Invent. math. 86, 195–207 (1986)

Inventiones mathematicae

Une relation entre deux approches du problème de Schottky

Arnaud Beauville et Olivier Debarre

Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Mathématiques, F-91405 Orsay Cedex, France

Introduction

Le problème de Schottky est la question de caractériser les jacobiennes parmi toutes les variétés abéliennes. Plus précisément, soit $\mathscr{A}_g$ l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g. Les jacobiennes forment une sous-variété $\mathscr{J}_g$ de $\mathscr{A}_g$, et il s'agit de trouver des équations de $\mathscr{J}_g$ (ou de son adhérence $\bar{\mathscr{J}}_g$) dans $\mathscr{A}_g$.

Parmi les approches géométriques de ce problème, deux méthodes se sont révélées particulièrement fructueuses:

1) *L'approche d'Andreotti-Mayer*, qui utilise les singularités du diviseur Θ. Ces auteurs prouvent que $\bar{\mathscr{J}}_g$ est une composante irréductible de la sous-variété $\mathscr{N}_{g-4}$ de $\mathscr{A}_g$ formée des variétés abéliennes principalement polarisées (A, Θ) telles que $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) \geqq g-4$ [A-M].

2) *L'approche basée sur la réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a$*. Elle repose sur l'observation, déja utilisée par Weil, que pour la jacobienne (JC, Θ) d'une courbe C l'intersection $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible lorsque a est de la forme $p-q$, avec $p, q \in C$. Plus précisément, pour p, q, r, s distincts dans C, on a $\Theta \cap \Theta_{p-q} \subset \Theta_{p-r} \cup \Theta_{s-q}$. Ceci conduit à considérer, pour une variété abélienne principalement polarisée (A, Θ), un certain nombre de conditions, qui sont satisfaites lorsque (A, Θ) est une jacobienne:

(i) Il existe un élément non nul a de A tel que $\Theta \cap \Theta_a$ soit réductible.

(ii) Il existe trois éléments distincts non nuls a, x, y de A tels qu'on ait $\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$.

(iii) La variété de Kummer de (A, Θ) admet une trisécante.

(iv) La fonction thêta associée à (A, Θ) verifie une certaine équation aux dérivées partielles non linéaire, dite équation K-P (voir (2.9) pour une formulation précise).

Ces conditions et leurs relations mutuelles ont été beaucoup étudiées récemment, notamment dans [W2, W3, A-C] (plus exactement, ces auteurs renforcent les conditions (ii) et (iii) en imposant l'existence de familles de dimension un de trisécantes ou de triplets (a, x, y) satisfaisant à (ii)).

Le but de cet article est de mettre en évidence un lien entre les deux approches que nous venons d'évoquer. Nous démontrons en effet que *chacune des conditions* (ii), (iii) *et* (iv) *ci-dessus entraîne la condition d'Andreotti-Mayer* $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) \geqq g-4$. De plus, *une variété abélienne principalement polarisée* (A, Θ) *qui vérifie* (i) *satisfait à la condition d'Andreotti-Mayer ou contient une courbe elliptique* E *avec* $(\Theta \cdot E)=2$. On déduit immédiatement de ces résultats et du théorème d'Andreotti-Mayer que $\bar{\mathscr{J}}_g$ *est une composante de l'ensemble des variétés abéliennes principalement polarisées satisfaisant à l'une des conditions* (i) *à* (iv).

Le point de départ de la démonstration consiste à remarquer que la condition $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) < g-4$ implique que la variété Θ est localement factorielle; la réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a$ se traduit alors par une décomposition de $\Theta_a|_\Theta$ en somme de diviseurs de Cartier effectifs dans Θ. A cause de l'isomorphisme $\operatorname{Pic}(A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}(\Theta)$, l'existence d'une telle décomposition est très contraignante: on montre au § 1 qu'elle équivaut à dire que A contient une courbe elliptique E avec $(\Theta \cdot E)=2$ et $a \in E$. On en déduit au § 2 les résultats énoncés ci-dessus.

Remerciement. Nous remercions E. Arbarello de nous avoir signalé que la condition (iv) ci-dessus entraînait une forme de (i) et était donc justiciable de notre méthode.

§ 0. Notations et conventions

(0.1) Les variétés que nous considérons sont définies sur un corps algébriquement clos k (de caractéristique quelconque). Si D est un diviseur sur une variété X, on pose $H^i(X, D) = H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$ pour $i \geqq 0$. Le signe $\equiv$ dénote l'équivalence linéaire des diviseurs.

(0.2) Soit A une variété abélienne. Pour toute sous-variété Z de A et tout point a de A, on note Z_a la sous-variété $Z+a$. Soient D un diviseur sur A et $L = \mathcal{O}_A(D)$. On note φ_D ou φ_L l'homomorphisme de A dans la variété duale $\hat{A}$ défini par $\varphi_D(a) = \operatorname{cl}(D_a - D)$. Son noyau est noté $K(D)$ ou $K(L)$. Ces données ne dépendent que de la classe d'équivalence algébrique de D (ou de L).

Une *polarisation* sur A est la classe d'équivalence algébrique d'un diviseur ample Θ. Par abus de langage on notera encore Θ la polarisation définie par la classe de Θ. Le morphisme $\varphi_\Theta : A \to \hat{A}$ est alors une isogénie de degré d^2, avec $d = \dim H^0(A, \Theta) = \dfrac{\Theta^g}{g!}$ (on a posé $g = \dim A$). Le nombre d est appelé le degré de la polarisation; une polarisation principale est une polarisation de degré un.

(0.3) Soient V une variété algébrique, Z une sous-variété de V, L un faisceau inversible sur V; supposons donnés un champ de vecteurs X sur V et une section s de $H^0(V, L)$ *s'annulant sur* Z. Il existe alors une unique section Xs de $H^0(Z, L_{|Z})$ possédant la propriété suivante: pour tout ouvert U de V et tout isomorphisme $\lambda : \mathcal{O}_U \to L_{|U}$, on a $Xs = \lambda(X \lambda^{-1}(s))_{|Z}$ dans $Z \cap U$.

