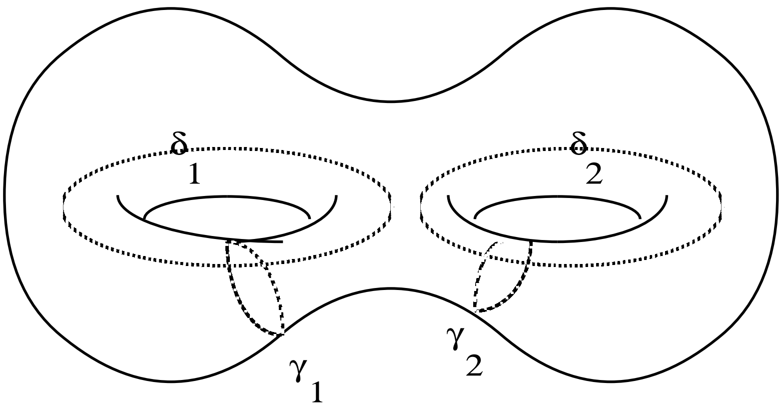
LE PROBLÈME DE SCHOTTKY: UNE INTRODUCTION

Arnaud Beauville

1. La formulation originale

On désigne dans ce qui suit par X une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. Topologiquement, X est donc un tore à g trous (cf. figure); on se donne en plus une *structure complexe* sur X , c'est-à-dire qu'on dispose, au voisinage de chaque point de X , d'une coordonnée complexe z , avec la condition de compatibilité habituelle: dans un ouvert de X où deux telles coordonnées sont définies, chacune d'elles est fonction holomorphe de l'autre. On peut alors parler de fonction holomorphe sur (un ouvert de) X, de forme holomorphe sur X (qui s'écrit localement $f(z)\,dz$, avec f holomorphe), etc...

On se propose de classifier, à isomorphisme près, l'ensemble de ces structures complexes. Il y en a beaucoup: cet ensemble admet une structure naturelle de variété algébrique complexe, de dimension 3g-3 (pour $g \geq 2$) qu'on appelle aujourd'hui *l'espace des modules* des surfaces de Riemann de genre g , et qu'on note $\mathfrak{M}_g$. Bien que notre connaissance de cette variété ait beaucoup progressé, le problème de la décrire explicitement reste encore largement ouvert. Je vais expliquer ici une approche possible, qui remonte à Riemann.



Il est classique que l'espace vectoriel des formes holomorphes sur X est de dimension g . Choisissons une base $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ de cet espace. Choisissons d'autre part une *base symplectique* $(\gamma_1,\ldots,\gamma_g\,;\,\delta_1,\ldots,\delta_g)$ du groupe d'homologie $H_1(X,\mathbf{Z})$; cela signifie (voir figure) que l'on a $\gamma_i\,.\,\delta_i = -\delta_i\,.\,\gamma_i = 1$, et que les autres produits d'intersection sont nuls.

On associe à ces données $2g^2$ nombres complexes, les *périodes* , définis par

$$\sigma_{ij} = \int_{\gamma_i} \omega_j \quad , \quad \tau_{ij} = \int_{\delta_i} \omega_j \quad .$$

(Il faut observer que, puisque les formes holomorphes sont fermées, l'intégrale sur un lacet d'une telle forme ne dépend que de la classe d'homologie du lacet.)

Ces nombres dépendent de la structure complexe de X, mais aussi des bases $(\gamma_1,\dots,\gamma_g ; \delta_1 ,\dots,\delta_g)$ et $(\omega_1,\dots , \omega_g)$. On se débarrasse de ce dernier choix de la façon suivante: on montre facilement qu'il existe une unique base (ω_j) qui vérifie $\int_{\gamma_i} \omega_j = 0$ pour $i\neq j$, et $\int_{\gamma_i} \omega_i = 1$. Les périodes restantes τ_{ij} forment une matrice carrée $\tau \in M_g(\mathbf{C})$, qui ne dépend que de X et de la base (γ_i , δ_j), et qu'on appelle la matrice des périodes. Riemann a montré que cette matrice est *symétrique* et que sa partie imaginaire est *positive non dégénérée* (c'est-à-dire qu'on a ${}^t v \,\mathrm{Im}(\tau)\, v > 0$ pour tout vecteur non nul $v \in \mathbf{C}^g$).

