Table des matières

Chapitre 1

Arnaud Beauville. La théorie de Hodge et quelques applications

1.1 Introduction

Ce que je voudrais vous expliquer c'est que la théorie de Hodge c'est de l'algèbre linéaire. Alors, plus exactement, il y a un théorème difficile, même très difficile selon les moyens qu'on a ; disons qu'il y a un gros théorème, le théorème de Hodge, qui associe à toute variété projective une structure d'algèbre linéaire qu'on appelle structure de Hodge (pour la variété projective, pensez à des choses très simples, pensez par exemple à une surface de degré 4). Une structure de Hodge c'est quelque chose qu'on peut expliquer à un étudiant, par les temps qui courent disons un étudiant de Master 1 pour être tranquille, vous allez voir c'est vraiment de l'algèbre linéaire. Ce qui est tout à fait remarquable c'est que cet algèbre linéaire cache de la géométrie, c'est-à-dire qu'à partir de cette structure d'algèbre linéaire on est capable de retrouver la variété d'où on est parti, on est capable de dire comment sont les courbes ou les surfaces qui vivent sur cette variété, etc. C'est cela que je voudrais expliquer. Il va y avoir 5 minutes de "boîte noire" pour expliquer le théorème de Hodge, au moins pour voir un peu d'où ça vient mais sans donner de démonstration, et après ce sera de l'algèbre linéaire, pour essayer de comprendre les caractéristiques de cette structure de Hodge.

1.1.1 Un petit peu d'histoire

Pour commencer, peut-être un petit peu d'histoire. La théorie de Hodge, cela commence par un livre de Hodge en 1941 qui s'appelle *The Theory and Applications of Harmonic Integrals* [Ho89]. Il a écrit quelques articles juste avant la guerre, il a repris tout ça dans ce livre. Alors évidemment ce n'était pas la meilleure période pour sortir un livre sur les intégrales harmoniques, ce qui explique pourquoi il a eu un retentissement assez lent. D'après Weil, on sait que le livre est arrivé en 1943-44 à Princeton, mais les gens avaient sans doute un peu autre chose en tête à cette époque-là. Le développement s'est fait après la guerre essentiellement, grâce à des gens comme Kodaira (médaillé Fields, quand même) dans sa thèse en 1949, Weil (qui n'est pas médaillé Fields mais qui l'aurait quand même mérité), De Rham, Igusa, cela fait du beau monde ayant travaillé dans les années 1950 et ayant commencé à appliquer la théorie de Hodge à la géométrie algébrique. Alors, il y a eu un moment de retrait, dans la période qu'on peut appeler période de Grothendieck, que j'ai chiffrée de 1956 à 1968, non pas que Grothendieck ne se soit pas intéressé à la théorie de Hodge, il a quand même écrit deux articles dessus, mais disons qu'il a développé cet espèce d'énorme bulldozer qu'est la géométrie algébrique sur une base quelconque, en toute caractéristique, etc, dans lequel ne rentrait pas la théorie de Hodge qui est quelque chose d'assez concret et d'assez particulier. Donc il n'y a pas eu, me semble-t-il, de gros progrès dans cette période. Par contre vers 1968, c'est surtout Griffiths qui a relancé le sujet avec son article *Periods of integrals on algebraic manifolds* [Gri70] suivi de Deligne, avec *Théorie de Hodge I, II, III* [De71a, De71b, De74] qui marque la vraie naissance du sujet. D'ailleurs Griffiths et Deligne ont reçu le prix Wolf en 2008 pour leurs travaux sur la théorie de Hodge. Après il y a eu un très grand développement, citons quelques articles mais il y en a d'autres, Clemens-Griffiths [ClGr72], Shafarevich et Piatetski-Shapiro [PiSh71]. La théorie de Hodge est maintenant complètement liée à la géométrie complexe, il est impossible à présent de faire de la géométrie complexe sans parler de théorie de Hodge.

1.1.2 Cohomologie entière

Comme je vous ai dit, il faut passer cinq minutes à expliquer un peu les "boîtes noires". Il y a quelque chose qui s'appelle la cohomologie entière, qui existe pour des espaces topologiques raisonnables et les miens vont être vraiment raisonnables puisque je vais prendre des variétés M compactes de dimension m, elles sont orientées mais si vous ne savez pas ce que c'est ce n'est pas grave. On associe à une variété M comme ça une algèbre graduée $H^*(M,\mathbb{Z})$ de rang fini sur $\mathbb{Z}$, anti-commutative (i.e. si $\alpha \in H^a(M,\mathbb{Z})$ et $\beta \in H^b(M,\mathbb{Z})$, on a $\beta.\alpha = (-1)^{ab}\alpha.\beta$), et qui a la propriété d'être concentrée entre les degrés 0 et m, c'est-à-dire que $H^p(M,\mathbb{Z}) = 0$ si $p \notin \{0,...,m\}$ et $H^0(M,\mathbb{Z}) = H^m(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. C'est simple, il y a $\mathbb{Z}$ aux deux bouts et puis ça monte entre les deux. On a de plus une propriété de dualité, la dualité de Poincaré, donnée par une forme bilinéaire et non dégénérée

