'image par l'application ci-dessus est l'application identité de $\hat{S}_0 = \operatorname{Pic} \bar{X}$. Lorsque X possède un point k-rationnel, il existe sur X des torseurs universels, et il en existe même ayant des points k-rationnels (voir [7] II C et D).

La propriété fondamentale de ces torseurs universels, qui, par construction, sont des k-variétés rationnelles, lisses et géométriquement intègres, est la suivante:

Théorème [7]. *Soit X une k-variété rationnelle, propre, lisse et géométriquement intègre. Soient $\mathcal{T}$ un torseur universel sur X et $\mathcal{T}_c$ une k-compactification lisse de $\mathcal{T}$. Le $\mathfrak{g}$-module* $\operatorname{Pic} \bar{\mathcal{T}}_c$ *est un module de permutation.*

Autrement dit, le passage de X à un torseur universel $\mathcal{T}$ a pour effet de "tuer" l'obstruction à la k-rationalité fournie par la proposition 2.

On est alors amené à se poser les questions suivantes (voir [7]), à propos d'une k-surface rationnelle X (propre, lisse et géométriquement intègre) qui possède un point rationnel:

(A) Si $\operatorname{Pic} \bar{X}$ est stablement de permutation, X est-elle k-rationnelle?

(B) Si $\operatorname{Pic} \bar{X}$ est stablement de permutation, X est-elle stablement k-rationnelle?

(C) Si $\mathcal{T}$ est un torseur universel, sur X, qui possède un point rationnel, est-ce une variété k-rationnelle?

On doit noter que, pour $\dim X = 3$, des exemples simples montrent, déjà pour $k = \mathbf{R}$, que la réponse à ces trois questions est négative (voir [7]). En revanche, si X est une k-compactification lisse d'un tore algébrique de dimension d quelconque, la réponse aux questions (B) et (C) est positive, et la question (A) constitue le problème de Zariski pour les tores, problème qui reste ouvert (la réponse est connue pour $d = 2$ (Voskresenskiĭ) et $d = 3$ (Kunjavskiĭ)).

La relation entre les questions (B) et (C) est fournie par la proposition suivante:

PROPOSITION 3. *Soit X une k-variété rationnelle, propre, lisse et géométriquement intègre. Si X possède un torseur universel $\mathcal{T}$ qui soit une variété k-rationnelle, et si le* $\mathfrak{g}$*-module* $\operatorname{Pic}\overline{X}$ *est stablement de permutation, alors X est stablement k-rationnelle.*

Autrement dit, une réponse positive à (C) implique une réponse positive à (B).

Démonstration. Si le $\mathfrak{g}$-module $\operatorname{Pic}\overline{X}$ est stablement de permutation, il existe deux $\mathfrak{g}$-modules de permutation P_1 et P_2 et un $\mathfrak{g}$-isomorphisme:

$$\operatorname{Pic}\overline{X} \oplus P_1 \simeq P_2.$$

On en déduit, par dualité, un k-isomorphisme:

$$S_0 \times_k T_1 \simeq T_2,$$

où T_1 et T_2 sont deux k-tores algébriques quasi-triviaux. Soit $\eta = \operatorname{Spec} k(X)$ le point générique de X. D'après le théorème 90 de Hilbert, $H^1_{\text{ét}}(\eta, T_i) = 0$ pour $i = 1, 2$, et par suite:

$$H^1_{\text{ét}}(\eta, S_0) = 0.$$

En particulier, le torseur $\mathcal{T}$ admet une section au-dessus d'un ouvert (de Zariski) non vide de X. On en déduit successivement:

$$X \times_k S_0 \underset{k}{\sim} \mathcal{T},$$

$$X \times_k T_2 \underset{k}{\sim} \mathcal{T} \times_k T_1.$$

Ceci achève la démonstration, car $\mathcal{T}$ est k-rationnelle par hypothèse, et T_1 et T_2 sont des variétés k-rationnelles, en tant que k-tores quasi-triviaux (voir §0 c)).

c) *Surfaces fibrées en coniques k-irrationnelles.* Une classe importante de k-surfaces rationnelles est constituée par les surfaces fibrées en coniques sur $\mathbf{P}^1_k$. Suivant la terminologie de Manin et d'Iskovskih, on appelle k-surface rationnelle fibrée en coniques *standard* la donnée d'une k-surface X, propre, lisse et géométriquement connexe, et d'un k-morphisme π: $X \to \mathbf{P}^1_k$ qui soit relativement minimal (autrement dit, on ne peut rien contracter, sur k, dans les fibres de π) et dont la fibre générique soit une conique lisse. Une fibre de π sur $\bar{k}$ est alors, soit une conique lisse, soit un couple de courbes exceptionnelles de première espèce qui se coupent transversalement en un point. Le nombre de fibres dégénérées sur $\bar{k}$ est donné par la formule:

$$r = 8 - (\omega_X \cdot \omega_X),$$

où ω_X désigne la classe du fibré inversible canonique sur X (voir [14]).

En utilisant la méthode des systèmes linéaires à points bases, Iskovskih a établi le résultat de non-k-rationalité suivant:

THÉORÈME (Iskovskih). *Soit π: $X \to \mathbf{P}_k^1$ une k-surface rationnelle fibrée en coniques standard. Si X possède au moins* 4 *fibres géométriques dégénérées, alors X n'est pas k-rationnelle.*

Dans cet énoncé, "géométrique" signifie "sur $\bar{k}$". Ce théorème a été obtenu en plusieurs étapes: pour $r \geq 8$, voir [14], théorème 1.6; pour $r = 5, 6, 7$, voir [15]; enfin, pour $r = 4$, voir [16], proposition 3 et remarque annexe.

On dispose ainsi d'un test de non-k-rationalité supplémentaire pour ce type particulier de surface, indépendant de celui que fournit la proposition 2 ci-dessus. Nous allons l'utiliser pour montrer que la réponse à la question (A) posée en b) à propos des surfaces rationnelles est *négative*. Il suffit de trouver une k-surface fibrée en coniques standard pour laquelle $r \geq 4$ et telle que Pic $\bar{X}$ soit stablement de permutation.

Si Pic $\bar{X}$ est stablement de permutation, $H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic} \bar{X}) = 0$ d'après le lemme de Shapiro. Le théorème 2.6 de [14] montre qu'une telle situation impose qu'il y ait au plus 2 points fermés de $\mathbf{P}_k^1$ en lesquels la fibre de π soit dégénérée. De fait, on a le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *On suppose k de caractéristique $\neq 2$. Soit $P \in k[x]$ un polynôme irréductible de degré impair $p > 1$, tel que la clôture galoisienne K' de $K = k[x]/(P)$ soit diédrale de groupe D_p. Soit $k' = k(\sqrt{a})$ la sous-extension quadratique de K'/k. Soit alors X un k-modèle propre et lisse de la k-surface affine d'équation*:

$$y^2 - az^2 = P(x). \tag{31}$$

Cette variété X est une k-surface rationnelle qui possède un point rationnel. Le $\mathfrak{g}$-module Pic $\bar{X}$ *est stablement de permutation. Pourtant, X n'est pas k-rationnelle.*

On peut naturellement se demander si X est stablement k-rationnelle. C'est précisément ce qu'on a su prouver au §1 pour $p = 3$.