On appelle *demi-espace de Siegel* l'ensemble H_g des matrices $\tau \in M_g(\mathbf{C})$ qui sont symétriques et dont la partie imaginaire est positive non dégénérée. C'est un ouvert de l'espace vectoriel (complexe) des matrices symétriques d'ordre g , dont la dimension est $g(g+1)/2$. La matrice des périodes τ associée à X et à la base (γ_i , δ_j) appartient donc à H_g .

Il n'est pas difficile d'établir comment varie τ lorsqu'on change la base symplectique. Le *groupe symplectique* $\Gamma_g = \mathrm{Sp}(2g ,\mathbf{Z})$ est le groupe des matrices $\gamma\in M_{2g}(\mathbf{Z})$ satisfaisant à ${}^\tau\gamma E\gamma = E$, avec $E = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$. Ce groupe opère sur H_g de la façon suivante: soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de Γ_g , avec a,b, c, d dans $M_g(\mathbf{Z})$, et soit $\tau\in H_g$. On pose $\gamma.\tau = (a\tau+b)(c\tau+d)^{-1}$. On définit ainsi une action de Γ_g sur H_g ; un changement de base symplectique modifie τ par une transformation de Γ_g . On a donc associé à X un élément du quotient $\mathfrak{A}_g := H_g/\Gamma_g$. Autrement dit, on a défini une application $\wp : \mathfrak{M}_g \to \mathfrak{A}_g$, *l'application des périodes* (rappelons que $\mathfrak{M}_g$ désigne l'ensemble des classes d'isomorphisme de surfaces de Riemann de genre g).

L'action du groupe discret Γ_g sur H_g est suffisamment bonne pour que $\mathfrak{A}_g$ ait une structure analytique quotient de celle de H_g – c'est même une *variété algébrique* (avec des singularités). On montre aussi que $\mathfrak{M}_g$ est algébrique, ainsi que l'application $\wp$. En fait, on sait que $\wp$ est un plongement (théorème de Torelli). La dimension de $\mathfrak{A}_g$ est celle de H_g , c'est-à-dire $g(g+1)/2$. Nous avons vu que $\mathfrak{M}_g$ est de dimension $3g - 3$ (pour $g \geq 2$); ce nombre est égal à $g(g+1)/2$ pour $g = 2$ et 3, mais lui est strictement inférieur dès que $g \geq 4$. Il doit donc exister (pour $g \geq 4$) des relations qui sont satisfaites par les matrices de périodes de surfaces de

Riemann, mais pas par n'importe quelle matrice de H_g. Le problème de Schottky consiste à expliciter ces relations. De manière un peu plus vague, il s'agit de donner des critères pour qu'une matrice $\tau \in H_g$ soit la matrice des périodes d'une surface de Riemann.

2. Traduction géométrique

On appelle *variété abélienne principalement polarisée* (v.a.p.p. en abrégé) un couple (A, Θ), où A est un tore complexe (quotient d'un espace vectoriel complexe par un réseau) et Θ une hypersurface dans A, définie à translation près. On exige en outre que le diviseur Θ satisfasse à certaines conditions techniques (" Θ est ample et $\dim H^0(A, \mathcal{O}_A(\Theta)) = 1$"), que l'on peut exprimer en disant que la seule manière de déformer Θ algébriquement est de le translater par un élément (non nul) de A, et qu'une telle translation ne peut laisser Θ stable.