Soit maintenant (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée, et soit θ une section de $H^0(A, \Theta)$ de diviseur Θ; on déduit de ce qui précède un isomorphisme $\tau\colon H^0(A, T_A) \to H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(\Theta))$ défini par $\tau(X) = X\theta$. Via l'identification $T_0(A) = H^0(A, T_A)$, on associe ainsi à tout vecteur non nul a de $T^0(A)$ une section de $H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(\Theta))$; par abus de langage on notera $\Theta \cap \Theta_a$ le schéma des zéros de cette section dans Θ.

Si a est un élément non nul de A ou de $T_0(A)$, la sous-variété $\Theta \cap \Theta_a$ définit un diviseur (de Cartier) de Θ, que l'on notera $\Theta \cdot \Theta_a$.

§ 1. Réductibilité de $\Theta \cap \Theta_a$ dans Pic Θ

(1.1) Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée, et soit E une sous-variété abélienne de A. Notons K le noyau de l'homomorphisme composé $A \xrightarrow{\varphi_\Theta} \hat{A} \to \hat{E}$; c'est une sous-variété abélienne de A, qui s'identifie à $(A/E)^\wedge$. Soit $\pi\colon E \times K \to A$ l'isogénie définie par $\pi(e, k) = e + k$. Notons Θ_E et Θ_K les restrictions de Θ à E et K respectivement. On déduit du théorème du carré la relation

$$\pi^* \Theta \equiv pr_1^* \Theta_E + pr_2^* \Theta_K;$$

l'image réciproque sur $E \times K$ de la polarisation de A est donc la polarisation produit. On a

$$K(\Theta_E) = K(\Theta_K) = E \cap K,$$

tandis que Ker π est l'ensemble des éléments $(e, -e)$ pour $e \in E \cap K$. Les polarisations induites Θ_E et Θ_K ont donc même degré d. Le lemme suivant, démontré dans [D], résulte facilement de la théorie des groupes thêta de Mumford:

Lemme 1.1. *Soit θ une section non nulle de $H^0(A, \Theta)$. Il existe des bases $(s_1, \dots, s_d)$ et $(t_1, \dots, t_d)$ de $H^0(E, \Theta_E)$ et $H^0(K, \Theta_K)$ respectivement telles qu'on ait $\pi^* \theta = \sum_{i=1}^{d} s_i \otimes t_i$.* $\square$

(1.2) Le cas $\dim(E) = 1$ jouera un rôle particulier dans la suite. Posons $(\Theta \cdot E) = d$; alors la polarisation induite sur E est la polarisation de degré d. Le groupe $E \cap K$ est le groupe E_d des points d'ordre d de E; le noyau de π est donc isomorphe à $(\mathbf{Z}/d)^2$.

Si par exemple (A, Θ) est la jacobienne d'une courbe C, on déduit du plongement $C \subset JC$ et de l'homomorphisme $A \to \hat{E} = E$ un morphisme $r\colon C \to E$; on a $(C \cdot K) = \deg r = d$. Inversement, si E est une courbe elliptique et $r\colon C \to E$ un morphisme de degré d, on déduit de r un homomorphisme $\bar{r}\colon E \to JC$ et on a $\deg(\bar{r}^* \Theta) = d$.

Proposition 1.3. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée, et E une sous-variété abélienne de A telle que la polarisation induite Θ_E soit de degré 2. Soit e un élément non nul de E ou de $T_0(E)$. Il existe alors des diviseurs de Weil effectifs C et C' dans Θ tels qu'on ait $\Theta \cdot \Theta_e = C + C'$. Si de plus* $\dim(E) = 1$, *C et C' sont des diviseurs de Cartier dans Θ.*

(La notation $\Theta \cdot \Theta_e$ est expliquée en (0.3)).

Traitons d'abord le cas $e \in E$. Nous utilisons les notations de (1.1). D'après le lemme 1.1 il existe des bases (s_1, s_2) de $H^0(E, \Theta_E)$ et (t_1, t_2) de $H^0(K, \Theta_K)$ telles que $\pi^* \Theta$ soit le diviseur de la section $(x, y) \mapsto s_1(x)\, t_1(y) + s_2(x)\, t_2(y)$. La sous-variété $\pi^{-1}(\Theta \cap \Theta_e)$ est définie dans $E \times K$ par les équations

$$(*) \qquad \begin{cases} s_1(x)\, t_1(y) + s_2(x)\, t_2(y) = 0 \\ s_1(x-e)\, t_1(y) + s_2(x-e)\, t_2(y) = 0. \end{cases}$$

Elle est donc réunion des sous-variétés de codimension 2

$$\begin{cases} \tilde{C} = E \times B, \text{ où } B \text{ est le lieu fixe du système linéaire } |\Theta_K| (\text{défini par } t_1 = t_2 = 0) \\ \tilde{C}' \text{ définie par les équations } (*) \text{ et } s_1(x)\, s_2(x-e) - s_2(x)\, s_1(x-e) = 0. \end{cases}$$

Ces sous-variétés sont stables par $\operatorname{Ker} \pi$; il existe donc des diviseurs de Weil effectifs C et C' dans Θ tels qu'on ait $\tilde{C} = \pi^* C$, $\tilde{C}' = \pi^* C'$ et $\Theta \cdot \Theta_e = C + C'$.

Supposons maintenant $\dim(E) = 1$. L'équation $s_1(x)\, s_2(x-e) - s_2(x)\, s_1(x-e) = 0$ définit un diviseur $\sum \varepsilon_i$ sur E linéairement équivalent à $\Theta_E + (\Theta_E)_e$, donc de degré 4. On a $\tilde{C}' = \sum_{i=1}^{4} \{\varepsilon_i\} \times \Delta_i$, où Δ_i est le diviseur de la section $s_1(\varepsilon_i) t_1 + s_2(\varepsilon_i) t_2$ de $H^0(K, \Theta_K)$. Ainsi $\tilde{C}'$ est l'image réciproque par la projection $\pi^{-1}(\Theta) \to E$ du diviseur $\sum \varepsilon_i$; c'est donc un diviseur de Cartier dans $\pi^{-1}(\Theta)$. Par suite C' est un diviseur de Cartier dans Θ, et il en est de même de $C = \Theta \cdot \Theta_e - C'$.

