Holonomie riemannienne et géométrie algébrique

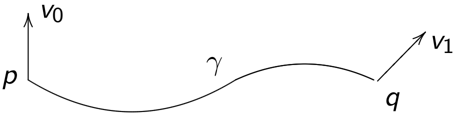
Arnaud Beauville

Université de Nice

Grenoble, Septembre 2008

Transport parallèle

(M, g) variété riemannienne $\rightsquigarrow$ transport parallèle:



$\rightsquigarrow \ \varphi_\gamma : T_p(M) \xrightarrow{\sim} T_q(M)$

$$\text{avec} \quad \varphi_\gamma \circ \varphi_\delta = \varphi_{\delta\gamma} \ .$$

Idée : $\gamma : [0,1] \to M$, on cherche $t \mapsto v(t) \in T_{\gamma(t)}(M)$

- Si $M = \mathbb{R}^n$ (euclidien), on impose $\dot{v}(t) = 0$;
- Si $M \subset \mathbb{R}^n$, on impose $\dot{v}(t) \perp T_{\gamma(t)}(M)$;

  équa. diff. du 1er ordre, unique solution tq $v(0) = v_0$.

Holonomie

En particulier, $\varphi : \{\text{lacets en } p\} \longrightarrow O(T_p(M))$

$$\text{Image} = H_p = \text{(sous-)groupe d'holonomie en } p$$

- indépendant de p à conjugaison près (M connexe).

Pour simplifier, on supposera M simplement connexe et compacte

$\Rightarrow$ H_p sous-groupe de Lie connexe compact de $SO(T_p(M))$

(Borel-Lichnerowicz)

Le théorème de de Rham

Théorème (de Rham)

$$T_p(M) = \bigoplus_i V_i \ \text{ stable sous } H_p \Rightarrow \ M \cong \prod_i M_i \text{ et } H_p \cong \prod_i H_{p_i}.$$

On est ramené aux variétés irréductibles, i.e. dont la représentation d'holonomie est irréductible.

On exclut d'abord une classe bien connue de variétes, les espaces symétriques: G/H, avec G groupe de Lie compact, $H = \mathrm{Fix}(\sigma)^{\mathrm{o}}$, σ involution de G. Liste complète (E. Cartan), $H_p = H$.

Le théorème de Berger

Théorème (Berger)

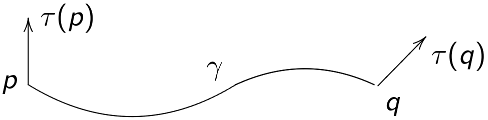
M irréductible $(\pi_1(M) = 0)$, *non symétrique. Alors* $H =$

H	$\dim(M)$	*métrique*	*existence*
$SO(n)$	n	générique	classique
$U(m)$	$2m$	Kähler	classique
$SU(m)$ $(m \geq 3)$	$2m$	Calabi-Yau	Yau (78)
$Sp(r)$	$4r$	hyperkähler	AB (82)
$Sp(1)Sp(r)$ $(r \geq 2)$	$4r$	quaternion-Kähler	**?**
G_2	7		Joyce (96)
$Spin(7)$	8		Joyce (96)

Principe d'holonomie

A QUOI SERT L'HOLONOMIE?

Un champ de vecteurs (plus généralement, de tenseurs) τ est **parallèle** si



$$\varphi_\gamma(\tau(p)) = \tau(q)$$

pour tout chemin γ de p à q.

Principe d'holonomie

L'évaluation en p établit une correspondance bijective entre:

- champs de tenseurs parallèles;
- tenseurs sur $T_p(M)$ invariants sous H_p.

Exemples: SO, U

Par suite : fixer H $\Leftrightarrow$ imposer certains tenseurs parallèles.

Plus l'holonomie est petite, plus on a de contraintes:

$$SU(m) \subset U(m) \subset SO(2m)\ ,\ Sp(r) \subset SU(2r)\ ,\ Sp(r) \subset Sp(1)Sp(r)$$

Exemples

- $H = SO(n) \iff$ pas de champ de tenseurs parallèle

  (sauf g et dv_g): métrique générique.

- $H \subset U(m) \subset SO(2m)$

  $\iff$ H préserve l'endomorphisme $v \mapsto iv$ de $\mathbb{R}^{2m} \cong \mathbb{C}^m$

  $\iff$ endomorphisme J parallèle de $T(M)$, $J^2 = -I$

  $\iff$ M a une structure complexe J kählérienne.

$SU(m)$

$H \subset SU(m) \iff H \subset U(m)$ et H préserve la m-forme alternée

$\mathbb{C}$-multilinéaire det : $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$

$\iff$ M kählérienne + m-forme holomorphe parallèle

$\iff$ le "fibré canonique" $K_M := \wedge^m_{\mathbb{C}} T^*(M)$, comme fibré holomorphe hermitien est trivial

$\iff$ sa courbure Ric_g (courbure de Ricci) est nulle.

Théorème (Yau)

M admet une métrique kählérienne avec $\mathrm{Ric}_g = 0 \iff$ M kählérienne, K_M trivial.

$\Rightarrow$ nombreux exemples: hypersurfaces de degré $n+1$ dans $\mathbb{P}^n$, etc.

$Sp(r)$ – point de vue hyperkählérien

$Sp(r) := U(r, \mathbb{H}) =$ sous-groupe de $GL(r, \mathbb{H})$ préservant la forme hermitienne $\psi(x, y) = \sum x_i \bar{y}_i$.

2 manières de voir les quaternions:

- "Hamilton": $\mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$, $\mathbb{H}^r \cong \mathbb{R}^{4r}$.