Démonstration. Soient σ le générateur de $\mathrm{Gal}(K'/K) = \mathbf{Z}/2$ et τ un générateur de $\mathrm{Gal}(K'/k') \simeq \mathbf{Z}/p$. On a le diagramme de corps:

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & K' \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\
K \arrow[dr] & & k' \arrow[dl] \\
 & k &
\end{tikzcd} \tag{8'}
$$

tout analogue à (8). Le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(K'/k) = D_p$ est engendré par σ et τ, soumis aux relations $\sigma^2 = \tau^p = 1$ et $\sigma\tau\sigma = \tau^{-1}$.

Pour établir le théorème, on a le choix du modèle X. Nous allons prendre pour X la k-surface obtenue par recollement des deux surfaces X_1 et X_2 suivantes:

X_1 est la k-surface définie dans l'espace $\mathbf{P}^2_k \times_k \mathbf{A}^1_k$, de coordonnées $(y, z, t; \lambda)$, par l'équation

$$y^2 - az^2 - P(\lambda)t^2 = 0;$$

X_2 est la k-surface définie dans l'espace $\mathbf{P}^2_k \times_k \mathbf{A}^1_k$, de coordonnées $(Y, Z, T; \mu)$, par l'équation

$$Y^2 - aZ^2 - Q(\mu)T^2 = 0,$$

où Q désigne le polynôme défini par

$$Q(\mu) = \mu^{p+1} \cdot P(1/\mu).$$

Quant au recollement, il est défini comme suit:

$$\begin{aligned} X_1 - \{\lambda = 0\} &\Rightarrow X_2 - \{\mu = 0\} \\ (y, z, t; \lambda) &\mapsto (\lambda^{-(p+1)/2}y, \lambda^{-(p+1)/2}z, t; \lambda^{-1}). \end{aligned}$$

Les projections de X_1 et X_2 sur $\mathbf{A}^1_k$ définies respectivement par λ et μ se recollent ainsi en un k-morphisme π: $X \to \mathbf{P}^1_k$. On vérifie immédiatement que X est propre et lisse sur k, et que la fibration π est relativement minimale et fait de X une k-surface rationnelle fibrée en coniques standard. On trouve $r = p + 1$ fibres géométriques dégénérées, à savoir celles qui correspondent aux p racines de P et la fibre à l'infini qui correspond à $\mu = 0$. Le point singulier de cette fibre à l'infini, de coordonnées $(Y, Z, T; \mu) = (0, 0, 1; 0)$, est un point rationnel de X. Ainsi, $X(k) \neq \varnothing$ et, comme $r = p + 1 \geq 4$, le théorème d'Iskovskih assure que X n'est pas k-rationnelle.

Il reste à établir que le $\mathfrak{g}$-module $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ est stablement de permutation. De façon précise, on va montrer l'existence d'un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules:

$$\mathrm{Pic}\,\overline{X} \oplus \mathbf{Z}[G/\sigma] \simeq \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G/\tau]. \tag{32}$$

Dans cette écriture on a choisi implicitement un plongement de K' dans $\bar{k}$, ce qui détermine la présentation $G = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ où $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/K')$. On fixe un tel plongement pour la suite. On note θ_i, pour $i = 1, \ldots, p$, les racines de P dans K' et $\sqrt{a}$ une racine carrée de a dans k'. On numérote les θ_i de telle sorte que $\theta_1 = \theta \in K^*$ et $\theta_{i+1} = \tau^i(\theta_1)$. On considère alors les diviseurs de X suivants:

D_i défini dans la carte X_1 par $\lambda = \theta_i$ et $y = z\sqrt{a}$,
D_i' défini de même en remplaçant $\sqrt{a}$ par $-\sqrt{a}$,
D_∞ défini dans la carte X_2 par $\mu = 0$ et $Y = Z\sqrt{a}$,
D_∞' défini de même en remplaçant $\sqrt{a}$ par $-\sqrt{a}$,
F_∞ $(= D_\infty + D_\infty')$ la fibre de X_2 au point à l'infini $\mu = 0$,
Σ la section de $\bar{\pi}$ définie dans la carte X_1 par $\lambda \mapsto (\sqrt{a}, 1, 0; \lambda)$,
Σ' la section définie de même en remplaçant $\sqrt{a}$ par $-\sqrt{a}$.

On note respectivement d_i, d_i', d_∞, d_∞', f, s et s', les classes de ces diviseurs dans $\operatorname{Pic} \overline{X}$. Il est facile de vérifier que le groupe abélien $\operatorname{Pic} \overline{X}$ est engendré par les classes d_i (pour $i = 1, \ldots, p$), d_∞, f et s. L'assertion (32) résulte du fait que la suite de G-modules définie ci-après est exacte et scindée:

(33)
$$0 \to \mathbf{Z}[G/\sigma] \underset{j}{\overset{v}{\rightleftarrows}} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}[G] \oplus \mathbf{Z}[G/\tau] \xrightarrow{\kappa} \operatorname{Pic} \overline{X} \to 0$$

$$v(1) = (1, -1 - \sigma, 0)$$

$$\kappa(1,0,0) = f,$$

$$\kappa(0,1,0) = d_1,$$

$$\kappa(0,0,1) = s$$

$$j(1,0,0) = 1 + \tau + \cdots + \tau^{p-1},$$

$$j(0,1,0) = \tau + \cdots + \tau^{(p-1)/2},$$

$$j(0,0,1) = 0.$$

On peut interpréter le terme du milieu comme le sous-G-module de $\operatorname{Div} \overline{X}$ engendré par D_1, F_∞ et Σ. Le terme de gauche apparaît alors comme le sous-module des diviseurs principaux, engendré par le diviseur de la fonction $\lambda - \theta_1$. Le fait que κ soit surjective résulte du calcul de diviseur suivant:

$$\operatorname{div}\big((y - z\sqrt{a})/t\big) = D_1 + \cdots + D_p + D_\infty + \Sigma - \Sigma' - ((p+1)/2)F_\infty.$$

Un calcul immédiat donne: $\kappa \circ v = 0$ et $j \circ v = \mathrm{id}$. Il reste à vérifier l'exactitude au centre de la suite (33). Etant donnée une relation de dépendance linéaire:

$$\alpha_1 d_1 + \cdots + \alpha_p d_p + \alpha_1' d_1' + \cdots + \alpha_p' d_p' + \beta s + \beta' s' + \gamma f = 0$$

dans Pic $\overline{X}$, avec α_i, α_i', β, β' et $\gamma \in \mathbf{Z}$, on obtient aussitôt:

$$\beta = 0 \quad \text{par intersection avec } d_\infty,$$

$$\beta' = 0 \quad \text{par intersection avec } d'_\infty,$$

puis:

$$-\alpha_i + \alpha_i' = 0 \quad \text{par intersection avec } d_i,$$

enfin:

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_p + \gamma = 0 \quad \text{par intersection avec } s.$$

Ceci montre qu'en termes de diviseurs le noyau de κ est engendré sur $\mathbf{Z}$ par les $(D_i + D_i' - F_\infty)$, ce qui achève d'établir que la suite (33) est exacte et scindée, et termine donc la démonstration du théorème.