$$H^p(M,\mathbb{Z}) \otimes H^{m-p}(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^m(M,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Il peut y avoir de la torsion dans ces $\mathbb{Z}$-modules, cela ne jouera aucun rôle dans cette théorie de Hodge (1). On va s'empresser de prendre un produit tensoriel avec $\mathbb{C}$, donc je ne parlerai pas de torsion, c'est comme si cela n'existait pas. On a de plus une propriété de fonctorialité contravariante : si on a une application C^∞ entre deux variétés $f : M \to N$, cela induit un homomorphisme d'algèbre $f^* : H^*(N,\mathbb{Z}) \to H^*(M,\mathbb{Z})$. Quelque chose d'important encore : lorsqu'on tensorise avec $\mathbb{C}$, la cohomologie complexe obtenue se calcule directement grâce à la géométrie différentielle de la variété, en terme de formes différentielles. C'est ce que l'on appelle le théorème de De Rham.

1.1.3 Cohomologie de De Rham

On se place toujours sur cette variété M compacte de dimension m. Soit $\Omega^p(M)$ l'ensemble des p-formes différentielles sur M, c'est-à-dire les applications ω qui à un point q de M associent une p-forme multilinéaire alternée sur $T_q(M)$, l'espace tangent en q. Localement, si on se donne un système de coordonnées, une telle forme s'écrit toujours comme une somme

$$\omega = \sum f(x)dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p},$$

(1). NDR : Voir la partie 'questions' en fin d'exposé.

avec $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$. On a un opérateur sur ces formes, appelé "différentielle" et noté d : $\Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$, qui est linéaire et qu'on peut définir localement par

$$d(f dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_p}.$$

On montre facilement que la composition $d \circ d = 0$, par conséquent l'image de d, ce qu'on appelle les formes exactes, est contenue dans le noyau de d, qui est l'ensemble des formes dites fermées. On a donc $\operatorname{Im} d \subset \operatorname{Ker} d$. On peut alors donner le théorème de De Rham :

Théorème 1.1.1. *Soit M une variété compacte orientée. Soit $\operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$ le quotient des formes exactes modulo les formes fermées. Il y a un isomorphisme d'algèbres entre $H^*(M, \mathbb{C})$ et $\operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$, où la structure d'algèbre sur $\operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$ est donnée par le produit extérieur $\wedge$.*

Cela fait partie de la "boîte noire" qu'il faut accepter. Ce théorème date d'avant le travail de Hodge, qui lui se concentre sur le cas d'une variété complexe.

1.2 Variétés complexes

Lorsqu'on change de système de coordonnées locales sur une variété complexe, le changement est donné par une application holomorphe. Si la dimension complexe est n, alors la dimension réelle est $2n$. Dans la suite on parlera toujours de la dimension *complexe* de la variété M, qu'on notera $\dim_{\mathbb{C}}(M)$. Si on note les coordonnées locales complexes $(z_1, \ldots, z_n)$, les coordonnées réelles sont alors $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ si $z_k = x_k + iy_k$. On écrit $dz_k = dx_k + idy_k$, $d\bar{z}_k = dx_k - idy_k$.

Toute forme différentielle complexe peut donc se décomposer en une somme de produits de dz et de $d\bar{z}$, ce qui donne lieu à la décomposition $\Omega^r(M) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(M)$, où $\omega \in \Omega^{p,q}(M)$ si localement

$$\omega = \sum f(z) dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q} .$$

Cette décomposition est une manière de prendre en compte la structure complexe dans la théorie des formes différentielles. Que se passe-t-il maintenant au regard de la cohomologie de de Rham ? L'action de l'opérateur d ne laisse pas stable les $\Omega^{p,q}(M)$. Plus précisément on a

$$d\Omega^{p,q}(M) \subset \Omega^{p+1,q}(M) \oplus \Omega^{p,q+1}(M).$$

On va alors définir l'espace des classes possédant au moins une forme fermée de type (p, q)

$$H^{p,q}(M) := \{[\omega] \in H^*(M, \mathbb{C}) \mid \omega \in \Omega^{p,q}(M) \ , \ d\omega = 0\}.$$

Au vu de la définition, on a directement la relation $H^{q,p} = \overline{H^{p,q}}$, où on agit par conjugaison complexe. On ne peut pas a priori donner beaucoup plus d'information en général.