Le cas où e est un vecteur tangent à E se traite de façon identique: la seconde équation de $(*)$ est remplacée par

$$s_1'(x)\, t_1(y) + s_2'(x)\, t_2(y) = 0,$$

où le signe $'$ indique la dérivation par rapport à un paramètre local. Alors $\pi^{-1}(\Theta \cap \Theta_e)$ est réunion de $\tilde{C} = E \times B$ et de $\tilde{C}'$ définie par les équations $(*)$ et $s_1(x)\, s_2'(x) - s_2(x)\, s_1'(x) = 0$. On en déduit comme ci-dessus la décomposition $\Theta \cdot \Theta_e = C + C'$. Si $\dim(E) = 1$, C est un diviseur de Cartier dans Θ d'après le cas précédent, et il en est donc de même de C'. $\square$

(1.4) Précisons la structure de $\Theta \cdot \Theta_e$ lorsque $\dim(E) = 1$. Désignons par $s: E \to \mathbf{P}^1$ le morphisme $x \mapsto (s_1(x), s_2(x))$, L'équation $s_1(x) s_2(x-e) - s_2(x) s_1(x-e) = 0$ (resp. $s_1(x) s_2'(x) - s_2(x) s_1'(x) = 0$) s'écrit $s(x) = s(x-e)$ (resp. $s'(x) = 0$), soit $[x] + [x-e] \equiv \Theta_E$ (resp. $2[x] \equiv \Theta_E$). Si $\Theta_E \equiv [0] + [f]$, avec $f \in E$, cette équation équivaut à $2x = e + f$ (resp. $2x = f$). Ainsi les points $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4$ sont permutés par l'action de E_2. Par suite les sous-variétés $\{\varepsilon_i\} \times \Delta_i$ de $\tilde{C}'$ sont permutées par $\operatorname{Ker} \pi$. Posant $\varepsilon = \varepsilon_1$ et $\Delta = \Delta_1$, on a donc $C' = \pi(\{\varepsilon\} \times \Delta) = \Delta_\varepsilon$, et $\Theta \cdot \Theta_e = \pi(E \times B) + \Delta_\varepsilon$.

(1.5) Avant d'énoncer la réciproque de la proposition 1.3 il nous faut rappeler les résultats de Mumford et Kempf [M2] sur la cohomologie des faisceaux inversibles sur une variété abélienne A. On dit qu'un faisceau inversible L sur A est *non dégénéré* si le groupe $K(L)$ (0.2) est fini. Il existe dans ce cas un unique entier i tel que $H^i(A, L) \neq 0$: c'est *l'indice* de L, que l'on note $i(L)$.

Soit maintenant L un faisceau inversible quelconque sur A; notons K la composante neutre de $K(L)$, et $p: A \to A/K$ la projection canonique. Il existe alors un faisceau inversible non dégénéré M sur A/K, bien défini à translation près, tel que L soit algébriquement équivalent à $p^* M$. On pose

$$i_-(L) = i(M); \qquad i_+(L) = i(M) + \dim(K).$$

Si la cohomologie de L n'est pas nulle, on peut choisir M de façon que $L = p^* M$. On a alors pour tout entier i un isomorphisme canonique

$$H^i(A, L) \xrightarrow{\sim} H^{i(M)}(A/K, M) \otimes H^{i-i(M)}(K, \mathcal{O}_K).$$

En particulier, on a

$$H^i(A, L) \neq 0 \Leftrightarrow i_-(L) \leqq i \leqq i_+(L).$$

Il résulte de la définition que $i_-(L)$ et $i_+(L)$ ne dépendent que de la classe d'équivalence algébrique de L. Par ailleurs, si L et L' sont deux faisceaux inversibles sur A, on a $i_-(L \otimes L') \leqq i_-(L) + i_-(L')$. En effet le raisonnement de [M1, p. 159, step C], qui établit cette inégalité dans le cas où L et L' sont non dégénérés, s'étend immédiatement au cas général.

(1.6) La proposition 1.3 admet la réciproque suivante. Nous écarterons le cas des variétés produits, pour lesquelles le diviseur Θ lui-même est réductible. Nous dirons qu'une variété abélienne polarisée est *irréductible* si elle n'est pas isomorphe au produit de deux variétés abéliennes polarisées non triviales.

Proposition 1.6. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée irréductible, de dimension $\geqq 4$. On suppose qu'il existe un élément non nul a de A* (resp. *de $T_0(A)$*) *et des diviseurs de Cartier effectifs C, C' dans Θ tels qu'on ait $\Theta \cdot \Theta_a = C + C'$. Alors A contient une courbe elliptique E telle que $(\Theta \cdot E) = 2$, et on a $a \in E$* (resp. $a \in T_0(E)$).

Traitons d'abord le cas $a \in A$. D'après le théorème de Lefschetz version Grothendieck [Gr, Exp. XII, cor. 3.6][1], il existe des diviseurs D et D' sur A tels que $D_{|\Theta} \equiv C$, $D'_{|\Theta} \equiv C'$, et $D + D' \equiv \Theta_a$. Considérons la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_A(D - \Theta) \to \mathcal{O}_A(D) \to \mathcal{O}_\Theta(C) \to 0;$$

puisque C est effectif, on en déduit que l'un des espaces $H^0(A, D)$ ou $H^1(A, D - \Theta)$ n'est pas nul. On a la même alternative pour D'.

Si $H^0(A, D)$ et $H^0(A, D')$ sont non nuls, Θ_a est réductible, ce qui contredit l'hypothèse. Si ces deux espaces sont nuls, on a $i_-(D - \Theta) \leqq 1$ et $i_-(D' - \Theta) \leqq 1$ (1.5); mais $\mathcal{O}_A(D + D' - 2\Theta) = \mathcal{O}_A(\Theta_{-a})^{-1}$ est un faisceau non dégénéré d'indice $g \geqq 4$, ce qui contredit l'inégalité $i_-(D + D' - 2\Theta) \leqq i_-(D - \Theta) + i_-(D' - \Theta)$ (1.5).