Remarque 2. On conserve les hypothèses et notations du théorème 2. Nous allons montrer que $X_{k'}$ *est k'-rationnelle* et que X_K *est K-rationnelle* aussi. Pour $X_{k'}$, c'est immédiat sur l'équation

$$(y + z\sqrt{a})(y - z\sqrt{a}) = P(x).$$

Pour X_K, on écrit l'équation sous la forme:

$$\begin{aligned} y^2 - az^2 &= c(x-\theta)\prod_{i=1}^{p-1}\left(x - \tau^i(\theta)\right) \\ &= c(x-\theta)\prod_{i=1}^{(p-1)/2}\left(x - \tau^i(\theta)\right)\left(x - \sigma\tau^i(\theta)\right) \\ &= c(x-\theta)\left(u(x)^2 - av(x)^2\right), \end{aligned}$$

où $\theta = \theta_1$ est la classe de x dans $K = k[x]/(P)$ et où $u(x), v(x) \in K[x]$ et $c \in k^*$. On utilise alors le changement de variables, défini sur K:

$$Y + Z\sqrt{a} = (y + z\sqrt{a})/(u(x) + v(x)\sqrt{a}).$$

On en déduit que X_K est K-birationnelle à la surface d'équation:

$$Y^2 - aZ^2 = c(x - \theta),$$

qui est évidemment K-rationnelle. On voit donc que la surface rationnelle X du théorème 2 est un exemple de *k-surface qui devient F-rationnelle sur des extensions* finies *F/k de degrés premiers entre eux, et qui*, pourtant, *n'est pas k-rationnelle.*

Remarque 3. On garde les mêmes hypothèses. D'après la remarque précédente et la proposition 2, le G-module Pic $\overline{X}$ = Pic $X_{K'}$ est stablement de permutation à la fois comme $\langle\sigma\rangle$-module et comme $\langle\tau\rangle$-module. En particulier:

$$H^1(\langle\sigma\rangle, \operatorname{Pic}\overline{X}) = H^1(\langle\tau^i\rangle, \operatorname{Pic}\overline{X}) = 0,$$

pour tout i. Comme les sous-groupes de Sylow de $G = D_p$ sont conjugués de $\langle\sigma\rangle$ ou d'un $\langle\tau^i\rangle$, on en déduit:

(34) $$H^1(H, \operatorname{Pic}\overline{X}) = 0 \text{ pour tout sous-groupe } H \text{ de } G.$$

Comme les sous-groupes de Sylow de G sont *cycliques*, la condition (34) implique, d'après un théorème d'Endo et Miyata ([13], théorème 1.5), que le G-module $\operatorname{Pic}\bar{X}$ est facteur direct d'un G-module de permutation. Des résultats plus précis d'Endo et Miyata ([13], théorème 3.3) montrent que, pour $G = D_p$ et p premier, si le nombre de classes de $\mathbf{Z}[\zeta_p + \zeta_p^{-1}]$ vaut 1, alors la condition (34) implique même que le G-module $\operatorname{Pic}\bar{X}$ est stablement de permutation. En particulier, pour $p = 3$, la remarque 2 et les résultats d'Endo et Miyata montrent a priori que le G-module $\operatorname{Pic}\bar{X}$ est stablement de permutation, sans qu'il soit nécessaire de faire un calcul explicite comme dans la démonstration du théorème 2.

Remarque 4. De fait, pour $p = 3$, c'est en vue du théorème 1 qu'on a besoin de faire des calculs explicites. La suite exacte scindée (11) qui est à la source des calculs du §1 n'est autre qu'une simplification de la suite (33): on voit en effet que dans celle-ci les applications v et j évitent le facteur $\mathbf{Z}[G/\tau]$ dans le terme médian. Ainsi, avec les notations du §1:

$$\operatorname{Pic}\bar{X} = \hat{S} \oplus \mathbf{Z}[G/\tau],$$
$$S_0 = S \times {}_k R_{k'/k}\mathbf{G}_m,$$

et la suite exacte de k-tores duale de (33):

$$1 \to S_0 \to \mathbf{G}_{m,k} \times {}_k R_{K'/k}\mathbf{G}_m \times {}_k R_{k'/k}\mathbf{G}_m \to R_{K/k}\mathbf{G}_m \to 1 \tag{35}$$

n'est autre que la suite (9) dont on a multiplié les deux premiers termes par $R_{k'/k}\mathbf{G}_m$.

Remarque 5. Il existe une situation plus large que celle décrite dans le théorème 2 pour laquelle on a encore une suite exacte de $\mathfrak{g}$-modules:

$$0 \to P_1 \xrightarrow{v} P_2 \xrightarrow{\kappa} \operatorname{Pic}\bar{X} \to 0, \tag{36}$$

avec P_1 et P_2 de permutation comme dans la suite (33). C'est en effet le cas pour un modèle propre et lisse convenable X de la k-surface affine d'équation:

$$y^2 - az^2 = P(x), \tag{37}$$

lorsque P est un polynôme non nul de degré *impair* et $a \in k^*$. Pour le vérifier, on peut se limiter au cas où a n'est pas un carré dans k^* et où P est sans facteur carré. On construit alors X exactement comme dans la démonstration du théorème 2. Soient n le degré de P et θ_i, pour $i = 1, \ldots, n$, les racines de P dans $\bar{k}$. On prend pour P_2 le sous-$\mathfrak{g}$-module de $\operatorname{Div}\bar{X}$ qui a pour $\mathbf{Z}$-base les diviseurs $D_1, \ldots, D_n$, $D'_1, \ldots, D'_n$, Σ, Σ' et F_∞, avec les mêmes définitions qu'au théorème 2. On prend pour P_1 le sous-$\mathfrak{g}$-module de P_2 formé des diviseurs principaux. On vérifie qu'il admet pour $\mathbf{Z}$-base les diviseurs $D_i + D'_i - F_\infty$ des fonctions $x - \theta_i$.

On en déduit que P_1 est aussi un $\mathfrak{g}$-module de permutation. Quant à v et κ, ce sont les morphismes naturels évidents.

Dans le cas particulier du théorème 2, le fait supplémentaire et essentiel est l'existence d'une rétraction j. De fait, c'est une conséquence a priori, sans calcul explicite, de la propriété (34) et du fait que G a ses sous-groupes de Sylow cycliques. Ceci implique en effet la même propriété (34) pour le G-module $(\operatorname{Pic} \overline{X})^0 = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\operatorname{Pic} \overline{X}, \mathbf{Z})$. Autrement dit, $\operatorname{Ext}^1_G(P, (\operatorname{Pic} \overline{X})^0) = 0$ pour tout G-module de permutation P, ce qui s'écrit encore:

$$\operatorname{Ext}^1_G(\operatorname{Pic} \overline{X}, P) = 0,$$

et assure a priori que la suite exacte (33) est G-scindée.

d) *k-rationalité de certains torseurs universels*. Pour achever d'expliquer l'origine de l'exemple du §1, il nous reste à citer le résultat suivant où k est de caractéristique $\neq 2$:

THÉORÈME [8]. *Soient $a \in k^*$ et $P \in k[x]$ un polynôme non nul de degré ≤ 4. Il existe un modèle projectif et lisse X de la k-surface d'équation affine*

$$y^2 - az^2 = P(x) \tag{38}$$

tel que tout torseur universel $\mathscr{T}$ sur X qui possède un point k-rationnel soit une variété k-rationnelle.