L'apport de Hodge se situe alors dans le cas d'une variété complexe *projective*, c'est-à-dire lorsque M est une sous-variété fermée de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, que l'on peut toujours voir comme lieu de zéros de polynômes homogènes (ce n'est pas évident, mais c'est équivalent par un théorème de Chow). Rappelons que pour passer de $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ il suffit de rajouter des points à l'infini, ce qui a pour effet de compactifier la situation. Hodge [Ho89] montre alors :

Théorème 1.2.1. *(Théorème de Hodge) Soit M une variété complexe projective. Soit r un entier positif. Alors on a la décomposition cohomologique*

$$H^r(M,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(M).$$

Il y a essentiellement deux méthodes pour démontrer ce théorème. La première est dûe à Hodge et a été améliorée par de Rham. C'est une preuve analytique qui repose sur la théorie des formes harmoniques.

La seconde méthode est dûe à Deligne et Illusie [DeIl87] et date de 1987. C'est une preuve plus simple, algébrique et assez étonnante, puisqu'elle repose sur des calculs en caractéristique positive et permet d'obtenir un théorème difficile de cohomologie complexe.

On retiendra donc qu'on dispose ainsi d'une décomposition en somme directe de sous-espaces conjugués.

1.2.1 Structures de Hodge

Quelques remarques avant de définir les structures de Hodge : la décomposition est compatible avec le produit, c'est-à-dire que

$$\alpha \in H^{p,q}\ ,\ \beta \in H^{p',q'} \ \Rightarrow\ \alpha\cdot\beta \in H^{p+p',q+q'}.$$

C'est compatible avec l'action des applications holomorphes, en effet si $f : M \to N$ est holomorphe, alors on a $f^*(H^{p,q}(N)) \subset H^{p,q}(M)$. De plus, et c'est une conséquence du théorème de Hodge, le sous-espace $H^{r,0}$ est isomorphe à l'espace des r-formes différentielles holomorphes sur M, espace noté $\Omega^r_{\mathrm{hol}}(M)$. Enfin, Hodge a énoncé son théorème dans le cadre des variétés projectives, mais il est vrai plus généralement si M est une variété kählérienne. On ne va pas détailler ce point ici, mais je signale simplement que cela existe dans un cadre un peu plus général.

On va à présent pouvoir définir les structures de Hodge, on va voir que c'est vraiment de l'algèbre linéaire.

Définition 1.2.1. *Une structure de Hodge H de poids r est un $\mathbb{Z}$-module de type fini tel qu'il existe une décomposition*

$$H\otimes\mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q} \qquad \textit{avec} \quad H^{q,p} = \overline{H^{p,q}}\ .$$

Il faut aussi définir ce qu'on appelle une polarisation, à savoir une forme

$$b : H\otimes H \to \mathbb{Z}$$

qui est $(-1)^r$-symétrique (symétrique ou alternée selon la parité de r), telle que l'application h définie par $h(\alpha,\beta) := i^r b(\alpha,\bar\beta)$ soit hermitienne, de signe constant sur $H^{p,q}$, et telle que la décomposition $H\otimes\mathbb{C} = \oplus_{p+q=r} H^{p,q}$ soit orthogonale pour h. Ce qui est important ici, c'est que la forme est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On est ainsi en présence d'une structure de Hodge *polarisée* par la forme b.

Donnons un exemple. Considérons une variété projective M de dimension complexe n, donc de dimension réelle $2n$. Alors si on regarde la cohomologie entière en dimension moitié, on trouve que l'espace $H^n(M,\mathbb{Z})$ a une structure de Hodge de poids n et une polarisation donnée par le produit

$$H^n(M,\mathbb{Z})\otimes H^n(M,\mathbb{Z}) \to H^{2n}(M,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}\ .$$