Nous supposerons donc désormais que $H^1(A, D' - \Theta)$ est non nul, tandis que $H^1(A, D - \Theta)$ est nul; on peut alors supposer que D est effectif et que sa restriction à Θ est égale à C. Par dualité, on a $H^{g-1}(A, \Theta - D') \neq 0$, ou

---

[1] L'annulation de $H^i(\Theta, -n\Theta)$ pour $i = 1, 2$ et $n \geqq 1$, nécessaire pour appliquer *loc. cit.*, résulte immédiatement du fait qu'on a $H^i(A, -n\Theta) = 0$ pour $1 \leqq i \leqq 3$ (puisque la dimension de A est $\geqq 4$)

encore, en notant $\hat{a}$ le diviseur algébriquement équivalent à zéro $\Theta_a - \Theta$, $H^{g-1}(A, D-\hat{a}) \neq 0$. On déduit alors de (1.5) qu'on a

$$i_-(D) = i_-(D-\hat{a}) = 0 \quad \text{et} \quad i_+(D) = i_+(D-\hat{a}) = g-1;$$

de plus, posons $K = K(D)^0 = K(D-\hat{a})^0$, $E = A/K$, et notons $p: A \to E$ l'homomorphisme canonique. On a $\dim K = i_+(D) - i_-(D) = g-1$ et $\dim(E) = 1$; il existe des diviseurs $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{e}$ sur E tels que $D \equiv p^*\mathfrak{d}$ et $\hat{a} \equiv p^*\mathfrak{e}$. Identifions E à une sous-variété abélienne de A à l'aide de l'homomorphisme $\hat{p}$ et des polarisations principales sur A et E; le diviseur de degré zéro $\mathfrak{e}$ sur E correspond à un point e de E, et l'égalité $\hat{a} = p^*\mathfrak{e}$ s'écrit simplement $a = e$ (d'où $a \in E$).

On est maintenant dans la situation de (1.1), dont nous reprenons les notations. Il reste à déterminer le degré d des polarisations induites Θ_E et Θ_K. Soit θ une section non nulle de $H^0(A, \Theta)$. Considérons sur $E \times K$ la suite exacte

$$0 \to \pi^* \mathcal{O}_A(D' - \Theta) \xrightarrow{\pi^*\theta} \pi^* \mathcal{O}_A(D') \to \pi^* \mathcal{O}_\Theta(C') \to 0.$$

Comme aucun diviseur algébriquement équivalent à D' n'est effectif (sans quoi Θ serait réductible), on a $H^0(E \times K, \pi^* \mathcal{O}_A(D')) = 0$. Puisque C' est effectif, on en déduit que l'homomorphisme

$$H^1(\pi^*\theta): H^1(E \times K, \pi^* \mathcal{O}_A(D' - \Theta)) \to H^1(E \times K, \pi^* \mathcal{O}_A(D'))$$

n'est pas injectif.

Notons φ la restriction à E de $p: A \to E$ (φ n'est autre que la multiplication par d dans E); posons $\Delta = \varphi^*(\mathfrak{d} - \mathfrak{e})$.

On a alors

$$\pi^*(D' - \Theta) \equiv \pi^*(\hat{a} - D) \equiv \pi^* \, p^*(\mathfrak{e} - \mathfrak{d}) = -pr_1^*(\Delta),$$

d'où des isomorphismes

$$H^1(E \times K, \pi^* \mathcal{O}_A(D' - \Theta)) = H^1(E \times K, \; -pr_1^*(\Delta)) \simeq H^1(E, \; -\Delta)$$

$$\begin{aligned} H^1(E \times K, \pi^* \, \mathcal{O}_A(D')) &= H^1(E \times K, pr_1^*(\Theta_E - \Delta) + pr_2^*(\Theta_K)) \\ &\simeq H^1(E, \Theta_E - \Delta) \otimes H^0(K, \Theta_K). \end{aligned}$$

Soient $(s_1, \dots, s_d)$ et $(t_1, \dots, t_d)$ des bases de $H^0(E, \Theta_E)$ et $H^0(K, \Theta_K)$ respectivement telles qu'on ait $\pi^*\theta = \sum_{i=1}^{d} s_i \otimes t_i$ (lemme 1.1). L'homomorphisme $H^1(\pi^*\theta)$ s'identifie via les isomorphismes précédents à l'application

$$u: H^1(E, \; -\Delta) \to H^1(E, \Theta_E - \Delta) \otimes H^0(K, \Theta_K)$$

définie par $u(x) = \sum_{i=1}^{d} (s_i \cdot x) \otimes t_i$.

Pour que $u(x)$ soit nul, il faut et il suffit qu'on ait $s \cdot x = 0$ pour toute section s de $H^0(E, \Theta_E)$. Par dualité, cela signifie que l'image de l'application naturelle

$$v: H^0(E, \Delta - \Theta_E) \otimes H^0(E, \Theta_E) \to H^0(E, \Delta)$$

est contenue dans le noyau de x (considérée comme forme linéaire sur $H^0(E, \Delta)$). Ainsi l'injectivité de u équivaut à la surjectivité de v. Or on a

$$\deg(\Theta_E) = d,$$
$$\deg(\Delta) = d^2 \deg \mathfrak{d} \geqq d^2, \quad \text{d'où} \quad \deg(\Delta - \Theta_E) \geqq d^2 - d.$$

On a $d \geqq 2$ puisque (A, Θ) est supposée irréductible. Mais il est bien connu que si L et M sont deux faisceaux inversibles de degré $\geqq 3$ sur E, la flèche $H^0(E, L) \otimes H^0(E, M) \to H^0(E, L \otimes M)$ est surjective [M2, thm. 6]. On conclut qu'on a $d = 2$, d'où la proposition dans ce cas.