Pour établir ce théorème, on considère un modèle X du type indiqué dans la démonstration du théorème 2. On écrit alors des équations "explicites" pour les torseurs universels $\mathscr{T}$ sur X (voir [7, II C et IV]; voir aussi la remarque 6 ci-après). Puis, par une méthode semblable à celle du §1 b) **2**, on ramène ces équations à des systèmes quadratiques qui définissent certaines intersections de deux quadriques. On prouve enfin que celles-ci sont k-rationnelles lorsque $\mathscr{T}(k) \neq \varnothing$, en utilisant un critère plus élaboré que celui de la proposition 1.

La théorème ci-dessus est, au langage et à la démonstration près, une généralisation d'un résultat de F. Châtelet ([5]; voir aussi Manin [18]) portant sur le cas où le polynôme P est de la forme

$$P(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3),$$

où les $e_i \in k$ sont supposés distincts. On suppose en outre que a n'est pas un carré dans k. Sous ces hypothèses (voir [18] ou [7, IV]):

$$H^1(\mathfrak{g}, \operatorname{Pic} \overline{X}) = (\mathbf{Z}/2)^2,$$

et le $\mathfrak{g}$-module $\operatorname{Pic} \overline{X}$ ne peut être stablement de permutation. D'après la proposition 2, la surface X n'est donc pas stablement k-rationnelle dans ce cas-là. Elle ne peut donc jouer le rôle de la surface (15) du théorème 1 pour le problème de Zariski.

Au contraire, si l'on considère la surface X du théorème 1, on peut lui appliquer le théorème 2 et le théorème ci-dessus, et par suite la proposition 3, et cette méthode donne déjà le résultat suivant:

$$X \times_k \mathbf{A}_k^9 \underset{k}{\sim} \mathbf{A}_k^{11}.$$

La méthode directe du théorème 1 donne mieux: $X \times_k \mathbf{A}_k^3 \underset{k}{\sim} \mathbf{A}_k^5$.

Il reste enfin à expliquer en quoi la méthode du théorème 1 est une simplification de la méthode évoquée ci-dessus. Compte tenu des remarques déjà faites, il s'agit de voir qu'à un facteur anodin près le torseur $\mathcal{T}$ du §1 n'est autre qu'un torseur universel. C'est ce que nous allons voir dans la remarque suivante.

Remarque 6. On revient aux hypothèses et notations de la remarque 5. Soit W le fermé de X tel que $\overline{W}$ soit la réunion des fibres géométriques dégénérées, de Σ et de Σ'. Soient U l'ouvert complémentaire, $\bar{k}[U]$ l'algèbre affine de $\overline{U}$ et $\operatorname{Div}_{\overline{W}}\overline{X}$ le module des diviseurs de $\overline{X}$ à support dans $\overline{W}$. Le diagramme commutatif de $\mathfrak{g}$-modules:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \operatorname{Pic}\overline{X} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
1 \arrow[r] & \bar{k}[U]^*/\bar{k}^* \arrow[r] & \operatorname{Div}_{\overline{W}}\overline{X} \arrow[r] & \operatorname{Pic}\overline{X} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donne, par dualité, avec des notations évidentes, $S_i = D(P_i), \ldots,$ le diagramme commutatif de k-tores:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & S_0 \arrow[r] & S_2 \arrow[r, "\eta"] & S_1 \arrow[r] & 1 & (39)\\
1 \arrow[r] & S_0 \arrow[r] \arrow[u, equal] & T_2 \arrow[r] \arrow[u] & T_1 \arrow[r] \arrow[u, "\rho"] & 1. & (40)
\end{tikzcd}$$

Les fonctions $(y - z\sqrt{a})/t$ et $(\lambda - \theta_i)$, pour $i = 1, \ldots, n$, définissent une $\mathfrak{g}$-section de $\bar{k}[U]^* \to \bar{k}[U]^*/\bar{k}^*$ et, par suite, un k-morphisme ψ: $U \to T_1$ dont le composé ϕ avec ρ est le k-morphisme $U \to S_1$ défini sur $\bar{k}$ par $\{(\lambda - \theta_i)\}$. D'après [7] (II C, assertion 1), l'image réciproque par ψ du torseur sur T_1 défini par la suite (40) est la restriction à U d'un torseur universel sur X. Mais il revient au même de prendre l'image réciproque par ϕ du torseur sur S_1 défini par la suite (39). On obtient ainsi, dans la situation de l'équation (37), une description explicite assez simple d'un torseur universel au-dessus de l'ouvert U: c'est le produit fibré de S_2 et de U au-dessus de S_1 via η et ϕ.

Dans le cas particulier de l'équation (15), la suite (39) n'est autre que (35), l'ouvert U s'appelle X, le morphisme ϕ, défini sur k par $(x, y, z) \mapsto x - \theta$, n'est autre que (16), et finalement le torseur universel ainsi obtenu est

$$\mathscr{T}_0 = \mathscr{T} \times {}_k R_{k'/k} \mathbf{G}_m .$$

3. Le problème de Zariski sur un corps algébriquement clos

Dans ce paragraphe, nous considérons les surfaces du §1 dans le cas où k est le corps des fractions rationnelles $k_0(t)$ en une variable sur un corps algébriquement clos k_0, de caractéristique $\neq 2$. L'extension K/k correspond alors à un revêtement triple $C \to \mathbf{P}^1_{k_0}$, où C est une courbe lisse sur k_0. La variété affine X_0, d'équation

$$y^2 - a(t)z^2 = P(t,x), \tag{41}$$

en x, y, z, t, à coefficients dans k_0, devient un fibré en coniques (voir b) ci-dessous pour une définition précise) sur $\mathbf{A}^2 = \operatorname{Spec} k_0[t,x]$, dont la courbe discriminante est réunion de C et des droites définies par $a(t) = 0$.

Afin de prouver l'irrationalité de X_0 par la méthode de Clemens-Griffiths, nous nous proposons d'appliquer la théorie de [3] pour calculer la jacobienne intermédiaire (ou, plus précisément, le "représentant algébrique du groupe de Chow") d'une variété birationnellement équivalente à X_0. Il faut pour cela trouver un modèle birationnel *complet* S de $\mathbf{A}^2$ et une variété *non singulière* X birationnellement équivalente à X_0, fibrée en coniques sur S. On réalise cette situation en partant de la surface $\mathbf{F}_n$ dans laquelle la courbe C est plongée naturellement, et en effectuant quelques modifications birationnelles élémentaires qui sont décrites dans la partie b) ci-dessous. On obtient ainsi comme "jacobienne intermédiaire" de X une variété de Prym $\mathscr{P}$ qui est associée canoniquement à la courbe trigonale C. Nous montrons alors grâce aux résultats de [2] que, pour C convenable, cette variété de Prym $\mathscr{P}$ n'est ni une jacobienne de courbe, ni un produit de telles jacobiennes, ce qui d'après [6] entraîne que X n'est pas rationnelle.

