Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Sur les fonctions thêta d'ordre deux et les singularités du diviseur thêta

Arnaud Beauville, Olivier Debarre, Ron Donagi et Gerard van der Geer

Résumé — Pour une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ) on désigne par Γ_{00} l'espace des sections de $\mathcal{O}_A(2\Theta)$ qui s'annulent à l'origine avec multiplicité $\geqq 4$. Nous construisons des éléments de Γ_{00} en utilisant les singularités de Θ et nous confirmons ainsi une conjecture sur les zéros de Γ_{00} pour certaines variétés abéliennes principalement polarisées.

On second order theta functions and the singularities of the theta divisor

Abstract — *For a principally polarized abelian variety (A, Θ) one defines Γ_{00} as the space of sections of $\mathcal{O}_A(2\Theta)$ vanishing with multiplicity at least 4 at the origin. We construct elements of Γ_{00} using singularities of Θ and we confirm a conjecture on the set of zeroes of Γ_{00} for certain principally polarized abelian varieties.*

Introduction. — Soient A une variété abélienne complexe de dimension g, et $\vartheta \in NS(A)$ une polarisation principale sur A; nous supposerons que (A, ϑ) est *indécomposable*. Choisissons un diviseur symétrique (effectif) Θ sur A, de classe ϑ; le faisceau $\mathcal{O}_A(2\Theta)$ ne dépend pas du choix de Θ. Ses sections sont symétriques, et par conséquent leur multiplicité à l'origine est paire. On note Γ_{00} le sous-espace de $\Gamma = \Gamma(A, \mathcal{O}_A(2\Theta))$ formé des sections qui s'annulent en 0 avec multiplicité $\geqq 4$, et $V(\Gamma_{00})$ le sous-ensemble de A où toutes les sections de Γ_{00} s'annulent.

Si (A, ϑ) est la jacobienne d'une courbe C, Welters [8] a prouvé que $V(\Gamma_{00})$ est égal pour $g \neq 4$ au sous-ensemble $C-C$ de A formé des classes de diviseurs de la forme $[x]-[y]$, avec x, y dans C (pour $g=4$, $V(\Gamma_{00})$ peut contenir en outre deux points isolés). On conjecture au contraire que $V(\Gamma_{00})$ est *réduit à zéro* si (A, ϑ) n'est pas une jacobienne ([6], [5]). Cette conjecture est étroitement liée au problème de Schottky (*loc. cit.*).

Nous démontrons dans cette Note quelques résultats en direction de cette conjecture :

Proposition 1. — *Si* (A, ϑ) *est la jacobienne intermédiaire d'une hypersurface cubique lisse dans* $\mathbf{P}^4$, *l'ensemble* $V(\Gamma_{00})$ *est réduit à zéro.*

Proposition 2. — *Soit* C *une courbe plane lisse; soit* η *un élément d'ordre* 2 *de* JC, *satisfaisant à* $H^0(C, \mathcal{O}_C(2) \otimes \eta) = 0$ (un tel élément existe toujours si $\deg(C) \geqq 7$). *Si* (A, ϑ) *est la variété de Prym associée à* (C, η), *l'ensemble* $V(\Gamma_{00})$ *est réduit à zéro.*

Proposition 3. — *Si* $g=5$ *ou* $g \geqq 14$, *et si* (A, ϑ) *est une variété abélienne principalement polarisée générique de dimension* g, *l'ensemble* $V(\Gamma_{00})$ *est fini.*

1. La jacobienne intermédiaire d'une hypersurface cubique dans $\mathbf{P}^4$. — *Démonstration de la proposition* 1. — Le diviseur Θ de la jacobienne intermédiaire (A, ϑ) d'une hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}^4$ a un seul point singulier, qui est de multiplicité 3 [3]; on peut prendre ce point comme origine de A. Soit $\pi : V \to A$ le revêtement universel de A; notons θ la fonction thêta sur V de diviseur $\pi^* \Theta$, et identifions Γ à l'espace des fonctions thêta du second ordre sur V. Soit $(\partial_i)_{1 \leqq i \leqq 5}$ une base de l'espace des champs de vecteurs sur A. Posons

$$\varphi_{ij} = \theta\, \partial_i \partial_j \theta - \partial_i \theta\, \partial_j \theta \qquad (1 \leqq i \leqq j \leqq 5).$$

Note présentée par Jean-Pierre Serre.