On associe à une matrice $\tau \in H_g$ une v.a.p.p. (A_τ, Θ_τ) de la manière suivante. Le $\mathbf{Z}$-module $L_\tau = \mathbf{Z}^g \oplus \tau\mathbf{Z}^g$ est un réseau dans $\mathbf{C}^g$; on pose $A_\tau = \mathbf{C}^g / L_\tau$. On définit une fonction holomorphe θ sur $\mathbf{C}^g \times H_g$ par la série

$$\theta(z, \tau) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^g} e^{\pi i({}^t m \tau m + 2\,{}^t m z)}$$

(qui converge grâce à l'hypothèse sur $\mathrm{Im}(\tau)$). Lorsque τ est fixée, on écrit plus simplement $\theta(z)$ au lieu de $\theta(z,\tau)$. On a

$$\theta(z+p+\tau q) = \theta(z) \exp(-\pi i({}^t q \tau q + 2\,{}^t q z) \qquad \text{pour } p, q \text{ dans } \mathbf{Z}^g,$$

de sorte que l'hypersurface $\theta = 0$ dans $\mathbf{C}^g$ est invariante sous l'action de L_τ. Elle provient donc d'une hypersurface Θ_τ dans A_τ. La théorie des fonctions thêta montre que (A_τ, Θ_τ) est une v.a.p.p., et qu'on obtient ainsi, à isomorphisme près, toutes les v.a.p.p. de dimension g ; de plus, deux matrices τ et τ' de H_g fournissent des v.a.p.p. isomorphes si et seulement s'il existe un élément γ de Γ_g tel que $\tau' = \gamma.\tau$. Ainsi la variété $\mathfrak{A}_g$ paramètre de manière naturelle l'ensemble des classes d'isomorphisme de v.a.p.p. de dimension g : on dit que c'est *l'espace des modules* des v.a.p.p. de dimension g.

Je voudrais m'arrêter un instant sur cette correspondance, pour souligner son caractère remarquable. À un objet concret et calculable (une matrice complexe, modulo l'action d'un groupe discret), on associe un objet géométrique extrêmement riche: non seulement un tore complexe (qui, en soi, n'a guère de géométrie), mais surtout une hypersurface contenue dans ce tore. On peut alors considérer les singularités de cette hypersurface, son intersection avec un translaté, etc... Malheureusement (ou heureusement: c'est ce qui fait l'intérêt de ces questions), on ne peut généralement rien dire de cette géométrie à partir de la seule matrice τ.

Si maintenant τ est la matrice des périodes d'une surface de Riemann X, la v.a.p.p. (A_τ, Θ_τ) n'est autre que la *jacobienne* (JX, Θ) de X. Elle se décrit géométriquement comme suit. On note $\mathrm{Div}(X)$ le $\mathbf{Z}$-module libre de base X; un élément de $\mathrm{Div}(X)$, qu'on appelle un *diviseur* sur X, est donc une somme finie $\sum n_p[p]$ $(p \in X, n_p \in \mathbf{Z})$. Le nombre entier $\sum n_p$ est le *degré* du diviseur. Si f est une fonction méromorphe sur X, le diviseur $\mathrm{div}(f)$ de f est la somme des zéros de f moins la somme de ses pôles (comptés chacun avec leur multiplicité). Cela étant, la jacobienne JX paramètre les diviseurs de degré zéro sur X, modulo les diviseurs de fonctions méromorphes; l'hypersurface Θ paramètre les classes de diviseurs de la forme $[p_1]+\ldots+[p_{g-1}] - \Delta$, où Δ est un diviseur fixé de degré $g-1$ sur X. Dans l'espace des modules $\mathfrak{A}_g$, les jacobiennes forment une sous-variété $\mathfrak{J}_g$, de dimension $3g-3$. Cette sous-variété n'est pas fermée, mais elle le devient lorsqu'on convient de lui incorporer les produits d'un nombre fini de jacobiennes – ce que nous ferons désormais. On a $\mathfrak{J}_g = \mathfrak{A}_g$ pour $g \le 3$, mais l'inclusion est stricte dès que $g \ge 4$.

Géométriquement, le problème de Schottky consiste donc à caractériser les jacobiennes parmi toutes les v.a.p.p., ou encore à décrire la sous-variété $\mathfrak{J}_g$ de $\mathfrak{A}_g$.