  $Sp(r) =$ sous-groupe de $O(\mathbb{R}^{4r})$ commutant avec i, j, k .

  $H \subset Sp(r) \iff$ structures complexes I, J, K parallèles, en fait une sphère $\mathbb{S}^2$:

$$\mathbb{S}^2 = \{aI + bJ + cK,\ a^2 + b^2 + c^2 = 1\} \ .$$

On dit que M est hyperkählérienne.

$Sp(r)$ – point de vue symplectique holomorphe

- "Cayley": $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$, $\mathbb{H} = \mathbb{C}(j)$ avec $jz = -\bar{z}j$; $\mathbb{H}^r \cong \mathbb{C}^{2r}$.

  $\psi = h + \varphi j$ avec h hermitienne et φ $\mathbb{C}$-linéaire alternée.

  Donc $$Sp(r) = U(2r, \mathbb{C}) \cap Sp(2r, \mathbb{C}) \ .$$

$$H = Sp(r) \iff \begin{cases} \text{structure complexe kählérienne} \\ \text{2-forme holomorphe symplectique parallèle } \varphi, \\ \text{unique à un scalaire près} \end{cases}$$

Théorème

M kählérienne avec 2-forme holomorphe symplectique φ $\Rightarrow$

M admet une métrique hyperkählérienne.

Démonstration: M admet une métrique Kähler Ricci-plate (Yau); pour une telle métrique, tout champ de tenseurs holomorphe est parallèle (Bochner).

Exemples de variétés hyperkählériennes

Exemples

1. $r = 1$: $Sp(1) = SU(2)$, $M =$ surface complexe (compacte, $\pi_1 = 0$) à fibré canonique trivial $\overset{\text{déf}}{=}$ surface K3.

2. $r > 1$? Idée: S^r admet des formes symplectiques (trop):

$$\sigma = \lambda_1 p_1^* \varphi + \ldots + \lambda_r p_r^* \varphi \ , \quad \text{avec} \ \ \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}^* \ .$$

Pour avoir l'unicité, on impose $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r$, i.e.:

σ provient de $S^{(r)} := S^r/\mathfrak{S}_r$.

$S^{(r)}$ est singulière, mais admet une résolution $S^{[r]}$, le schéma de Hilbert (ou espace de Douady).

σ forme symplectique sur $S^{[r]} \ \Rightarrow \ S^{[r]}$ hyperkählérienne.

1. a

Exemples (suite)

2. a
3. Construction analogue en partant d'un tore complexe de dimension 2 $\rightsquigarrow$ variétés de Kummer généralisées K_r.
4. 2 exemples sporadiques (O'Grady), de dimension 6 et 10.

Pas d'autre exemple connu!

$Sp(r) = U(r, \mathbb{H})$ commute aux homothéties, en particulier à

$$\mathbb{H}_1^\times = \{\text{quaternions de norme } 1\} \cong Sp(1)\ .$$

Le groupe $Sp(1)Sp(r)$ préserve la sphère

$$\mathbb{S}^2 = \{aI + bJ + cK,\ a^2 + b^2 + c^2 = 1\} \subset \mathrm{End}(\mathbb{R}^{4r})\ .$$

Soit M d'holonomie $Sp(1)Sp(r)$ ("quaternion-Kähler"); on a une sphère $\mathbb{S}^2 \subset T_p(M)$ en chaque $p \in M$.

La réunion de ces sphères est l'espace des twisteurs $t : Z \to M$.

Théorème (Salamon)

Z a une structure complexe naturelle, telle que $t^{-1}(m) \cong \mathbb{P}^1 \quad \forall m$, et une structure de contact holomorphe.

$Sp(1)Sp(r)$, suite

structure de contact $=$ suite exacte $0 \to H \longrightarrow T(Z) \xrightarrow{\theta} L \to 0$

(L fibré en droites, $\theta \in \Omega^1_Z \otimes L$) telle que $d\theta_{|\,H}$ symplectique.

(analogue des variétés symplectiques en dimension impaire)

Idée de la construction.

$$\text{Pour } (p, J) \in Z\,, \ \ T_{(p,J)}(Z) = T_p(M) \oplus T_J(\mathbb{S}^2)$$

structure complexe J sur $T_p(M)$, standard sur $T_J(\mathbb{S}^2)$

structure de contact: $H_{(p,J)} = T_p(M) \subset T_{(p,J)}(Z)$. ■

Deux cas, suivant le signe de la courbure scalaire.

Dans le cas négatif, Z n'est pas kählérienne: pas d'exemple connu.

$Sp(1)Sp(r)$, suite

Dans le cas positif, Z est une variété projective, et même de Fano.

(i.e.: les sections de K_Z^{-N} plongent Z dans $\mathbb{P}^M$ pour $N >> 0$).

Exemples de variétés de contact projectives

1. $\mathbb{P}T^*(X)$ pour toute variété projective X;
2. $\mathfrak{g}$ alg. de Lie simple; $Z \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ unique orbite adjointe fermée.

   (exemple: matrices de rang 1 dans $\mathbb{P}(\mathfrak{sl}_r)$.)

Conjectures

Ce sont les seules variétés de contact projectives

$\Rightarrow$ toute variété quaternion-Kähler positive est symétrique.

$Sp(1)Sp(r)$, fin

Résultats partiels

Z variété de contact projective, $\theta : T(Z) \to L$

1. Si Z n'est pas de Fano, $Z \cong \mathbb{P}T^*(X)$

   (Kebekus, Peternell, Sommese, Wiśniewski + Demailly)

2. Si L a "assez de sections", $Z = \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ (AB)

   (remarque: K_Z^{-1} est une puissance de L)