0249-6291/88/03070481 \$ 2.00 © Académie des Sciences

On a $\varphi_{ij}=(1/2)\,\partial_i\,\partial_j[\theta(z+u)\,\theta(z-u)]_{u=0}$ (∂_i et ∂_j opérant par rapport à la variable u); comme la fonction $\theta(z+u)\,\theta(z-u)$ appartient à Γ pour tout $u \in V$, on en déduit $\varphi_{ij} \in \Gamma$. Puisque θ s'annule avec multiplicité 3 à l'origine, les fonctions θ^2 et φ_{ij} appartiennent à Γ_{00}; il en résulte qu'on a

$$V(\Gamma_{00})=\operatorname{Sing}\Theta=\{0\}. \quad \blacksquare$$

Soit (A, ϑ) une variété abélienne principalement polarisée indécomposable. Notons $\mathbf{P}(T)$ l'espace projectif tangent à l'origine de A. En associant à un élément de Γ_{00} sa forme initiale à l'origine on définit un homomorphisme $\alpha:\Gamma_{00}\to H^0(\mathbf{P}(T), \mathcal{O}(4))$. Son noyau est le sous-espace Γ_{000} de Γ_{00} formé des éléments de Γ s'annulant avec multiplicité $\geqq 6$ en 0. Son image est un système linéaire de quartiques dans $\mathbf{P}(T)$. Si (A, ϑ) est une jacobienne, le lieu de base de ce système linéaire est la courbe canonique (sauf pour $g=4$, où il peut contenir en outre un point isolé); dans le cas contraire on conjecture que ce système est sans point base (*voir* [5], où sont également discutées les relations de cette conjecture avec le problème de Schottky).

Revenons au cas où (A, ϑ) est la jacobienne intermédiaire d'une hypersurface cubique lisse X dans $\mathbf{P}^4$; choisissons comme ci-dessus le diviseur Θ de façon qu'il ait un point triple à l'origine.

PROPOSITION 4. — *L'espace* Γ_{000} *est de dimension* 1, *engendré par* θ^2*; le système linéaire* $\alpha(\Gamma_{00})$ *est sans point base.*

Conservons les notations de la démonstration de la proposition 1. Notons f le premier terme du développement en série de θ à l'origine; c'est un polynôme homogène de degré 3 sur T, et l'hypersurface $f=0$ dans $\mathbf{P}(T)$ s'identifie à X [3]. On a $\alpha(\theta^2)=0$ et

$$\alpha(\varphi_{ij})=f\,\partial_i\,\partial_j f-\partial_i f\,\partial_j f.$$

Les polynômes $\alpha(\varphi_{ij})$ sont linéairement indépendants dans $H^0(\mathbf{P}(T), \mathcal{O}(4))$, et même dans H^0 (X, $\mathcal{O}(4)$) : en effet l'hypersurface duale de X est de degré 24, et ne peut donc être contenue dans une quadrique. Ainsi l'espace Γ_{000} est de dimension 1, engendré par θ^2.

On a $\sum_{i,j} x_i x_j\,\alpha(\varphi_{ij})=-3f^2$; on en déduit facilement que le seul zéro commun des $\alpha(\varphi_{ij})$ est 0. Ainsi le système linéaire $\alpha(\Gamma_{00})$ est sans point base, conformément à la conjecture de Donagi. $\blacksquare$

Il résulte de la démonstration que les éléments θ^2 et φ_{ij} ($1\leqq i\leqq j\leqq 5$) de Γ_{00} sont linéairement indépendants. D'autre part la dimension de Γ_{00} est $2^g-(1/2)\,g\,(g+1)=16$ [6]. Par suite *les fonctions* θ^2 *et* φ_{ij} *forment une base de* Γ_{00}.