3. L'approche analytique

Le problème de Schottky a d'abord été étudié d'un point de vue analytique: on cherche à écrire des équations de $\mathfrak{J}_g$ dans $\mathfrak{A}_g$, de préférence à l'aide de *formes modulaires.* Une forme modulaire de poids k pour un sous-groupe Λ de Γ_g est une fonction holomorphe f sur H_g satisfaisant à $f(\gamma.\tau) = (\det(c\tau+d))^k f(\tau)$ pour tout élément $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de Λ.

La théorie des fonctions thêta fournit des fonctions de ce type, par exemple les *thêta-constantes*

$$\theta\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}(\tau) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^g} \exp \pi i \left[{}^t(m+p)\tau(m+p) + 2\,{}^t(m+p)q \right]$$

$$= \theta(q+tp)\exp(\pi i({}^tptp + 2{}^tpq) \qquad \text{pour } p,q \in \mathbf{Z}^g .$$

Ces fonctions sont des formes modulaires de poids $1/2$ pour un sous-groupe d'indice fini de Γ_g , noté $\Gamma_g(4,8)$. Igusa [I1] a montré qu'elles définissent des coordonnées projectives sur le quotient $H_g/\Gamma_g(4,8)$. Il en résulte que toute sous-variété fermée de $\mathfrak{A}_g$ peut être définie par des polynômes en les thêta-constantes; il s'agit de déterminer effectivement ces polynômes dans le cas de $\mathfrak{J}_g$.

Le premier résultat dans cette direction est dû à Schottky, en genre 4 : en 1888, il met en évidence [S] un polynôme de degré 16 en les thêta-constantes, qui est une forme modulaire de poids 8 sous Γ_4 , s'annulant identiquement sur $\mathfrak{J}_4$ mais non sur $\mathfrak{A}_4$ (le polynôme de Schottky s'écrit $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 - r_2r_3 - r_1r_3 - r_1r_2$, où chaque r_i est un produit de 8 thêta-constantes convenablement choisies). Schottky semble considérer comme évident que ce polynôme définit exactement $\mathfrak{J}_4$; en fait, cette propriété n'a été démontrée que récemment par Igusa ([I2], cf. aussi [F]).

En 1909, Schottky et Jung [S-J] donnent un procédé systématique pour écrire des polynômes en les thêta-constantes s'annulant sur $\mathfrak{J}_g$, à partir d'identités satisfaites par les thêta-constantes générales en dimension $g-1$ (les relations de Schottky-Jung sont une conséquence facile de la théorie des variétés de Prym, cf. [M]). L'ensemble des équations obtenues par ce procédé définit une sous-variété $\mathfrak{S}_g$ de $\mathfrak{A}_g$, qui contient $\mathfrak{J}_g$. On conjecture qu'on a $\mathfrak{S}_g = \mathfrak{J}_g$; c'est ce qu'on pourrait appeler le "vrai" problème de Schottky. Pour $g = 4$ c'est le résultat d'Igusa cité plus haut. Van Geemen a démontré que $\mathfrak{J}_g$ *est toujours une composante irréductible de* $\mathfrak{S}_g$ [vG] : cela signifie que $\mathfrak{S}_g$ est réunion de $\mathfrak{J}_g$ et éventuellement d'autres sous-variétés qui ne contiennent pas $\mathfrak{J}_g$, autrement dit que $\mathfrak{S}_g$ coïncide avec $\mathfrak{J}_g$ au voisinage d'un point général de $\mathfrak{J}_g$. D'autre part, Donagi indique dans [*Do*] les grandes lignes d'une démonstration de l'égalité $\mathfrak{S}_5 = \mathfrak{J}_5$.

Malheureusement les équations de $\mathfrak{S}_g$ ne sont pas explicites; le problème vient de ce qu'on ne connait pas l'ensemble des identités satisfaites par les thêta-constantes générales.