1.2.2 Commentaires

- Pour être précis, il faudrait en fait considérer la cohomologie *primitive*, mais on reviendra sur ce point plus loin, dans la partie 1.5.1.
- Lorsqu'on traite des exemples particuliers, on se rend compte que la cohomologie la plus intéressante est celle de dimension moitié. Cependant, on peut faire la même chose pour $H^p(M, \mathbb{Z})$ pour les autres entiers p.
- On a mis de côté la géométrie et on se retrouve uniquement avec une donnée d'algèbre linéaire.
- Considérons une famille $(X_s)_{s \in S}$ de variétés projectives, par exemple $S = \{$polynômes homogènes $s \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_3]$ de degré $4\}$ et X_s la surface de $\mathbb{P}^3$ définie par $s = 0$ (supposée non-singulière, *i.e.* les dérivées partielles de s ne s'annulent pas en même temps, ce qui est vrai génériquement). Alors si on regarde la cohomologie entière dans cette famille, on se rend compte qu'elle est essentiellement indépendante de s, ce qui découle du théorème d'Ehresmann. Par fonction essentiellement constante on entend que la fonction est constante sur les ouverts contractiles. Au contraire, la structure de Hodge de X_s dépend fortement du paramètre s. Ce qu'on va voir c'est qu'en fait la structure de Hodge est souvent suffisamment fine pour permettre de reconstruire la variété.
- Un isomorphisme $\varphi : H \to H'$ de structures de Hodge polarisées de poids r est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules, compatible aux formes bilinéaires, tel que $\varphi_{\mathbb{C}} : H \otimes \mathbb{C} \to H' \otimes \mathbb{C}$ applique chaque $H^{p,q}$ sur $H'^{p,q}$.

1.3 Structures de Hodge de poids 1

Nous allons continuer par l'étude des structures de Hodge de poids 1. Dans ce cas, on a donc comme sous-espaces dans la décomposition $H^{0,1}$ et $H^{1,0}$. Autrement dit si on part d'un $\mathbb{Z}$-module de type fini H (on le prend libre pour simplifier), on le complexifie en $H_{\mathbb{C}}$ et on peut décomposer $H_{\mathbb{C}} = V \oplus \overline{V}$ en somme de deux sous-espaces complexes conjugués. On remarque que $H_{\mathbb{C}}$ est nécessairement de dimension paire puisque $\dim V = \dim \overline{V}$. On dispose alors d'un lemme facile :

Lemme 1.3.1. *La projection $H \to V$ est injective, son image est un réseau dans V.*

Autrement dit, une base de H fournit une base de V sur $\mathbb{R}$. Lorsqu'on a un tel réseau H dans un espace vectoriel complexe V, on ne peut pas s'empêcher de prendre le quotient et d'étudier l'espace quotient $T = V/H$, qui se trouve être un *tore complexe*, donc un objet du type $\mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g}$. C'est une variété complexe, en effet localement le quotient est isomorphe à V, donc on a des coordonnées locales naturelles. On a en fait la proposition suivante :

Proposition 1.3.1. *On a une équivalence de catégories entre les structures de Hodge de poids 1 et les tores complexes.*

On a vu comment associer un tore à une structure de Hodge. Pour comprendre l'autre sens de l'équivalence, si on part d'un tore complexe T, alors on peut reconstruire $T = V/H$ en prenant pour H le groupe fondamental $\pi_1(T)$ et pour V le revêtement universel $\tilde{T}$, H opère sur V et tous deux sont bien déterminés. On pose alors $H^{0,1} := \mathrm{Ker}\big(H \otimes \mathbb{C} \to V\big)$ et $H^{1,0} := \overline{H^{0,1}}$. On a ainsi construit toute la structure de Hodge associée au tore. Il reste à voir comment on peut polariser.

1.3.1 Polarisation

Si on s'intéresse maintenant à la polarisation, il nous faut donc dans le cas du poids 1, si $H_{\mathbb{C}} = V \oplus \overline{V}$, une forme hermitienne h positive sur V et telle que $h(x,y) = s(x,y) + ib(x,y)$ où s et b sont à valeurs réelles, avec s symétrique et b une forme alternée telle que $b : H \otimes H \to \mathbb{Z}$.

Dans notre cas on a de plus que b est *unimodulaire*, c'est-à-dire qu'il existe une base dite symplectique $(h_1, \ldots, h_{2g})$ de H dans laquelle $\mathrm{Mat}(b) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$. Elle définit donc un isomorphisme entre H et son dual. On a alors un autre lemme facile :

Lemme 1.3.2. *$(h_1, \ldots, h_g)$ est une base de V sur $\mathbb{C}$.*

On peut donc exprimer tous les vecteurs de V dans cette base, ainsi il existe une matrice $\tau = (\tau_{ij}) \in M_g(\mathbb{C})$ telle que $h_{g+i} = \sum_{j=1}^{g} \tau_{ij} h_j$. Ceci revient à dire que l'on peut trouver une base symplectique telle que $V = \mathbb{C}^g$ et $H = \mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g$. Le choix d'une polarisation rigidifie donc la situation et fournit des coordonnées pour l'espace vectoriel V et pour le réseau H. On a alors la proposition suivante, donnant ce qu'on appelle les relations bilinéaires de Riemann :

Proposition 1.3.2. *La matrice τ est symétrique, la matrice $\mathrm{Im}\,\tau$ est symétrique réelle et définie positive.*

Cette matrice τ s'appelle *matrice des périodes.* Elle appartient au demi-espace de Siegel, que l'on définit comme suit :

$$\mathcal{H}_g := \{A \in M_g(\mathbb{C}) \mid A = {}^t\!A \;\text{ et }\; \mathrm{Im}(A) > 0\}.$$

Si $g = 1$, le demi-espace de Siegel n'est autre que le demi-plan de Poincaré.