2. UNE GÉNÉRALISATION. — Si Z est une sous-variété de A et a un point de A, nous noterons Z_a le translaté $Z+a$ de Z par a. Si a est un point singulier de Θ, le diviseur $\Theta_a+\Theta_{-a}$ est le diviseur d'un élément de Γ_{00}; on a donc $V(\Gamma_{00})\subset\Theta_a\cup\Theta_{-a}$. La démonstration de la proposition 1 est basée sur une généralisation de cette remarque, que nous allons maintenant expliciter. Pour $k\geqq 0$, notons Θ^k l'ensemble des points de A en lesquels la multiplicité de Θ est $\geqq k$.

PROPOSITION 5. — *Pour* $a\in\Theta^k$, *on a* $V(\Gamma_{00})\subset \bigcup_{p+q=2k-3} (\Theta_a^p\cap\Theta_{-a}^q)$.

Notons comme précédemment $\pi: V\to A$ le revêtement universel de A, et θ une fonction thêta sur V de diviseur $\pi^*\Theta$. Choisissons un représentant de a dans V, que nous noterons encore a. Si D est un opérateur différentiel sur V, à coefficients constants, opérant par rapport à la variable u, on pose

$$\varphi_D(z) = D[\theta(z+u)\theta(z-u)]_{u=a}.$$

on vérifie comme dans la démonstration de la proposition 1 que la fonction φ_D appartient à Γ; si de plus D est d'ordre $\leqq 2k-4$, elle appartient à Γ_{00}.

Prouvons par récurrence sur n que l'ensemble des zéros de φ_D, pour D d'ordre $\leqq n$, est contenu dans la réunion des ensembles $\pi^*(\Theta_a^p \cap \Theta_{-a}^q)$, pour $p+q=n+1$. C'est clair pour $n=0$. Soit x un zéro commun à tous les φ_D, pour D d'ordre $\leqq n$. Par l'hypothèse de récurrence il existe deux entiers p, q de somme n tels qu'on ait $\pi(x) \in \Theta_a^p \cap \Theta_{-a}^q$. Par conséquent, si E et F sont deux opérateurs différentiels à coefficients constants sur V, d'ordre $<q$ et p respectivement, on a

$$(E\theta)(x+a)=0 \quad \text{et} \quad (F\theta)(x-a)=0.$$

Si maintenant E et F sont d'ordre $\leqq q$ et p respectivement, on obtient

$$0=\varphi_{E \circ F}(x)=(-1)^p E\theta(x+a) F\theta(x-a);$$

on en déduit qu'on a ou bien $E\theta(x+a)=0$ pour tout E d'ordre $\leqq q$, c'est-à-dire $\pi(x) \in \Theta_{-a}^{q+1}$, ou bien $F\theta(x-a)=0$ pour tout F d'ordre $\leqq p$, c'est-à-dire $\pi(x) \in \Theta_a^{p+1}$. Dans le premier cas $\pi(x)$ appartient à $\Theta_a^p \cap \Theta_{-a}^{q+1}$, dans le second à $\Theta_a^{p+1} \cap \Theta_{-a}^q$; cela prouve notre assertion par récurrence, et la proposition en résulte. ■

Corollaire. — *Sous les hypothèses de la proposition, on a* $V(\Gamma_{00}) \subset \Theta_a^{k-1} \cup \Theta_{-a}^{k-1}$. ■

3. Variétés de Prym des courbes planes. — Soient A une variété abélienne et Θ un diviseur symétrique définissant une polarisation principale sur A. L'ensemble $V(\Gamma_{00})$ est contenu dans $\Theta_a \cup \Theta_{-a}$ pour tout $a \in \operatorname{Sing}\Theta$; pour prouver qu'il est réduit à $\{0\}$, il suffit donc d'exhiber une sous-variété irréductible Z de $\operatorname{Sing}\Theta$ telle que l'inclusion $Z_a \subset \Theta$ entraîne $a=0$.