4. L'approche géométrique

Un point de vue un peu différent consiste à chercher des *caractérisations géométriques* des jacobiennes, conduisant si possible à des équations pour $\mathfrak{J}_g$. Je signale au passage que ce type de caractérisation joue un rôle important dans les questions de rationalité des variétés de dimension 3 (voir par exemple [M-B]).

a) Singularités du diviseur Θ

Soient X une surface de Riemann de genre g, et (JX, Θ) sa jacobienne. La description explicite de Θ (§2) permet de paramétrer l'ensemble $\mathrm{Sing}(\Theta)$ des points singuliers de Θ en termes de diviseurs spéciaux sur X (théorème des singularités de Riemann); on en déduit facilement l'inégalité $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g-4$ (plus précisément, $\mathrm{Sing}(\Theta)$ est de dimension $g-4$ si X n'est pas hyperelliptique, $g-3$ sinon). Désignons alors par $\mathfrak{N}_{g-4}$ la sous-variété de $\mathfrak{J}_g$ formée des v.a.p.p. (A,Θ) pour lesquelles $\dim \mathrm{Sing}(\Theta) \geq g-4$; Andreotti et Mayer ont prouvé que $\mathfrak{J}_g$ *est une composante irréductible de* $\mathfrak{N}_{g-4}$. Ils donnent de plus un procédé théoriquement explicite (mais pratiquement très compliqué) pour écrire des équations de $\mathfrak{N}_{g-4}$ en termes des thêta-constantes et de leurs dérivées premières.

Malheureusement l'ensemble $\mathfrak{N}_{g-4}$ a d'autres composantes que $\mathfrak{J}_g$. En genre 4, $\mathfrak{N}_0$ est réunion de $\mathfrak{J}_4$ et de l'hypersurface θ_{null} formée des v.a.p.p. pour lesquelles une thêta-constante s'annule [B]. En genre 5, $\mathfrak{N}_1$ a 5 composantes, que l'on sait décrire explicitement ([Do1], [D1]). En genre ≥ 6, on dispose d'une liste de composantes de $\mathfrak{N}_{g-4}$ [D1], mais on ignore si cette liste est complète.

b) Réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a$ et trisécantes

Dans l'article [We], Weil démontrait le théorème de Torelli (§1) à partir de l'observation suivante. Notons comme d'habitude X une surface de Riemann de genre g, (JX, Θ) sa jacobienne, p, q deux points distincts de X. Le diviseur $[p]-[q]$ définit un point de JX, que nous noterons simplement $p-q$. Alors l'intersection(1) $\Theta \cap \Theta_{p-q}$ est *réductible* : elle est réunion de deux composantes V_p et W_q, où V_p ne dépend que de p et W_q que de q. En particulier, quels que soient r,s dans X, on a

(1) $$\Theta \cap \Theta_{p-q} \subset \Theta_{p-r} \cup \Theta_{s-q} \quad .$$

Soit alors (A,Θ) une v.a.p.p. quelconque; pour éviter des complications sans intérêt nous supposerons que (A,Θ) est *indécomposable*, c'est-à-dire qu'elle n'est pas produit de deux v.a.p.p

(1)Pour toute v.a.p.p. (A,Θ), on note Θ_a le translaté $\Theta+a$ de Θ .

non triviales. Soient a,x,y des éléments distincts non nuls de A. Considérons la condition

(1) $$\Theta\cap\Theta_a \subset \Theta_x\cup\Theta_y \quad .$$

Ecrivons notre v.a.p.p. sous la forme (A_τ, Θ_τ), avec $\tau\in H_g$. La condition (2) se traduit alors analytiquement par une équation aux différences pour la fonction θ : *il existe des nombres complexes non nuls* l, m, n *tels qu'on ait l'identité*

(3) $$l\,\theta(z)\,\theta(z-x-y) + m\,\theta(z-a)\,\theta(z+a-x-y) + n\,\theta(z-x)\,\theta(z-y) = 0 \quad .$$

(On note abusivement par la même lettre un point de A_τ et un antécédent arbitraire de ce point dans $\mathbf{C}^g$.)