a) *La variété de Prym associée à une courbe trigonale.* Soit C une courbe projective et lisse sur k_0, de genre g, munie d'un morphisme η de degré 3 sur une droite projective L. Nous supposerons pour simplifier (voir la remarque 8 ci-dessous) que η n'a pas de point de ramification d'indice 3. D'après la formule de Hurwitz, il existe alors $(2g+4)$ points de ramification ordinaires $Q_1, \ldots, Q_{2g+4}$ sur C. Nous noterons R_i l'image de Q_i dans L, et P_i le second point de $\eta^{-1}(R_i)$, de sorte qu'on a, pour $1 \leq i \leq 2g+4$:

$$\eta^* R_i = P_i + 2Q_i .$$

En raison de l'hypothèse sur la ramification, le revêtement η n'est pas galoisien. Considérons le revêtement galoisien $\tilde{\eta}\colon \tilde{C} \to L$ de groupe $\mathfrak{S}_3$ associé à η. Il induit un revêtement double $\pi\colon \tilde{C} \to C$ de façon que $\tilde{\eta} = \eta \circ \pi$. Puisque le groupe $\mathfrak{S}_3$ opère transitivement sur la fibre $\tilde{\eta}^{-1}(R_i)$, on a nécessairement, pour $1 \leq i \leq 2g+4$:

$$\tilde{\eta}^* R_i = 2\tilde{P}_i + 2\tilde{Q}_i' + 2\tilde{Q}_i'',$$

avec $\pi^{-1}(P_i) = \{\tilde{P}_i\}$ et $\pi^{-1}(Q_i) = \{\tilde{Q}_i', \tilde{Q}_i''\}$. Autrement dit, π est ramifié exactement aux points $P_1, \ldots, P_{2g+4}$ de C. De plus, le sous-groupe alterné $\mathfrak{A}_3$ de $\mathfrak{S}_3$ opère transitivement sur la fibre $\tilde{\eta}^{-1}(R_i)$. Si l'on désigne par $\tilde{L}$ la courbe $\tilde{C}/\mathfrak{A}_3$, on a donc un diagramme commutatif:

(42)
$$\begin{tikzcd} & \tilde{C} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dd, "\tilde{\eta}"] \arrow[dr] & \\ C \arrow[dr, "\eta"'] & & \tilde{L} \arrow[dl] \\ & L & \end{tikzcd}$$

où $\tilde{L} \to L$ est le revêtement double de L ramifié aux points $R_1, \ldots, R_{2g+4}$ (de sorte que $\tilde{L}$ est une courbe hyperelliptique, de genre $g+1$). Nous noterons $\tilde{R}_i$ l'unique point de $\tilde{L}$ au-dessus de R_i.

On observera que la donnée du diagramme ci-dessus équivaut à celle du diagramme obtenu par passage aux points génériques:

(43)
$$\begin{tikzcd} & K' \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ K \arrow[dr, dash] & & k' \arrow[dl, dash] \\ & k & \end{tikzcd}$$

où k, K, k', K' désignent les corps de fonctions respectifs de $L, C, \tilde{L}, \tilde{C}$, et celui-ci n'est autre que le diagramme (8) considéré au §1, pour $k = k_0(t)$.

Soit $\tilde{\Gamma}$ (resp. Γ) la courbe à croisements normaux obtenue à partir de la somme disjointe $\tilde{C} \amalg \tilde{L}$ (resp. $C \amalg L$) en identifiant $\tilde{P}_i$ à $\tilde{R}_i$ (resp. P_i à R_i), pour $1 \leq i \leq 2g+4$. On dispose d'un morphisme $\tilde{\Gamma} \to \Gamma$ de degré 2, qui est un pseudo-revêtement double au sens de [2] et de [3] (cela signifie que Γ est le quotient de $\tilde{\Gamma}$ par une involution qui fixe les points doubles, ainsi que chacune des deux branches d'un tel point double). On peut donc considérer, en suivant [2], la variété de Prym $\mathscr{P}(\tilde{\Gamma}, \Gamma)$: c'est une variété abélienne principalement polarisée de dimension $3g+2$, que nous appellerons la *variété de Prym associée à la courbe trigonale C*.

PROPOSITION 4. *Pour $g \geq 3$, la variété de Prym $\mathscr{P}$ associée à la courbe trigonale C n'est isomorphe (comme variété abélienne principalement polarisée) ni à une jacobienne de courbe, ni à un produit de variétés abéliennes polarisées.*

Nous allons montrer que le lieu singulier du diviseur Θ de $\mathscr{P}$ est de codimension $c \geq 5$ dans $\mathscr{P}$: ceci entraînera que $(\mathscr{P}, \Theta)$ n'est isomorphe ni à un produit (on aurait $c = 2$), ni à une jacobienne (on aurait $c = 3$ ou 4, cf. [0]). Puisque $\mathscr{P}$ est la variété de Prym $\mathscr{P}(\tilde{\Gamma}, \Gamma)$, il suffit de vérifier que la courbe Γ ne figure pas dans la liste du théorème 4.10 de [2]. Puisque $g \geq 3$, on a card$(C \cap L) \geq 10$ et $p_a(\Gamma) = 3g + 3 \geq 12$. Ceci élimine déjà une partie du cas $c = 2$ et les cas d), e), et g) à j) de ladite liste. Si Γ était une courbe hyperelliptique, ou si elle s'obtenait à partir d'une telle courbe en identifiant deux points, ou deux paires de points, cette courbe hyperelliptique serait réductible, ses composantes seraient des courbes rationnelles, l'une d'elles dominerait C qui devrait donc être rationnelle. Ceci élimine définitivement le cas $c = 2$, puis le cas $c = 3$ et les cas b) et f). Dans le cas c), Γ serait un revêtement double d'une courbe irréductible A (une courbe stable de genre 1 est irréductible); alors L dominerait A qui serait rationnelle, et C devrait encore être rationnelle. Reste le cas a) (Γ trigonale), où C devrait être hyperelliptique: mais une courbe hyperelliptique (lisse connexe) de genre ≥ 3 n'a pas de g_3^1 sans point base (voir par exemple [11] lemma 3.2). Ceci achève d'éliminer le cas $c = 4$.

Remarque 7. Le résultat ci-dessus est encore vrai pour $g = 1$ et $g = 2$. Il n'est pas difficile d'éliminer le cas a); il faut une étude plus poussée pour éliminer le cas e) lorsque $g = 1$.