1.3.2 Le diviseur Θ

Nous allons voir à présent que Riemann est allé plus loin. Définissons cette fonction dite fonction thêta de Riemann :

$$\theta(z,\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp\big(\pi i({}^t\!m\,\tau m + 2\,{}^t\!m\, z)\big)\,, \qquad z \in \mathbb{C}^g\ ,\ \tau \in \mathcal{H}_g.$$

C'est une série exponentielle avec un exposant quadratique en $m \in \mathbb{Z}^g$, la présence du terme i indique que la convergence sera assurée par la positivité de la partie imaginaire de la matrice τ. C'est une fonction holomorphe de z et de τ qui est quasi-périodique par rapport à $H = \mathbb{Z}^g \oplus \tau\mathbb{Z}^g$, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$\theta(z + p + \tau q) = \theta(z) \exp\Big(-\pi i({}^t\!q\,\tau q + 2\,{}^t\!q\, z)\Big) \qquad p, q \in \mathbb{Z}^g,$$

avec l'apparition de ce terme correctif exponentiel. L'intérêt de cette quasi-périodicité réside dans le fait que si θ s'annule en un point z, elle s'annule sur tous les $z + \lambda$ où λ est un élément du réseau. L'hypersurface de $\mathbb{C}^g$ définie par $\theta = 0$ vient donc d'une hypersurface Θ du tore $\mathbb{C}^g/H$, qu'on appelle le *diviseur thêta*. Cette hypersurface Θ est bien définie à translation près et indépendante du choix de la base symplectique de départ.

Il y a là quelque chose de tout à fait remarquable : à partir des données d'algèbre linéaire de la théorie de Hodge, on aboutit très naturellement à la construction de cette fonction θ et de son diviseur associé. Ce diviseur Θ s'avère alors être une donnée géométrique passionnante, munie de nombreuses propriétés à étudier.

On peut donc à présent schématiser la correspondance permettant de mieux comprendre les structures de poids 1 :

$$\{\text{Structures de Hodge de poids 1 polarisées}\} \leftrightarrow \{\text{Tores polarisés } (T, \Theta)\}$$

Cette relation fournit donc une équivalence de données entre l'algèbre linéaire à gauche et une donnée de géométrie fine à droite. Accessoirement, l'existence de ce diviseur Θ sur le tore complexe T fait de T une variété projective, qu'on appelle une variété abélienne en géométrie algébrique. Pour être précis, c'est une *variété abélienne principalement polarisée*, car on est dans le cas où le réseau est unimodulaire.

1.3.3 L'espace de modules

Pour résumer, se donner une structure de poids 1 polarisée plus une base symplectique est équivalent à se donner une matrice τ du demi-espace de Siegel. Mais que se passe-t-il si on change de base ? Cela induit une action du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ sur $\mathcal{H}_g$, action que l'on peut expliciter de la manière suivante : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ agit par $\tau \mapsto M \cdot \tau := (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}$, où A, B, C, D sont des blocs de taille $g \times g$ à coordonnées entières. On reconnaît bien sûr, en dimension 1, l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré. On peut donc former le quotient de $\mathcal{H}_g$ par le groupe discret $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ pour obtenir une équivalence indépendante de la base symplectique, ce qui fournit alors le complément suivant :

$$\{\text{Structures de Hodge de poids 1 polarisées}\} \leftrightarrow \{\text{Tores polarisés } (T, \Theta)\} \leftrightarrow \mathcal{H}_g/\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}).$$

Ce quotient à droite a de bonnes propriétés. On montre que $\mathcal{H}_g$ est isomorphe à un domaine borné homogène de $\mathbb{C}^{\frac{1}{2}g(g+1)}$ (les matrices symétriques complexes dépendent de $\frac{1}{2}g(g+1)$ paramètres), ce qui implique par le théorème de Baily-Borel [BaBo66] que le quotient $\mathcal{H}_g/\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ est une variété quasi-projective, c'est-à-dire un ouvert de Zariski dans une variété projective. On note dorénavant $\mathcal{A}_g = \mathcal{H}_g/\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$, qui n'est autre que ce qu'on appelle *l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées.* Le mot *module* est employé ici dans un sens ancien signifiant *paramètre*, un espace de modules est un espace qui paramètre des objets géométriques.