Il est clair que (3) implique (2) : si $z\in\Theta\cap\Theta_a$, on a $\theta(z) = \theta(z-a) = 0$, de sorte que (3) entraîne $\theta(z-x) = 0$ ou $\theta(z-y) = 0$, c'est-à-dire $z\in\Theta_x\cup\Theta_y$. L'implication opposée fait intervenir quelques suites exactes.

Nous allons maintenant retraduire géométriquement (3) à l'aide des fonctions thêta du second ordre. Ce sont les fonctions holomorphes f sur $\mathbf{C}^g$ telles que f/θ^2 soit périodique par rapport au réseau L_τ ; elles forment un espace vectoriel de dimension 2^g sur $\mathbf{C}$. Il existe une base $(\psi_0,\ldots,\psi_N)$ de cet espace $(N = 2^g-1)$ satisfaisant à la formule suivante (*formule d'addition de Riemann*) : pour z,u dans $\mathbf{C}^g$, on a

$$\theta(z+u)\,\theta(z-u) = \sum_i \psi_i(z)\,\psi_i(u) \quad .$$

On définit un morphisme ψ de A dans l'espace projectif $\mathbf{P}^N$ en posant $\psi(z) = (\psi_0(z): \ldots : \psi_N(z))$. L'image de ψ est la *variété de Kummer* $K(A,\Theta)$, isomorphe à $A/\{\pm 1\}$. Soit z un point de A tel que $2z = x+y$. En exprimant (3) à l'aide de la formule d'addition de Riemann, on obtient la condition équivalente

(4) *les points* $\psi(z)$, $\psi(z-a)$ *et* $\psi(z-x)$ *de* $\mathbf{P}^N$ *sont alignés.*

L'inclusion (1) entraîne que cette propriété est vérifiée pour la jacobienne d'une surface de Riemann X, lorsque $a = p-q$, $x = p-r$, $2z = p-q-r+s$, avec p, q, r, s dans X. La variété de Kummer d'une jacobienne admet donc une famille de dimension 4 de trisécantes. Je pense en fait, à la suite de G.Welters, que l'existence d'une seule trisécante devrait suffire à caractériser les jacobiennes:

<u>Conjecture de la trisécante</u>.- *Soit* (A,Θ) *une v.a.p.p. indécomposable. Si la variété de Kummer* $K(A,\Theta)$ *admet une trisécante,* (A,Θ) *est une jacobienne.*

Voici quelques arguments en faveur de cet énoncé. J'ai prouvé avec O.Debarre [B-D] que *l'existence d'une trisécante à* $K(A,\Theta)$ *entraîne* $\dim\ \mathrm{Sing}(\Theta)\geq g-4$; compte tenu du théorème d'Andreotti-Mayer, il en résulte au moins que $\mathfrak{J}_g$ est une composante de l'ensemble des v.a.p.p. admettant une trisécante. En s'appuyant sur ce résultat, Debarre a démontré l'énoncé ci-dessus lorsqu'on suppose de plus que (A,Θ) est une variété de Prym [D2] (les variétés de Prym sont des v.a.p.p. définies géométriquement à l'aide d'une surface de Riemann X et d'un revêtement étale double de X; elles forment une famille plus générale que les jacobiennes). Cela entraîne en particulier la conjecture lorsque la dimension de A est ≤ 5 (toute v.a.p.p. de dimension ≤ 5 est une variété de Prym).

D'autre part, on peut affaiblir la conjecture en essayant de caractériser les jacobiennes par l'existence d'une famille assez grande de trisécantes. Des résultats de ce type ont été obtenus d'abord par Gunning [G], puis raffinés par Welters [W1,W2] . Je vais me contenter de citer le plus facile à énoncer, dû à Welters [W1] : *si* $K(A,\Theta)$ *admet une famille continue de trisécantes, et si* $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) = g-4$, *alors* (A,Θ) *est une jacobienne* (nécessairement non hyperelliptique).