Traitons enfin le cas $a \in T_0(A)$. La démonstration précédente s'applique identiquement en remplaçant a par 0; on obtient encore que A contient une courbe elliptique E avec $\deg(\Theta_E) = 2$, d'où une isogénie $\pi: E \times K \to A$. Reste à prouver que a est tangent à E. Notons encore a le champ de vecteurs sur A qui prolonge a, et considérons les applications

$$H^0(A, T_A) \xrightarrow{\tau} H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(\Theta)) \xrightarrow{\partial} H^1(A, \mathcal{O}_A),$$

où τ est l'homomorphisme défini en (0.3), et où ∂ est le cobord de la suite exacte de cohomologie déduite de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_A \to \mathcal{O}_A(\Theta) \to \mathcal{O}_\Theta(\Theta) \to 0.$$

D'après [G, 2.10], le composé $\partial\tau$ est le cup-produit avec la classe $c_1(\Theta) \in H^1(A, \Omega_A^1)$. Comme $\pi^* \Theta \equiv pr_1^* \Theta_E + pr_2^* \Theta_K$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^0(A, T_A) \arrow[r, "c_1(\Theta)"] \arrow[d, "\pi^*"] & H^1(A, \mathcal{O}_A) \arrow[d, "H^1(\pi)"] \\
H^0(E, T_E) \oplus H^0(K, T_K) \arrow[r, "c_1(\Theta_E) \oplus c_1(\Theta_K)"] & H^1(E, \mathcal{O}_E) \oplus H^1(K, \mathcal{O}_K);
\end{tikzcd}$$

il s'agit donc de prouver que l'image de $\partial\tau(a)$ par l'isomorphisme canonique $H^1(\pi)$ appartient à $H^1(E, \mathcal{O}_E)$. Soit t une section de $H^0(A, D)$ de diviseur D, et soit $\bar{t}$ sa restriction à Θ; soit d'autre part $\bar{t}'$ une section de $H^0(\Theta, C')$ de diviseur C'. Quitte à multiplier t par un scalaire, on a $\bar{t} \cdot \bar{t}' = \tau(a)$. Le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_A(-D) \arrow[r] \arrow[d, "t"] & \mathcal{O}_A(\Theta - D) \arrow[r] \arrow[d, "t"] & \mathcal{O}_\Theta(C') \arrow[r] \arrow[d, "\bar{t}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_A \arrow[r] & \mathcal{O}_A(\Theta) \arrow[r] & \mathcal{O}_\Theta(\Theta) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donne lieu à un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(C')) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{t}"] & H^1(A, \mathcal{O}_A(-D)) \arrow[d, "t"] \\
H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(\Theta)) \arrow[r, "\partial"] & H^1(A, \mathcal{O}_A)
\end{tikzcd}$$

d'où l'on déduit que $\partial\tau(a)$ appartient à l'image de $H^1(A, \mathcal{O}_A(-D)) \xrightarrow{\cdot t} H^1(A, \mathcal{O}_A)$. On a $D \equiv p^*\mathfrak{d}$, et les homomorphismes p^* de $H^0(E, \mathfrak{d})$ dans $H^0(A, D)$ et de $H^1(E, -\mathfrak{d})$ dans $H^1(A, -D)$ sont bijectifs (1.5). Il existe donc une section $u \in H^0(E, \mathfrak{d})$ telle que $p^* u = t$. L'application $\cdot t$ ci-dessus s'identifie à l'application $(\cdot 2u, 0)$ de $H^1(E, \mathcal{O}_E(-\mathfrak{d}))$ dans $H^1(E, \mathcal{O}_E) \oplus H^1(K, \mathcal{O}_K)$, d'où notre assertion. □

§ 2. Application au problème de Schottky

Théorème 2.1. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g. On suppose qu'il existe un élément non nul a de A* (resp. *de $T_0(A)$*) *tel que la variété $\Theta \cap \Theta_a$ ne soit pas intègre. On est alors dans l'un des cas suivants:*

(i) $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) \geqq g-4$;

(ii) *A contient une courbe elliptique E telle que $(\Theta \cdot E) = 2$, et a appartient à E* (resp. *à $T_0(E)$*).

Par hypothèse on a une décomposition $\Theta \cdot \Theta_a = C + C'$, où C et C' sont des diviseurs de Weil effectifs dans Θ. Supposons $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) < g-4$. Les anneaux locaux de la variété Θ sont alors réguliers en codimension $\leqq 3$; un théorème de Grothendieck («conjecture de Samuel», [Gr, Exp. XI, Cor. 3.14]) entraîne qu'ils sont factoriels. Par suite C et C' sont des diviseurs de Cartier, et le théorème résulte de la proposition 1.6. □

(2.2) *Remarques.* 1) On peut remplacer la conclusion (i) par l'assertion plus forte suivante: si $\Theta \cdot \Theta_a = C + C'$, où C et C' sont des cycles effectifs non nuls, alors $\dim(C \cap C' \cap \operatorname{Sing} \Theta) \geqq g-4$. En effet, posons $Z = C \cap C' \cap \operatorname{Sing} \Theta$. Dans $\Theta - Z$, C et C' sont des diviseurs de Cartier; pour prouver qu'il en est de même dans Θ, il suffit de montrer que les anneaux locaux du schéma Θ aux points de Z sont parafactoriels [Gr, Exp. XI, n° 3]. Or si $\dim(Z) \leqq g-5$, cela résulte du théorème 3.13 (ii) de *loc. cit.*

En particulier si $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) = g-4$, on conclut que $C \cap C'$ contient une composante de $\operatorname{Sing}(\Theta)$.

2) On a vu (proposition 1.3) qu'inversement dans la situation (ii) du théorème, la variété $\Theta \cap \Theta_a$ est réductible. L'article [D] décrit les composantes de $\mathcal{N}_{g-4}$ connues à ce jour (cf. Introduction): outre $\mathcal{J}_g$, toutes ces composantes sauf une sont formées de variétés (A, Θ) contenant une sous-variété abélienne dont la polarisation induite est de degré 2. D'après la proposition (1.3), ces variétés admettent effectivement des intersections $\Theta \cap \Theta_a$ réductibles.

3) On prouve dans [D] que pour une variété (A, Θ) assez générale satisfaisant à (ii), le diviseur Θ est lisse. On ne peut donc pas éliminer le cas (ii). Par contre, si (A, Θ) contient une sous-variété abélienne E dont la polarisation induite est de degré 2, avec $1 < \dim(E) < g-1$, on a $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) \geqq g-4$ (*loc. cit.*).

Théorème 2.3. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée de dimension g. On suppose qu'il existe trois éléments distincts non nuls a, x, y de A tels que $\Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_x \cup \Theta_y$. On a alors* $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) \geqq g-4$.