1.4 Cas des courbes

Nous allons appliquer cette théorie à un cas concret, et le premier cas concret ce sont les courbes. Alors selon son goût, on peut voir la situation du côté des courbes algébriques (point de vue des géomètres algébristes) ou du côté des surfaces de Riemann (point de vue des géomètres complexes). Dans le premier cas, on imagine une courbe réelle avec des points complexes cachés, dans le second on pense plutôt à une surface complexe avec des trous.

Soit C une courbe. Par définition, le nombre de trous dans la surface de Riemann associée est appelé le *genre* de la surface (ou de la courbe algébrique C). C'est un invariant de la courbe : on a $H^1(C, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{2g}$. La décomposition de Hodge s'écrit

$$H^1(C, \mathbb{Z}) \subset H^1(C, \mathbb{C}) = H^{0,1} \oplus H^{1,0} \quad \text{avec } \dim H^{0,1} = \dim H^{1,0} = g \ .$$

On construit alors le tore $JC := H^{0,1}/H^1(C,\mathbb{Z})$ comme précédemment ; il s'agit en fait de la *jacobienne* de la courbe C, un objet fondamental dans la théorie des courbes algébriques. C'est ici une variété projective, dont la structure est assez proche de la structure de la puissance symétrique g-ième de la courbe. Plus précisément on note $C^{(g)} = C^g/\mathfrak{S}_g$, où $\mathfrak{S}_g$ est le groupe symétrique de taille g, on peut donc voir l'ensemble additivement comme $\{(p_1+\ldots+p_g) \mid p_i \in C\}$ où les sommes de points ne sont pas ordonnées. Si on contracte les courbes rationnelles dans $C^{(g)}$, on retombe alors sur la jacobienne JC. On peut d'ailleurs voir le diviseur Θ comme l'image par cette contraction de l'hypersurface $p + C^{(g-1)} = \{(p + p_1 + \ldots + p_{g-1}) \mid p_1, ..., p_{g-1} \in C\}$ avec p fixé. Cela doit donner l'idée qu'on a une prise sur cet objet, la jacobienne d'une courbe, par différentes méthodes.

Théorème 1.4.1. *(Torelli 1913) La courbe C est déterminée par le couple (JC, Θ).*

En d'autres termes, une courbe algébrique est bien déterminée par la structure de Hodge associée, munie de la polarisation par le diviseur Θ. On peut reformuler ce théorème de la manière suivante : tout d'abord notons $\mathcal{M}_g$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes algébriques de genre g. On peut alors définir une application, dite *application des périodes*, comme suit :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \mathcal{M}_g \to \mathcal{A}_g \\ C \longmapsto (JC, \Theta) \end{cases}$$

Il est équivalent d'associer comme image la matrice des périodes τ du tore polarisé (JC, Θ). Le théorème de Torelli dit que cette application $\mathcal{P}$ est injective, donc si on connaît ce qui est à droite, on peut retrouver la courbe C.

1.4.1 Le problème de Schottky

En fait l'espace $\mathcal{M}_g$ est une variété quasi-projective, qui s'appelle *l'espace de modules des courbes de genre g*. L'application $\mathcal{P}$ est un plongement de $\mathcal{M}_g$ dans $\mathcal{A}_g$. On peut donc se demander si elle est surjective. Cependant une étude dimensionnelle fournit rapidement que non, dès que $g \geqslant 4$, l'application des périodes n'est pas surjective, en effet :

$$\dim \mathcal{M}_g = 3g - 3 \qquad \dim \mathcal{A}_g = \frac{1}{2}g(g+1) \ .$$

La détermination de l'image de cette application est en fait un problème classique de géométrie algébrique, appelé *Problème de Schottky*, qui n'est toujours pas complètement résolu.

1.4.2 Sur les démonstrations du théorème de Torelli

Abordons la preuve du théorème de Torelli. On trouve au moins une dizaine de preuves de cet énoncé, les preuves sont presque toutes de nature géométrique. Regardons l'argument suivant par exemple. Tout d'abord, comme on est sur un tore complexe sur lequel on peut translater les points, l'espace tangent en un point a de la jacobienne JC s'identifie à l'espace tangent $T = T_0$ à l'origine 0 de JC. Prenons maintenant un point $a \in \Theta$ (donc vérifiant $\theta(a) = 0$) et écrivons le développement de Taylor de la fonction θ au voisinage de a :

$$\theta(z) = \theta'(a) \cdot (z - a) + \frac{1}{2}\theta''(a) \cdot (z - a)^2 + \ldots$$

Le point a est un point singulier lorsque $\theta'(a) = 0$. On regarde alors le terme suivant, $\theta''(a)$, qui permet de définir une quadrique $C_a(\Theta) \subset \mathbb{P}(T)$ qui est le cône tangent projectif à Θ en a. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.4.2. *(Green, 1984, [Gre84]) L'intersection, pour tous les points doubles $a \in \Theta$, des $C_a(\Theta)$ dans $\mathbb{P}(T)$ est égale à C (sauf pour quelques courbes C exceptionnelles).*

Pour certaines courbes exceptionnelles, par exemple les courbes hyperelliptiques, il faut aller un peu plus loin dans le développement de Taylor, mais l'argument reste basé sur les propriétés géométriques fines du diviseur Θ.