Démonstration de la proposition 2. — Soient C une courbe plane lisse de degré d et η un élément d'ordre 2 de JC. Notons $\pi : \tilde{C} \to C$ le revêtement étale double associé à η, et σ l'involution de $\tilde{C}$ correspondante. Soit A la variété de Prym associée à (C, η), c'est-à-dire [7] la sous-variété abélienne $\operatorname{Im}(1-\sigma)$ de $J\tilde{C}$. Elle s'identifie par translation à la sous-variété P de $\mathbf{Pic}(\tilde{C})$ formée des classes de diviseurs $\tilde{D}$ sur $\tilde{C}$ tels qu'on ait $\pi_*\tilde{D} \equiv K_C$ et que $h^0(\tilde{D})$ soit pair [nous abrégeons $\dim H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}))$ en $h^0(\tilde{D})$]. Cette sous-variété contient un diviseur Θ canonique, formé des classes de diviseurs $\tilde{D}$ tels que $h^0(\tilde{D})>0$.

Notons H le diviseur découpé sur C par une droite de $\mathbf{P}^2$. Nous allons appliquer la remarque précédant la démonstration en prenant pour Z la sous-variété de P formée des éléments qui peuvent s'écrire sous la forme $\pi^*H+\tilde{x}-\sigma\tilde{x}+\tilde{E}$, où $\tilde{x}$ est un point de $\tilde{C}$ et $\tilde{E}$ un diviseur effectif sur $\tilde{C}$. D'après [7], la variété Z est contenue dans $\operatorname{Sing}\Theta$; d'autre part elle est l'image dans P du produit de $\tilde{C}$ et d'une sous-variété spéciale (au sens de [2]) associée au système linéaire $|K_C-2H|$. Il ressort alors du corollaire du paragraphe 2 de [2] que Z est irréductible.

L'ingrédient essentiel de la démonstration est le lemme suivant, démontré dans [4] :

Lemme. — *Soient* $\tilde{D}$ *un diviseur sur* $\tilde{C}$ *et* $E \in |K_C-\pi_*\tilde{D}|$ *un diviseur réduit. On suppose que pour tout diviseur effectif* $\tilde{E}$ *sur* $\tilde{C}$ *tel que* $\pi_*\tilde{E}=E$, *on a* $h^0(\tilde{D}+\tilde{E}) \geqq 1$. *On a alors* $h^0(\tilde{D}) \geqq 1$. ■

Soit alors $a \in A$; il résulte du lemme que la condition $Z_a \subset \Theta$ implique $h^0(a+\pi^*H+\tilde{x}-\sigma\tilde{x}) \geqq 1$ pour tout point $\tilde{x}$ de $\tilde{C}$. On en déduit $h^0(a+\pi^*H) \geqq 2$. Soit $\tilde{D}$ un élément de $|a+\pi^*H|$; écrivons $\tilde{D}=\pi^*E+\tilde{F}$, où E et $\tilde{F}$ sont effectifs et $\tilde{F}$ est disjoint de $\sigma \tilde{F}$. On a alors une suite exacte ([7], p. 338)

$$0 \to \mathcal{O}_C(E) \to \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tilde{D}) \to \mathcal{O}_C(\pi_* \tilde{D} + \eta - E) \to 0.$$

Comme $\pi_* \tilde{D} \equiv 2H$, l'hypothèse sur η implique $h^0(\pi_* \tilde{D} + \eta - E) = 0$. On en déduit $h^0(E) \geqq 2$; comme $\deg(E) \leqq d$, cela entraîne $E \equiv H$ ou $E \equiv H - x$ $(x \in C)$. Dans le second cas a serait de la forme $\tilde{x} - \sigma \tilde{x}$, ce qui est impossible (un tel point n'appartient pas à A). On a donc $E \equiv H$ et $a = 0$, d'où la proposition. ■