L'hypothèse entraîne que $\Theta \cap \Theta_a$ n'est pas intègre; il suffit donc d'éliminer le cas (ii) du théorème 2.1. Nous supposons désormais que nous sommes dans ce cas, et de plus que $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) \leqq g-5$. Notant comme d'habitude $\pi\colon E \times K \to A$ l'isogénie de degré 4, on a (1.4)

$$\Theta \cdot \Theta_a = \pi(E \times B) + \Delta_\varepsilon,$$

où B est le lieu de base du système $|\Theta_K|$, Δ est un diviseur de $|\Theta_K|$ et $\varepsilon \in E$. Plus précisément, si $\pi^* \Theta$ admet pour équation $s_1(x)\, t_1(y) + s_2(x)\, t_2(y) = 0$, B est défini par $t_1 = t_2 = 0$ et Δ par $s_1(\varepsilon)\, t_1 + s_2(\varepsilon)\, t_2 = 0$; de plus ε satisfait à $s_1(\varepsilon)\, s_2(\varepsilon - a) - s_2(\varepsilon)\, s_1(\varepsilon - a) = 0$.

Lemme 2.4. *Les sous-variétés B et Δ de K sont irréductibles.*

Nous allons montrer, plus précisément, que ces variétés sont lisses en codimension un. Notons Δ' le diviseur de la section $s_1'(\varepsilon)\, t_1 + s_2'(\varepsilon)\, t_2$ de $H^0(K, \Theta_K)$. Pour $y \in \Delta' \cap \operatorname{Sing}(\Delta)$, le critère jacobien montre que $\varepsilon + y$ est un point singulier de Θ. On a donc

$$\dim \operatorname{Sing}(\Delta) - 1 \leqq \dim \Delta' \cap \operatorname{Sing}(\Delta) \leqq \dim \operatorname{Sing}(\Theta) \leqq g-5,$$

d'où notre assertion. On procède de même pour B. $\square$

(2.5) Revenons à la démonstration du théorème 2.3. Puisque Δ_ε est irréductible, on peut supposer $\Delta_\varepsilon \subset \Theta_x$. Si $x = \pi(e, k)$, ceci s'écrit

$$s_1(\varepsilon - e)\, t_1(y-k) + s_2(\varepsilon - e)\, t_2(y-k) = 0 \qquad \text{pour tout } y \in \Delta.$$

Observons que cette équation n'est pas triviale car s_1 et s_2 ne s'annulent pas simultanément. Elle entraîne que Δ_k est linéairement équivalent à Δ, donc que k appartient à $K(\Theta_K) = E \cap K$; ainsi on a $x \in E$. L'équation ci-dessus montre alors qu'on a

$$(s_1(\varepsilon - x) \colon s_2(\varepsilon - x)) = (s_1(\varepsilon) \colon s_2(\varepsilon)) \in \mathbf{P}^1.$$

Mais le morphisme $s\colon E \to \mathbf{P}^1$ défini par (s_1, s_2) est de degré 2, et on a déjà $s(\varepsilon - a) = s(\varepsilon)$ (1.4). On conclut qu'on a $x = 0$ ou $x = a$, ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

(2.6) Le théorème 2.3 s'étend au cas où certains des points a, x, y sont infiniment proches de 0. Pour l'énoncer commodément, introduisons la variété $\tilde{A}$ obtenue en éclatant 0 dans A: les points de $\tilde{A}$ sont les points $\neq 0$ de A et les directions tangentes à l'origine.

Proposition 2.6. *Soient a, x, y trois points distincts de $\tilde{A}$; la relation $\Theta \cap \Theta_a \subset (\Theta \cap \Theta_x) \cup (\Theta \cap \Theta_y)$ entraîne* $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) \geqq g-4$.

On arrive comme précédemment à $\Delta_\varepsilon \subset \Theta \cap \Theta_x$. Si x est un point de A et a une direction tangente à l'origine, on obtient comme ci-dessus $s(\varepsilon - x) = s(\varepsilon)$, alors que ε est un point de ramification de s, d'où une contradiction.

Supposons donc que x soit une direction tangente à l'origine, correspondant à un vecteur $e + k$, avec $e \in T_0(E)$ et $k \in T_0(K)$. Notons $\dfrac{\partial}{\partial e}$ et $\dfrac{\partial}{\partial k}$ les champs de vecteurs associés. La condition $\Delta_\varepsilon \subset \Theta \cap \Theta_x$ se traduit par

$$\frac{\partial s_1}{\partial e}(\varepsilon)\, t_1(y) + \frac{\partial s_2}{\partial e}(\varepsilon)\, t_2(y) + s_1(\varepsilon)\, \frac{\partial t_1}{\partial k}(y) + s_2(\varepsilon)\, \frac{\partial t_2}{\partial k}(y) = 0 \qquad \text{pour tout } y \in \Delta.$$

Posons $t = s_1(\varepsilon)\, t_1 + s_2(\varepsilon)\, t_2 \in H^0(K, \Theta_K)$. Soit t' une section de $H^0(K, \Theta_K)$ non proportionnelle à t, et soit $(\partial_1, \ldots, \partial_{g-1})$ une base de $H^0(K, T_K)$. L'argument de [G, p. 92–93] montre que les images dans $H^0(\Delta, \mathcal{O}_\Delta(\Delta))$ de $t', \partial_1 t, \ldots, \partial_{g-1} t$ forment une base de cet espace. On déduit alors de l'équation précédente qu'on a $k=0$ et $\left(\frac{\partial s_1}{\partial e}(\varepsilon) : \frac{\partial s_2}{\partial e}(\varepsilon)\right) = (s_1(\varepsilon) : s_2(\varepsilon))$. Ainsi ε doit être un point de ramification de s, ce qui n'est possible que si a est la direction tangente à E en 0; on conclut qu'on a $a = x$, ce qui contredit l'hypothèse. □

(2.7) On peut prouver de même certaines variantes du théorème 2.3. Soient par exemple a et v des éléments non nuls de A et $T_0(A)$ respectivement. Alors *la relation* $\Theta \cap \Theta_a \subset (\Theta \cap \Theta_v) \cup (\Theta \cap \Theta_v)_a$ *entraîne* $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) \geqq g-4$. En effet, en supposant la conclusion non satisfaite, on obtient d'abord que A contient une courbe elliptique E, avec $(\Theta \cdot E) = 2$ et $a \in E$, puis qu'on a $\Delta_\varepsilon \subset \Theta \cap \Theta_v$ ou $\Delta_{\varepsilon - a} \subset \Theta \cap \Theta_v$. Le raisonnement de (2.6) conduit alors à une contradiction.