Remarque 8. Le cas où η admet des points de ramification d'indice 3 (sans qu'ils soient tous ainsi) ne présente pas de difficulté supplémentaire—au moins si la caractéristique de k_0 est différente de 3, ce que nous supposerons ici. Soient $Q_1, \ldots, Q_s$ les points de ramification d'indice 2 (on suppose $s > 0$); définissons comme ci-dessus les points P_i sur C et R_i sur L, pour $1 \leq i \leq s$. Le revêtement $\tilde{C} \to C$ est ramifié le long des P_i, et le revêtement $\tilde{L} \to L$ le long des R_i; on construit $\tilde{\Gamma}$ et Γ comme ci-dessus. La variété de Prym $\mathscr{P}(\tilde{\Gamma}, \Gamma)$ est alors de dimension $g + s - 2$. On montre par la même méthode que ce n'est pas une jacobienne, ni un produit, pour $g + s \geq 8$ (et $s > 0$).

b) *Modifications des fibrés en coniques*. Soit S une surface projective et lisse sur k_0. On appelle *fibré en coniques* sur S une variété X munie d'un morphisme propre et plat ϕ: $X \to S$ dont les fibres sont isomorphes à des coniques dans $\mathbf{P}^2$ (éventuellement dégénérées). Il existe alors (cf. [3, proposition 1.2][1]) un fibré vectoriel $\mathscr{F}$ de rang 3 sur S, un fibré en droites $\mathscr{N}$ sur S, et une

[1]Les résultats de [3] sont énoncés dans le cas $S = \mathbf{P}^2$, mais l'extension au cas général est immédiate. De même, le calcul de la "jacobienne intermédiaire" de X (représentant algébrique du groupe de Chow $A^2(X)$), qui est fait dans [3, chap. III], pour $S = \mathbf{P}^2$, s'étend trivialement au cas où S est une surface rationnelle (lisse et projective) quelconque.

forme quadratique $q \in H^0(S, S^2\mathscr{F} \otimes \mathscr{N})$, tels que X s'identifie au diviseur des zéros de q dans le fibré projectif $\mathbf{P}_S(\mathscr{F})$.

Notons D la courbe discriminante (lieu des points s de S où la conique $X_s = \phi^{-1}(s)$ est singulière). Pour que la variété X soit non singulière, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient réalisées (ceci résulte d'un calcul jacobien très simple; voir [3] *loc. cit.*):

(i) les seules singularités de D sont des points doubles ordinaires;

(ii) on a $rg(X_s) = 2$ pour $s \in D - \mathrm{Sing}(D)$, et $rg(X_s) = 1$ pour $s \in \mathrm{Sing}(D)$.

On dira alors que le fibré en coniques est *non singulier*. On peut montrer [28] que tout fibré en coniques est birationnellement équivalent à un fibré en coniques non singulier. Nous nous contenterons ici de décrire des modifications birationnelles qui permettent d'éliminer des singularités très simples.

Nous nous placerons dans le cas où le fibré en coniques X est *diagonal*: cela signifie que $\mathscr{F}$ est somme directe de 3 fibrés en droites $\mathscr{L}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, et que la forme q est donnée par 3 sections $b_i \in H^0(S, \mathscr{L}_i^{\otimes 2} \otimes \mathscr{N})$. La courbe discriminante est alors la réunion des trois diviseurs $D_i = \mathrm{div}(b_i)$. Pour que les conditions (i) et (ii) soient réalisées, il faut et il suffit que les D_i soient lisses, qu'ils se coupent deux à deux transversalement et que $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \varnothing$.

Soit s un point de S où la courbe D ne possède pas ces propriétés. Notons $\varepsilon\colon S' \to S$ l'éclatement de s, et E le diviseur exceptionnel. Nous allons construire, dans les trois situations qui suivent, un fibré en coniques X' sur S', birationnellement équivalent à X sur S, défini par un fibré $\mathscr{F}'$ et une forme q', dont la courbe discriminante D' est la normalisée de D en s.

1. *La courbe D_1 a un point ordinaire en s, et $s \notin D_2 \cup D_3$.* On pose alors $\mathscr{F}' = \varepsilon^*\mathscr{L}_1(-E) \oplus \varepsilon^*\mathscr{L}_2 \oplus \varepsilon^*\mathscr{L}_3$, et on définit la section q' de $S^2\mathscr{F}' \otimes \varepsilon^*\mathscr{N}$ par les transformés stricts de b_1, b_2, b_3. La courbe D' est alors le transformé strict de D dans S'.

2. *D_1, D_2 et D_3 passent par s; ils sont lisses en s, avec trois directions tangentes distinctes.* On pose alors $\mathscr{F}' = \bigoplus_{i=1}^3 \varepsilon^*\mathscr{L}_i(-E)$, et on considère la section q' de $S^2\mathscr{F}' \otimes \varepsilon^*\mathscr{N}(E)$ définie par les transformés stricts des b_i. La courbe D' est le transformé strict de D.

3. *D_1 et D_2 sont lisses et simplement tangents en s, et $s \notin D_3$.* On pose $\mathscr{F}' = \varepsilon^*\mathscr{L}_1(-E) \oplus \varepsilon^*\mathscr{L}_2(-E) \oplus \varepsilon^*\mathscr{L}_3$; la section q' de $S^2\mathscr{F}' \otimes \varepsilon^*\mathscr{N}(E)$ est définie par les transformés stricts de b_1 et b_2, et par $\varepsilon^*(b_3) \otimes e$, où e est une section non nulle de $H^0(S', \mathscr{O}_{S'}(E))$. Le diviseur D' est réunion de E et des transformés stricts D_i' de D_i. Les courbes D_1', D_2' et E se coupent transversalement en un point s' de S'; on est ainsi ramené à la situation précédente. Après éclatement de s', on obtient donc un fibré en coniques $X'' \xrightarrow{\phi''} S''$ dont la courbe discriminante est réunion de la normalisée D' de D en s et d'une courbe rationnelle lisse E, disjointe de D'.

On peut en fait se débarrasser de celle-ci, de la façon suivante. L'image réciproque de E dans X'' est réunion de deux surfaces E_1 et E_2, réglées sur E. Soit F_i, pour $i = 1, 2$, la fibre de E_i au-dessus d'un point de E, et soit F une fibre générale de ϕ''. On a alors dans l'anneau de Chow de X'':

$$E_1 \cdot (F_1 + F_2) = E_1 \cdot F = 0,$$

d'où:

$$E_1 \cdot F_1 = - E_1 \cdot F_2 = - 1.$$

Ceci entraîne ([1, cor. 6.11]; voir aussi, [20, III, théorème 2]) que l'on peut contracter E_1 (ou E_2) pour obtenir un espace algébrique (lisse) X'''. Alors X''' est un fibré en coniques sur S'' (donc une variété algébrique), de courbe discriminante D'.

c) *Non-rationalité de la variété* X. Rappelons qu'on désigne par $\mathbf{F}_n$ la surface réglée rationnelle $\mathbf{P}_{\mathbf{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(n))$. On note f la classe d'une fibre et h celle du fibré tautologique $\mathcal{O}_{\mathbf{F}_n}(1)$; ces deux classes forment une base de $\mathrm{Pic}(\mathbf{F}_n)$, avec:

$$f^2 = 0, \qquad f \cdot h = 1, \qquad h^2 = n.$$

Soit C une courbe trigonale, de genre g. Il est bien connu (voir par exemple [1, §3]) que C vit dans une surface $\mathbf{F}_n$ (pour $g \geq 5$, c'est l'intersection des quadriques qui contiennent le modèle canonique de C), de façon que le revêtement triple η: $C \to \mathbf{P}^1$ soit induit par la projection p: $\mathbf{F}_n \to \mathbf{P}^1$. De manière précise, il existe des entiers positifs n et r, uniquement déterminés, tels que C soit isomorphe à un élément du système linéaire $|3h + rf|$ sur la surface $\mathbf{F}_n$. Nous supposerons, pour simplifier, comme en a), que η n'a que des points de ramification d'indice 2. Il existe donc $(2g + 4)$ fibres $F_1, \ldots, F_{2g+4}$ de p qui sont tangentes à C.