1.4.3 Structures de Hodge du type courbes

On va à présent étudier les structures de Hodge qui ressemblent beaucoup à celles des courbes. Supposons par exemple qu'on considère une variété de dimension 3, avec la condition $H^{3,0} = 0$, autrement dit il n'y a pas de 3-formes holomorphes sur la variété. On trouve de nombreux exemples de variétés vérifiant ces propriétés, les hypersurfaces de degré 3 ou 4 dans $\mathbb{P}^4$, l'intersection de 2 ou 3 quadriques, etc. Dès que le degré est assez petit, cela va marcher, c'est cela la philosophie. À ce moment-là, la structure de Hodge se résume à

$$H^3(X, \mathbb{Z}) \subset H^3(X, \mathbb{C}) = H^{2,1} \oplus H^{1,2}, \quad \text{et } H^{1,2} = \overline{H^{2,1}}.$$

On procède alors comme pour les courbes, on considère le quotient $JX := H^{1,2}/H^3(X, \mathbb{Z})$, qui est un tore polarisé appelé la *jacobienne intermédiaire* de X.

On peut alors citer un analogue du théorème de Torelli dans le cas des hypersurfaces cubiques :

Théorème 1.4.3. *(Clemens-Griffiths, 1972, [ClGr72]) Une hypersurface cubique $X \subset \mathbb{P}^4$ est déterminée par le tore polarisé (JX, Θ).*

Un argument géométrique (basé sur des travaux de Mumford, voir [Be82]) pour montrer ce théorème est le suivant. La dimension de JX est 5, donc l'espace projectif tangent $\mathbb{P}(T)$ est isomorphe à $\mathbb{P}^4$. On prouve que Θ a un seul point singulier a, de multiplicité 3 ; le cône projectif tangent $C_a(\Theta)$ est donc une hypersurface cubique dans $\mathbb{P}^4$, qui se trouve être isomorphe à X. Cela permet de retrouver $X \simeq C_a(\Theta)$ de manière très élégante. Encore une fois, c'est un exemple du mélange entre algèbre linéaire et géométrie que donne la structure de Hodge.

1.4.4 Digression : le problème de Lüroth

Une application de la théorie de Hodge est la preuve que les hypersurfaces cubiques de dimension 3 donnent un contre-exemple au problème de Lüroth. C'est un vieux problème de théorie des corps : on considère un corps K vérifiant $\mathbb{C} \subset K \subset \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont des indéterminées, et on veut savoir si on a nécessairement $K = \mathbb{C}(y_1, \ldots, y_r)$, où $y_1, \ldots, y_r$ sont des indéterminées.

On sait que cette propriété est vraie pour $n = 1$, c'est l'objet du théorème de Lüroth de 1875 [Lü75]. Son théorème est d'ailleurs vrai pour un corps quelconque à la place de $\mathbb{C}$.

Pour $n = 2$, c'est beaucoup plus subtil, c'est un théorème de Castelnuovo de 1894. La démonstration est purement géométrique, on ne connaît pas aujourd'hui de démonstration algébrique de ce cas. C'est un des premiers succès de la théorie des surfaces algébriques développée par Castelnuovo et Enriques dans les années 1890-1900.

Lorsqu'elle considère ensuite $n \geqslant 3$, l'école de géométrie italienne pressent fortement que la réponse est négative, avec en tête de file Fano, pendant l'entre deux guerres.

Il faut attendre l'article de Clemens et Griffiths [ClGr72] sur les hypersurfaces cubiques pour trouver des contre-exemples. Prenons par exemple $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_4)$ avec la relation $\sum x_i^3 = 1$. On peut alors montrer que $K \subset \mathbb{C}(y_1, y_2, y_3)$, mais on n'aura jamais $K = \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3)$. En effet, si $K = \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3)$, alors l'hypersurface $\sum X_i^3 = 0$ dans $\mathbb{P}^4$ est rationnelle ; ceci implique que la jacobienne intérmédiaire JX est en fait la jacobienne d'une courbe, et comme JX est de dimension 5, la courbe serait de genre 5. Or pour une courbe de genre g, la dimension du lieu singulier est au moins $g-4$, donc dans ce cas-ci on aurait $\dim(\mathrm{Sing}(\Theta)) \geqslant 1$. Or il n'y a qu'un seul point singulier sur Θ, qui est un point triple. Donc $\dim(\mathrm{Sing}(\Theta)) = 0$, ce qui fournit une contradiction. On conclut que $K \neq \mathbb{C}(z_1, z_2, z_3)$.