(2.8) Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée *irréductible*. Soit $\psi: A \to \mathbf{P}^N$ le morphisme associé au système linéaire $|2\Theta|$; il induit un isomorphisme de $A/\{\pm 1\}$ sur une sous-variété W de $\mathbf{P}^N$, la *variété de Kummer* associée à (A, Θ). Nous appellerons *trisécante* de W toute droite l de $\mathbf{P}^N$ vérifiant l'une des conditions suivantes:

(i) l contient (au moins) trois points distincts de W;
(ii) l est tangente à W en un point lisse, et contient un autre point de W;
(iii) l est tangente à W en un point singulier (c'est-à-dire contenue dans le cône tangent de W en ce point), et contient un autre point de W;
(iv) l a un contact d'ordre 3 avec W en un point lisse.

Théorème 2.8. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée irréductible de dimension g, dont la variété de Kummer admet une trisécante. On a alors* $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) \geqq g-4$.

L'existence d'une trisécante entraîne des conditions du type (2.3) (cf. par exemple [W3] ou [M3]). Plus précisément:

(i) Si l contient les points distincts $\psi(a)$, $\psi(b)$, $\psi(c)$, on a

$$\Theta \cap \Theta_{b-a} \subset \Theta_{c-a} \cup \Theta_{-c-a}.$$

(ii) Si l est tangente à W en $\psi(a)$ (avec $2a \neq 0$) et passe par $\psi(b)$, on a $\Theta \cap \Theta_{2a} \subset \Theta_{a+b} \cup \Theta_{a-b}$.

(iii) Si l est tangente à W en $\psi(0)$ suivant le vecteur $v \in T_0(A)$, et passe par $\psi(b)$, on a $\Theta \cap \Theta_v \subset \Theta_b \cup \Theta_{-b}$.

(iv) Si l a un contact d'ordre 3 en $\psi(a)$, suivant le vecteur $v \in T_a(A)$, on a $\Theta \cap \Theta_{2a} \subset (\Theta \cap \Theta_v) \cup (\Theta \cap \Theta_v)_{2a}$ (via l'identification $T_a(A) = T_0(A)$).

La conclusion résulte alors du théorème 2.3, de la proposition 2.6 et de (2.7).

(2.9) Bien que ce ne soit pas strictement nécessaire, nous supposons dans cette section $k=\mathbf{C}$. Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée; nous supposons Θ symétrique. Soit $r: V \to A$ le revêtement universel de A, et θ la fonction thêta sur V de diviseur $r^*\Theta$. Nous dirons que (A, Θ) satisfait à la *propriété de Novikov* s'il existe des champs de vecteurs constants x, y, z sur V, avec $x \neq 0$, et une constante $c \in \mathbf{C}$, tels que la fonction $u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \theta + c$ vérifie l'équation de Kadomtsev-Petviashvili

$$\text{(K-P)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(u_{xxx} + 12 u u_x - 4 u_t) + 3 u_{yy} = 0;$$

on a posé comme d'habitude $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, etc....

Un calcul sans difficultés [Du] montre que lorsque (A, Θ) est irréductible, cette équation équivaut à la suivante, où d désigne une autre constante:

$$\text{(K-P}') \qquad \begin{aligned} &\theta_{x^4}\theta - 4\theta_{xxx}\theta_x + 3\theta_{xx}^2 + 4\theta_x\theta_t - 4\theta_{xt}\theta + 3\theta_{yy}\theta - 3\theta_y^2 \\ &+ 12c(\theta_{xx}\theta - \theta_x^2) + d\theta^2 = 0. \end{aligned}$$

Novikov a conjecturé que les jacobiennes sont les seules variétés abéliennes principalement polarisées irréductibles satisfaisant à la propriété de Novikov. Cette conjecture vient d'être démontrée par T. Shiota [S]. Nous obtenons à l'aide du théorème 2.1 un résultat plus faible:

Théorème 2.9. *Soit (A, Θ) une variété abélienne principalement polarisée irréductible satisfaisant à la propriété de Novikov. On a alors* $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) \geqq g-4$.

Sur la sous-variété $\Theta \cap \Theta_x$ de A, l'équation (K-P') se réduit à

$$0 = \theta_{xx}^2 - \theta_y^2 = (\theta_{xx} + \theta_y)(\theta_{xx} - \theta_y).$$

Posons $X = \Theta \cap \Theta_x$. Les fonctions $\theta_{xx} \pm \theta_y$ sur V définissent deux sections de $H^0(X, \mathcal{O}_X(\Theta))$ dont le produit est nul. Nous montrons ci-dessous (lemme 2.10) que ces sections ne sont pas identiquement nulles; on en déduit que X est réunion de deux sous-variétés échangées par l'involution $a \mapsto -a$. En particulier X n'est pas intègre; si $\dim \operatorname{Sing}(\Theta) < g-4$, on est donc dans le cas (ii) du théorème 2.1. Or dans ce cas il résulte de (1.4) et du lemme 2.4 que X a deux composantes irréductibles, qui sont stables par l'involution $a \mapsto -a$, ce qui contredit la description précédente.

Le théorème résultera donc du lemme suivant:

Lemme 2.10. *La section $\theta_{xx} + \theta_y$ de $H^0(X, \mathcal{O}_X(\Theta))$ n'est pas identiquement nulle.*

La suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_\Theta \xrightarrow{\theta_x} \mathcal{O}_\Theta(\Theta) \to \mathcal{O}_X(\Theta) \to 0$$

fournit en cohomologie une suite exacte

$$H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(\Theta)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(\Theta)) \xrightarrow{\partial} H^1(\Theta, \mathcal{O}_\Theta).$$

Puisque θ_y définit une section de $H^0(\Theta, \mathcal{O}_\Theta(\Theta))$, on a $\partial(\theta_y)=0$. Nous allons prouver que $\partial(\theta_{xx})$ n'est pas nul. Nous noterons D la dérivation par rapport à x.