Enfin, *l'analogue infinitésimal* de la conjecture est démontré: c'est l'ex-conjecture de Novikov, que je vais maintenant discuter.

c) L'ex-conjecture de Novikov

A condition de prendre quelques précautions, les conditions (2) à (4) ci-dessus gardent un sens lorsqu'on fait tendre les points a,x,y vers 0. Le point a devient un vecteur tangent à l'origine, qu'on peut identifier à un champ de vecteurs constant D_1 sur $\mathbf{C}^g$. La variété $\Theta\cap\Theta_a$, définie par les équations $\theta(z) = \theta(z-a) = 0$, se spécialise en la variété $\Theta\cap\Theta_{D_1}$ définie par $\theta(z) = D_1\theta(z) = 0$. L'inclusion (2), qui signifie que $\theta(z-x)\theta(z-y)$ s'annule sur $\Theta\cap\Theta_a$, devient

(2') *il existe un champ de vecteurs constant* D_2 *sur* $\mathbf{C}^g$ *tel que la fonction*

$(D_1^2\theta + D_2\theta)(D_1^2\theta - D_2\theta)$ *s'annule sur* $\Theta\cap\Theta_{D_1}$.

De la même façon qu'on prouve l'équivalence de (2) et (3), on montre que (2') équivaut à

(3') *il existe des champs de vecteurs constants* D_1 , D_2 , D_3 *sur* $\mathbf{C}^g$ *tels que la fonction* $u = D_1^2 \log\theta$ *satisfasse à l'équation aux dérivées partielles*

(K–P) $$D_1(D_1^3u + u\, D_1u + D_2u) = D_3^2u \,.$$

Cette équation non linéaire, dite de Kadomtsev-Petviashvili, a été d'abord introduite en physique comme équation d'ondes (c'est une généralisation de l'équation de Korteweg-de Vries, à laquelle elle se réduit lorsque D_3 est nul). Elle joue un rôle clé dans les travaux récents de l'école japonaise, cf. par exemple [V] . Novikov avait conjecturé, et Shiota a démontré [Sh], que la condition (3') caractérise les jacobiennes. Une démonstration plus géométrique a été donnée par Arbarello-DeConcini [A-D] . Très schématiquement, leur idée est d'utiliser la condition (4') obtenue en spécialisant (4) et de montrer qu'elle entraîne l'existence d'une famille de trisécantes (plus précisément, de droites d'inflexion) assez grande pour qu'on puisse appliquer le critère [W2] de Welters. Pour plus de détails je ne peux que renvoyer le lecteur à [A-D] , ou à [*B*] pour un résumé.

d) Autres approches

Un lien entre les approches analytique et géométrique a été développé dans [vGvG] et perfectionné par Donagi [*Do*] . En particulier, Donagi propose une conjecture qui décrit exactement l'adhérence de $\mathfrak{S}_g$ (§3) dans une compactification convenable de $\mathfrak{A}_g$. Cette conjecture entraîne, non seulement la solution du "vrai" problème de Schottky ($\mathfrak{S}_g = \mathfrak{J}_g$), mais aussi la conjecture de Novikov (et même un résultat plus fort, qui n'est pas connu à l'heure actuelle), ainsi que les conjectures de [vGvG] . Disons tout de suite que cette conjecture parait tout-à-fait inaccessible à l'heure actuelle...

Enfin, faute de place, je dois me contenter de citer en vrac les références [L], [R], [M-P], qui considèrent d'autres approches du problème de Schottky.

BIBLIOGRAPHIE

A. Articles d'exposition

Les notes ci-dessus développent la première partie de

[*B*] A. BEAUVILLE: Le problème de Schottky et la conjecture de Novikov. Exp. 675 du Sém. Bourbaki, Astérisque 152-153 (1988), 101-112.

Deux autres articles d'exposition:

[*Do*] R. DONAGI: The Schottky problem. Notes du CIME 1985 (Montecatini), à paraître.

[*vG*] B. VAN GEEMEN: The Schottky problem. Arbeitstagung Bonn 1984, Springer-Verlag Lecture Notes 1111 (1985), 385-406.