La démonstration précédente s'étend sans grand changement au cas où C est la normalisée d'une courbe plane irréductible de degré d, admettant comme seules singularités δ points doubles ordinaires. On obtient comme ci-dessus la relation $a + \pi^* H \equiv \pi^* E + \tilde{F}$, avec $\tilde{F}$ effectif et $h^0(E) \geqq 2$. Si $\deg(E) = d$ on obtient que a est un point d'ordre 2 de A. Si $\deg(E) \leqq d - 1$, supposons en outre $d \geqq 8$ et $\delta \leqq d - 3$; un raisonnement classique (*cf.* [1], p. 56, exerc. 20) permet de prouver que E est linéairement équivalent à $H - x$, pour $x \in C$, ou à $H - p - q$, où p et q sont deux points distincts de C ayant même image dans $\mathbf{P}^2$. On exclut le premier cas comme ci-dessus; dans le second on obtient que a est de la forme $\tilde{p}' - \tilde{p}'' + \tilde{q}' - \tilde{q}''$, avec $\pi^{-1}(p) = \{\tilde{p}', \tilde{p}''\}$ et $\pi^{-1}(q) = \{\tilde{q}', \tilde{q}''\}$. On conclut que $V(\Gamma_{00})$ est *fini* (sous les hypothèses $d \geqq 8$, $\delta \leqq d - 3$ et $h^0(2H + \eta) = 0$). On obtient ainsi pour tout $g \geqq 17$ une courbe C de genre g et un élément d'ordre 2 de JC tel que l'ensemble $V(\Gamma_{00})$ de la variété de Prym associée (qui est de dimension $g - 1$) soit fini. On peut descendre à $g \leqq 15$ en prenant pour C une courbe plane lisse de degré 7 (prop. 2) ou une courbe de bidegré (5,5) dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ (*cf.* remarque ci-dessous). Cela achève la démonstration de la proposition 3. ■

Remarque. — Soit C une courbe lisse dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$, de bidegré (p, q); notons F et G les pinceaux sur C définis par les deux projections de C sur $\mathbf{P}^1$. Soit η un élément d'ordre 2 de JC, satisfaisant à $h^0(2F + G + \eta) = h^0(F + 2G + \eta) = 0$. Une démonstration tout à fait analogue à celle de la proposition 2 montre qu'on a alors $V(\Gamma_{00}) = \{0\}$ pour la variété de Prym associée à (C, η). On peut trouver un couple (C, η) satisfaisant aux hypothèses ci-dessus pourvu que p et q soient $\geqq 5$, ou qu'on ait $p = 4$ et $q \geqq 8$. On en déduit que *si* $g \geqq 19$ *et si* g *n'est pas de la forme* $p - 1$ *ou* $2p - 1$, *avec* p *premier, il existe une variété abélienne principalement polarisée de dimension* g *satisfaisant à* $V(\Gamma_{00}) = \{0\}$.

Note reçue et acceptée le 4 juillet 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Geometry of algebraic curves I*, Grund. der math. Wiss., 267, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1985.

[2] A. BEAUVILLE, Sous-variétés spéciales des variétés de Prym, *Compositio math.*, 45, 1982, p. 357-383.

[3] A. BEAUVILLE, Les singularités du diviseur Θ de la jacobienne intermédiaire de l'hypersurface cubique dans $\mathbf{P}^4$, *Algebraic threefolds*, Proc. Varenna, 1981, p. 190-208, *Lecture Notes in Math.*, n° 947, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

[4] O. DEBARRE, Sur les variétés de Prym des courbes tétragonales, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* (à paraître).

[5] R. DONAGI, The Schottky problem, *Notes du C.I.M.E.*, 1985, Montecatini (à paraître).

[6] B. VAN GEEMEN et G. VAN DER GEER, Kummer varieties and the moduli spaces of abelian varieties, *Amer. J. of Math.*, 108, 1986, p. 615-642.

[7] D. MUMFORD, Prym varieties I, *Contributions to Analysis*, Academic Press, New York, 1974, p. 325-350.

[8] G. WELTERS, The surface C−C on Jacobi varieties and 2nd order theta functions, *Acta math.*, 157, 1986, p. 1-22.

A. B. et O. D. : *Mathématiques*, Bât. n° 425, *Université Paris-Sud*, 91405 *Orsay Cedex;*

R. D. : *Department of Mathematics, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA* 19104, *U.S.A.;*

G. van der G. : *Mathematisch Instituut, Universiteit van Amsterdam, Roetersstraat* 15, 1018 *WB Amsterdam, Pays-Bas.*