Soit $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ un recouvrement de A par des ouverts au-dessus desquels $\mathcal{O}_A(\Theta)$ est trivial, et soient $(\xi_{\alpha\beta})$ les fonctions de transition associées. La section θ de $H^0(A, \mathcal{O}_A(\Theta))$ correspond à des fonctions θ_α sur U_α satisfaisant à $\theta_\alpha=\xi_{\alpha\beta}\theta_\beta$ sur $U_\alpha\cap U_\beta$. Sur cet ouvert on a donc

$$D\theta_\alpha=D\xi_{\alpha\beta}\cdot\theta_\beta+\xi_{\alpha\beta}\cdot D\theta_\beta$$
$$D^2\theta_\alpha=D^2\xi_{\alpha\beta}\cdot\theta_\beta+2D\xi_{\alpha\beta}\cdot D\theta_\beta+\xi_{\alpha\beta}\cdot D^2\theta_\beta,$$

et la section θ_{xx} de $H^0(X, \mathcal{O}_X(\Theta))$ correspond aux fonctions $D^2\theta_\alpha$. Par construction l'image de cette section dans $H^1(\Theta, \mathcal{O}_\Theta)$ est la classe du cocycle

$$(\alpha, \beta)\mapsto c_{\alpha\beta}=(D^2\theta_\alpha-\xi_{\alpha\beta}D^2\theta_\beta)/D\theta_\alpha;$$

mais les formules ci-dessus entraînent dans $\Theta\cap U_\alpha\cap U_\beta$ l'égalité

$$c_{\alpha\beta}=2D\xi_{\alpha\beta}/\xi_{\alpha\beta}=2\langle D, \frac{d\xi_{\alpha\beta}}{\xi_{\alpha\beta}}\rangle.$$

Ainsi on a $\partial(\theta_{xx})=4\pi i\, r(D\cdot c_1(\Theta))$, où r désigne l'homomorphisme de restriction $H^1(A, \mathcal{O}_A)\to H^1(\Theta, \mathcal{O}_\Theta)$. Celui-ci est injectif pour $g\geqq 2$, et le cup-produit $H^0(A, T_A)\xrightarrow{\cdot c_1(\Theta)} H^1(A, \mathcal{O}_A)$ est bijectif, d'où le lemme. □

Nous terminerons en appliquant les résultats qui précèdent au problème de Schottky (cf. Introduction). Nous revenons au cas d'un corps algébriquement clos quelconque k, mais *nous supposons* $\operatorname{car}(k)\neq 2$. Si A est une variété abélienne, nous noterons comme en (2.6) $\tilde{A}$ l'ensemble des points $\neq 0$ de A et des directions tangentes à A en 0.

Théorème 2.11. *Dans l'espace des modules $\mathcal{A}_g$ des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g, la variété $\mathcal{J}_g$ des jacobiennes est une composante irréductible de l'ensemble des variétés (A, Θ) irréductibles possédant l'une des propriétés suivantes:*

(i) *Il existe $a\in\tilde{A}$ tel que la variété $\Theta\cap\Theta_a$ ne soit pas intègre.*

(ii) *Il existe trois éléments distincts a, x, y de $\tilde{A}$ tels qu'on ait $\Theta\cap\Theta_a\subset(\Theta\cap\Theta_x)\cup(\Theta\cap\Theta_y)$.*

(iii) *La variété de Kummer de (A, Θ) admet une trisécante.*

(iv) *(A, Θ) satisfait à la propriété de Novikov (lorsque $k=\mathbf{C}$).*

Il suffit de traiter le cas (i), puisque chacune des autres conditions entraîne (i). Soit $\mathcal{N}_{g-4}$ (resp. $\mathcal{E}_g$) la sous-variété de $\mathcal{A}_g$ formée des (A, Θ) irréductibles telles que $\dim\operatorname{Sing}(\Theta)\geqq g-4$ (resp. contenant une courbe elliptique E avec $(\Theta\cdot E)=2$). Le théorème 2.1 implique que les (A, Θ) vérifiant (i) sont dans $\mathcal{N}_{g-4}$ ou $\mathcal{E}_g$. On sait par [A-M] (et [W1] en caractéristique positive) que $\mathcal{J}_g$ est une composante irréductible de $\mathcal{N}_{g-4}$. Comme $\mathcal{J}_g$ n'est pas contenue dans $\mathcal{E}_g$ (1.2), le théorème en résulte. □

La condition (i) ne semble pas beaucoup plus forte que la condition d'Andreotti-Mayer (cf. remarque (2.2.2)). Par contre nous ne connaissons aucun exemple de variété abélienne principalement polarisée irréductible satisfaisant à (ii) ou (iii) qui ne soit pas une jacobienne; il est tentant de conjecturer que chacune de ces conditions caractérise les jacobiennes.

Bibliographie

[A-C] Arbarello, E., De Concini, C.: On a set of equations characterizing Riemann matrices. Ann. Math. **120**, 119-140 (1984)

[A-M] Andreotti, A., Mayer, A.: On period relations for abelian integrals on algebraic curves. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa **21**, 189-238 (1967)

[D] Debarre, O.: Sur les variétés abéliennes dont le diviseur Θ est singulier en codimension 3. (A paraître)

[Du] Dubrovin, B.A.: Theta functions and non-linear equations. Russ. Math. Surveys **36**, 11-92 (1981)

[G] Green, M.: Quadrics of rank four in the ideal of a canonical curve. Invent. Math. **75**, 85-104 (1984)

[Gr] Grothendieck, A.: Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2). Masson et North-Holland, Paris Amsterdam 1968

[M1] Mumford, D.: Abelian varieties. Oxford University Press 1970

[M2] Mumford, D.: Varieties defined by quadratic equations (with an appendix by G. Kempf). Questions on algebraic varieties, 29-100, ed. Cremonese, Roma 1970

[M3] Mumford, D.: Tata lectures on Theta II. Progress in Math. **43**, Birkhäuser, Boston Bâle Stuttgart 1984

[S] Shiota, T.: Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations. Invent. Math. **83**, 333-382 (1986)

[W1] Welters, G.: Polarized abelian varieties and the heat equation. Compos. Math. **49**, 173-194 (1983)

[W2] Welters, G.: A characterization of non-hyperelliptic Jacobi varieties. Invent. Math. **74**, 437-440 (1983)

[W3] Welters, G.: A criterion for Jacobi varieties. Ann. Math. **120**, 497-504 (1984)

Oblatum 22-I-1986