Enfin il est toujours plaisant, ne serait-ce que pour mesurer l'évolution du sujet dans les dix dernières années, de relire:

[*M*] D. MUMFORD: Curves and their Jacobians. Univ. of Michigan Press, Ann Arbor (1975).

B. Articles cités dans le texte

[A-D] E. ARBARELLO, C. DE CONCINI: Another proof of a conjecture of S.P. Novikov on periods of Abelian integrals on Riemann surfaces. Duke math. J. 54 (1987), 163-178.

[A-M] A. ANDREOTTI, A. MAYER: On period relations for Abelian integrals on algebraic curves.Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 21 (1967),189-238.

[B] A. BEAUVILLE: Prym varieties and the Schottky problem. Invent. math. 86 (1977), 149-196.

[B-D] A. BEAUVILLE, O. DEBARRE: Une relation entre deux approches du problème de Schottky. Invent. math. 86 (1986), 195-207.

[D1] O. DEBARRE: Sur les variétés abéliennes dont le diviseur Θ est singulier en codimension 3. Duke math. J., à paraître.

[D2] O. DEBARRE: La conjecture de la trisécante pour les variétés de Prym. A paraître.

[Do1] R. DONAGI: The tetragonal construction. Bull. Amer. Math. Soc. 4 (1981), 181-185.

[Do2] R. DONAGI: Non-Jacobians in the Schottky loci. Ann. of Math. 126 (1987), 193-217.

[F] E. FREITAG: Die Irreduzibilität der Schottkyrelation (Bemerkung zu einem Satz von J.

Igusa). Arch. Math. 40 (1983), 255-259.

[G] R. GUNNING: Some curves in Abelian varieties. Invent. math. 66 (1982), 377-389.

[vG] B. VAN GEEMEN: Siegel modular forms vanishing on the moduli space of curves. Invent. math. 78 (1984), 329-349.

[vGvG] B. VAN GEEMEN, G. VAN DER GEER: Kummer varieties and the moduli spaces of abelian varieties. Amer. J. of Math. 108 (1986), 615-642.

[I1] J. IGUSA: Theta functions. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York (1972).

[I2] J. IGUSA: On the irreducibility of Schottky's divisor. J. Fac. Sci. Tokyo 28 (1981), 531-545.

[L] J. LITTLE: Translation manifolds and the converse of Abel's theorem. Comp. math. 49 (1983), 147-171.

[M] D. MUMFORD: Prym varieties I. Contributions to Analysis, Academic Press, New York (1974), 325-350.

[M-B] L. MORET-BAILLY: Variétés stablement rationnelles non rationnelles. Exp. 643 du Sém. Bourbaki, Astérisque 133-134 (1986), 223-236.

[M-P] J. MUÑOZ PORRAS: Geometric characterization of Jacobians and the Schottky problem. A paraître.

[R] Z. RAN: On subvarieties of abelian varieties. Invent. math. 62 (1981), 459-479.

[S] F. SCHOTTKY: Zur theorie der Abelschen Funktionen von vier Variabeln. J. Reine Angew. Math. 102 (1888), 304-352.

[S-J] F. SCHOTTKY, H. JUNG: Neue Sätze über Symmetralfunktionen und die Abel'schen Funktionen der Riemann'schen Theorie. Sitzungsberichte Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys. Math. Kl. 1 (1909), 282-297 et 732-750.

[Sh] T. SHIOTA: Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations. Invent. math. 83 (1986), 333-382.

[V] J.-L. VERDIER: Les représentations des algèbres de Lie affines: applications à quelques problèmes de physique. Exp. 596 du Sém. Bourbaki, Astérisque 92-93 (1982), 365-377.

[W1] G.WELTERS: A characterization of non-hyperelliptic Jacobi varieties. Invent. math. 71 (1983), 437-440.

[W2] G. WELTERS: A criterion for Jacobi varieties. Ann. of Math.120 (1984), 497-504.

Arnaud Beauville

Mathématiques-Bât.425

91405Orsay Cedex, France