Choisissons une section L de p telle que:

(i) $L \in |h + cf|$, avec $c \equiv r$ (mod. 2);

(ii) L et C se coupent transversalement, en des points non situés sur les F_i.

Un tel choix est possible puisque le système linéaire $|h + cf|$ est très ample pour $c \geq 1$. Nous identifions L à la base de la surface $\mathbf{F}_n$ via la projection p.

Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ les fibrés en droites sur $\mathbf{F}_n$ de classes respectives $(g + 2)f$ et $2h + \frac{1}{2}(r + c)f$, et soit l (resp. m) une section de $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ (resp. $\mathcal{M}^{\otimes 2}$) de diviseur $\sum_{i=1}^{2g+4} F_i$ (resp. $C + L$). Considérons le fibré en coniques diagonal X_0 sur $\mathbf{F}_n$ défini par le fibré $\mathcal{F} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$ et par la section $(1, l, m)$ de $S^2\mathcal{F}$. Pour écrire une équation affine de X_0, choisissons une fibre F_∞ de p, et posons $U = \mathbf{F}_n - L - F_\infty$. La fibration en droites affines $p_{|U}\colon U \to \mathbf{A}^1$ étant triviale, l'ouvert U est isomorphe à $\mathbf{A}^2$; choisissons des coordonnées (t, x) sur U de façon que $p(t, x) = t$. La courbe C est alors définie dans U par une équation $P(t, x) = 0$, où $P \in k_0[t, x]$ est un polynôme de degré 3 en x, bien défini à une constante non nulle près. Soit $a(t) \in k_0[t]$ le discriminant de P, considéré comme polynôme en x à coefficients dans l'anneau $k_0[t]$. En raison des hypothèses antérieures, et d'après [24, chap. III], les zéros du polynôme $a(t)$ sont les points R_i de $\mathbf{A}^1$ tels que $p^{-1}(R_i) = F_i$, et ils sont de multiplicité 1. A des constantes non nulles près, la section $(1, l, m)$ coïncide donc au-dessus de U avec la section $(1, a, P)$. L'équation de X_0 au-dessus de U peut alors s'écrire:

$$Y^2 - a(t)Z^2 = P(t, x)W^2,$$

ou encore, dans l'ouvert $W \neq 0$:

$$y^2 - a(t)z^2 = P(t, x), \tag{44}$$

avec la condition:

$$a(t) = \operatorname{disc}_x P(t, x).$$

On retrouve donc une équation du type (30) considérée au §1, exemple 2. D'après le théorème 1′, la variété X_0 est donc *stablement rationnelle.*

Cependant, ce fibré en coniques X_0 est singulier, pour deux raisons:

(a) la courbe $C \cup L$ a des points doubles ordinaires;

(b) les courbes F_i et C sont simplement tangentes en Q_i.

D'après la partie b) de ce paragraphe, on obtient après éclatement convenable de $\mathbf{F}_n$ un *fibré en coniques non singulier* X birationnellement équivalent à X_0, dont la courbe discriminante D est réunion de C et des courbes rationnelles $L, F_1, \ldots, F_{2g+4}$; les seules singularités de D sont les points doubles $\{P_i\} = C \cap F_i$ et $\{R_i\} = L \cap F_i$.

PROPOSITION 5. *La jacobienne intermédiaire du fibré en coniques non singulier X ainsi construit est isomorphe (en tant que variété abélienne principalement polarisée) à la variété de Prym associée à la courbe trigonale C.*

Rappelons que nous entendons par "jacobienne intermédiaire" le "représentant algébrique du groupe de Chow $A^2(X)$" considéré dans [3, chap. III].

D'après [3, théorème 3.6], la jacobienne intermédiaire de X est isomorphe à la variété de Prym du pseudo-revêtement double $\tilde{D} \to D$, où les points de $\tilde{D}$ au-dessus d'un point s de D correspondent aux composantes de la conique singulière X_s. On a ici: $\tilde{D} = \tilde{C} \cup \tilde{L} \cup \tilde{F}_1 \cup \cdots \cup \tilde{F}_{2g+4}$. La composante $\tilde{C}$

au-dessus de C paramètre les deux composantes de la conique $y^2 - a(t)z^2 = 0$. Le revêtement ramifié $\tilde{C} \to C$ est donc le revêtement double canonique associé à la courbe trigonale C (voir a)). Les revêtements $\tilde{F}_i \to F_i$ sont ramifiés en deux points, donc $\tilde{F}_i$ est une courbe rationnelle. Enfin, $\tilde{L} \to L$ est le revêtement double de L ramifié aux points $R_1, \ldots, R_{2g+4}$.

Puisque chaque courbe $\tilde{F}_i$ rencontre le reste de $\tilde{D}$ en deux points, le lemme (4.11) de [2] entraîne que la variété de Prym de la paire $(\tilde{D}, D)$ est isomorphe à celle de la paire obtenue en contractant les courbes $\tilde{F}_i$ et F_i: or celle-ci n'est autre que la paire $(\tilde{\Gamma}, \Gamma)$ définie en a). D'où la proposition.

Le critère de Clemens-Griffiths ([6]; voir [3, proposition 4.6] pour la situation présente) affirme que la jacobienne intermédiaire d'une variété rationnelle (projective et lisse) de dimension 3 est une jacobienne de courbe, ou un produit de telles jacobiennes. On peut donc conclure des propositions 4 et 5, et du théorème 1′, le théorème suivant, où le corps de base k_0 est un *corps algébriquement clos de caractéristique* $\neq 2$:

THÉORÈME 3. *Si la courbe trigonale* C (*projective et lisse sur* k_0, *et sans point de ramification d'indice* 3) *est de genre* $g \geq 3$, *la variété* X *construite ci-dessus est stablement rationnelle, mais non rationnelle.*

Cette variété X, projective et lisse sur k_0, est de dimension 3. Elle est fibrée en coniques sur une surface rationnelle et admet un modèle affine d'équation:

$$y^2 - a(t)z^2 = P(t, x),$$

où $P(t, x) = 0$ est une équation affine de la courbe trigonale C, relativement à la projection définie par t, et où

$$a(t) = \operatorname{disc}_x P(t, x).$$

Exemple **3.** Comme exemple directement justiciable du théorème ci-dessus, on peut prendre, pour $k_0 = \mathbf{C}$, la variété affine V définie par l'équation:

$$y^2 + (t^4 + 1)(t^6 + t^4 + 1)z^2 = 2x^3 + 3t^2x^2 + t^4 + 1. \tag{45}$$

En effet, la courbe trigonale (projective et lisse) d'équation affine:

$$2x^3 + 3t^2x^2 + t^4 + 1 = 0$$

se plonge dans $\mathbf{F}_1$ et a 10 points de ramification, tous d'indice 2 et à distance finie. Ainsi, $n = 1$ et $g = 3$. Un calcul d'intersection donne $r = 1$. On voit alors qu'on peut prendre pour L la section à l'infini Σ_∞ de $\mathbf{F}_1$. En effet, $\Sigma_\infty \in |h - f|$, autrement dit $c = -1$, et C et Σ_∞ se coupent transversalement en un point de la fibre à l'infini; les hypothèses (i) et (ii) sont donc satisfaites. On peut ainsi prendre pour U le plan affine initial et, d'après l'équation (44), la variété V s'identifie à l'ouvert de X_0 au-dessus de U.

Remarque 9. D'après la remarque 7 de la partie a), l'énoncé reste vrai pour $g = 1$ et $g = 2$. D'autre part, on étend sans difficultés l'énoncé de la proposition 5 au cas où le revêtement triple $C \to \mathbf{P}^1$ a des points de ramification d'indice 3 et $s > 0$ points de ramification d'indice 2; d'après la remarque 8, on en déduit que le théorème reste vrai dans ce cas pourvu que:

$$g + s \geq 8.$$

Remarque 10. Le fibré en coniques non singulier X est construit à partir de la courbe trigonale $C \subset \mathbf{F}_n$ et d'une section L de $\mathbf{F}_n$ satisfaisant les conditions (i) et (ii) ci-dessus. Ces hypothèses, introduites pour simplifier la construction, ne sont pas indispensables. Si l'hypothèse (i) n'est pas satisfaite, on remplace L par $L + F$, où F est une fibre générale de $\mathbf{F}_n$, et on applique la même méthode que précédemment. Si l'hypothèse (ii) n'est pas satisfaite, la courbe discriminante $C + L + \sum_i F_i$ possède des singularités un peu plus compliquées que celles considérées en b); on peut encore construire X à partir d'éclatements successifs, par une méthode tout à fait analogue à celle décrite en b). Dans tous les cas on trouve que la proposition 5, et par conséquent le théorème 3, restent valables. On peut encore étendre les hypothèses sur C comme indiqué dans la remarque 9.

Remarque 11. Partons alors inversement d'une variété affine V définie par une équation:

$$y^2 - a(t)z^2 = P(t, x),$$

où $P \in k_0[t, x]$ est un polynôme irréductible et de degré 3 *en x, dont le discriminant $a(t) \in k_0[t]$ est sans facteur carré.* L'équation:

$$P(t, x) = 0$$

définit alors une courbe lisse C_0 dans $\mathbf{A}^2$ sans point de ramification d'indice 3. On peut compactifier $\mathbf{A}^2$ en une surface $\mathbf{F}_n$ de façon que l'adhérence de C_0 soit une courbe trigonale lisse C dans $\mathbf{F}_n$ (ayant donc au plus un point de ramification d'indice 3). Considérons alors le fibré en coniques non singulier X construit à partir de la courbe C et de la section à l'infini de $\mathbf{F}_n$. D'après l'équation (44) ci-dessus, la variété V s'identifie à un ouvert de X. On conclut donc que V *est non rationnelle* dès que $g(C) \geq 2$, et même *dès que*:

$$\deg a(t) \geq 5.$$

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, ORSAY, FRANCE (deux premiers auteurs)
ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PARIS, FRANCE
UNIVERSITY GRANTS COMMITTEE, LONDON, ENGLAND

REFERENCES

[0] A. ANDREOTTI, A. MAYER, On period relations for abelian integrals on algebraic curves, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **21** (1967), 189–238.

[1] M. ARTIN, Algebraization of formal moduli: II. Existence of modifications, Ann. of Math. **91** (1970), 88–135.

[2] A. BEAUVILLE, Prym varieties and the Schottky problem, Invent. Math. **41** (1977), 149–196.

[3] ______, Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **10** (1977), 309-391.

[4] ______, Variétés rationnelles et unirationnelles, *Algebraic Geometry—Open Problems* (Ravello 1982), 16–33, Lecture Notes in Math. n°997, Springer, Berlin 1983.

[5] F. CHÂTELET, Points rationnels sur certaines courbes et surfaces cubiques, Enseign. Math. **5** (1959), 153–170.

[6] H. CLEMENS, P. GRIFFITHS, The intermediate jacobian of the cubic threefold, Ann. of Math. **95** (1972), 281–356.

[7] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, La descente sur les variétés rationnelles, *Journées de Géométrie Algébrique* (Angers 1979), A. Beauville éd., 223–237, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn (1980).

[8] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC, SIR P. SWINNERTON-DYER, Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces (en préparation), voir Intersections de deux quadriques et surfaces de Châtelet, C.R. Acad. Sci. Paris, **298**, série I (1984), 377–380.

[9] D. F. CORAY, M. A. TSFASMAN, Arithmetic on singular del Pezzo surfaces (en préparation).

[10] M. DEMAZURE, Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **3** (1970), 507–588.

[11] R. DONAGI, Group law on the intersection of two quadrics, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **7** (1980), 217–239.

[12] S. ENDO, T. MIYATA, Quasi-permutation modules over finite groups, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 397–421.

[13] ______, On a classification of the function fields of algebraic tori, Nagoya Math. J. **56** (1974), 85–104.

[14] V. A. ISKOVSKIH, Rational surfaces with a pencil of rational curves, Mat. Sb. **74** (116) (1967), 608–638 (= Math. USSR Sb. **3** (1967), 563–587).

[15] ______, Rational surfaces with a pencil of rational curves and with positive square of the canonical class, Mat. Sb. **83** (125) (1970), 90–119 (= Math. USSR Sb. **12** (1970), 91–117).

[16] ______, Birational properties of a surface of degree 4 in $\mathbf{P}_k^4$, Mat. Sb. **88** (130) (1972), 31–37 (= Math. USSR Sb. **17** (1972), 30–36).

[17] J. KOLLAR, F. O. SCHREYER, The moduli of curves is stably rational for $g \leq 6$, Duke Math. J. 51 (1984), 239–242.

[18] YU. I. MANIN, *Formes Cubiques* (en russe), Nauka, Moscou 1972 (trad. angl.: *Cubic Forms*, North Holland, Amsterdam 1974).

[19] D. MUMFORD, Prym varieties I, *Contributions to Analysis* (L. Ahlfors et al. eds.), 325–350, Academic Press, New York 1974.

[20] B. G. MOĬŠEZON, On n-dimensional compact complex varieties with n algebraically independent meromorphic functions, I, II, III, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. **30** (1966), 133–174, 345–386, 621–656 (= A.M.S. Translations **63** (1967), 51–117).

[21] P. E. NEWSTEAD, Rationality of moduli spaces of stable bundles, Math. Ann. **215** (1975), 251–268 (Correction, Math. Ann. **249** (1980), 281–282).

[22] B. SEGRE, Sur un problème de M. Zariski, *Colloque international d'algèbre et de théorie des nombres* (Paris 1949), 135–138, C.N.R.S., Paris 1950.

[23] ______, On the rational solutions of homogeneous cubic equations in four variables, Math. Notae Univ. Rosario Argentina **11** (1951), 1–68.

[24] J-P. SERRE, *Corps Locaux*, Hermann, Paris 1962.
[25] H. P. F. SWINNERTON-DYER, The birationality of cubic surfaces over a given field, Michigan Math. J. **17** (1970), 289–295.
[26] V. E. VOSKRESENSKIĬ, Fields of invariants for abelian groups, Uspekhi Mat. Nauk **28** (1973), 77–102 (= Russian Math. Surveys **28** (1973), 79–105).
[27] ———, *Tores Algébriques* (en russe), Nauka, Moscou 1977.
[28] A. A. ZAGORSKIĬ, Three-dimensional conical fibrations, Mat. Zametki **21** (1977), 745–758 (= Math. Notes **21** (1977), 420–427).

(Received April 2, 1984)