La méthode de la jacobienne intermédiaire donne beaucoup de contre-exemples en dimension 3, on peut ajouter celui-ci (A. Beauville, 1977, [Be77]) : $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_6)$ avec $\sum a_i x_i^2 = \sum b_i x_i^2 = \sum c_i x_i^2 = 1$ est un corps qui est inclu dans $\mathbb{C}(y_1, y_2, y_3)$ mais qui n'est pas lui-même de cette forme.

On trouve aussi dès le début des années 70 deux autres contre-exemples obtenus avec des méthodes différentes : le premier, dû à Iskovskikh et Manin [IsMa71] en utilisant la méthode de Fano, donné par $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots, x_4)$ où $x_1, \ldots, x_4$ vérifient une certaine équation de degré 4. Le second, dû à Artin et Mumford [ArMu72], qui utilisent le groupe de Brauer, donné par $K = \mathbb{C}(x_1, \ldots x_3, u)$ avec $u^2 = \begin{pmatrix} \ell_{11}(x) & \ldots & \ell_{14}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \ell_{41}(x) & \ldots & \ell_{44}(x) \end{pmatrix}$ où on prend ℓ_{ij} linéaire et vérifiant $\ell_{ij} = \ell_{ji}$.

Pour conclure sur ce point, on retiendra que la théorie de Hodge a joué un grand rôle dans l'étude du problème de Lüroth.

1.5 Structures de Hodge de poids supérieur ou égal à 2

1.5.1 Structures de Hodge de poids 2

On a vu que les structures de Hodge de poids 1 sont très particulières, dotées de propriétés géométriques très intéressantes. Lorsque le poids augmente, les phénomènes ne sont plus aussi clairs. Concentrons-nous à présent sur les structures de poids 2.

Soit donc S une surface. On a $H^2(S, \mathbb{Z}) \subset H^2(S, \mathbb{C}) = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$, avec $H^{2,0} = \overline{H^{0,2}}$ et $H^{1,1} = \overline{H^{1,1}}$. De plus, on dispose d'une polarisation donnée par une forme quadratique entière sur $H^2(S, \mathbb{Z})$ (en effet le poids est pair à présent).

Prenons par exemple $S \subset \mathbb{P}^3$ une surface quartique. Alors dans ce cas, on a $H^{2,0} = \Omega^2_{\mathrm{holo}}(S) = \mathbb{C}\omega$, où ω ne s'annule pas, *i.e.* localement, on peut écrire $\omega = f(z_1, z_2)\mathrm{d}z_1 \wedge \mathrm{d}z_2$ et $f(z_1, z_2) \neq 0$. Une telle surface S est appelée une surface $K3$. Pour étudier complètement sa structure de Hodge, il faut parler un peu de cohomologie *primitive*. En effet, comme $S \subset \mathbb{P}^3$, la cohomologie de S contient celle de $\mathbb{P}^3$. Or $H^2(\mathbb{P}^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est indépendant de S, il suffit donc de se concentrer sur le reste de la cohomologie pour avoir des informations sur S. Soit h l'image dans $H^2(S, \mathbb{Z})$ du générateur positif de $H^2(\mathbb{P}^3, \mathbb{Z})$. On pose alors $H^2(S, \mathbb{Z})_0 := h^{\perp}$, l'orthogonal de h par rapport à b. Cet espace $H^2(S, \mathbb{Z})_0$ est appelé la *cohomologie primitive* de S. On a alors le théorème suivant :

Théorème 1.5.1. *(Piatetski-Shapiro, Shafarevich, 1971, [PiSh71]) Soient S et S' deux surfaces* *quartiques de* $\mathbb{P}^3$*. Si les cohomologies primitives* $H^2(S,\mathbb{Z})_0$ *et* $H^2(S',\mathbb{Z})_0$ *sont isomorphes en tant que structures de Hodge polarisées, alors* S *et* S' *sont isomorphes.*

On a alors $H^2(S,\mathbb{Z})_0 \subset H^2(S,\mathbb{C})_0 = \mathbb{C}\omega \oplus H_0^{1,1} \oplus \mathbb{C}\overline{\omega}$. On peut calculer $\dim(H_0^{1,1}) = 19$. Cependant, il suffit de connaître $\mathbb{C}\omega$ pour calculer le $H_0^{1,1}$ car on a $H_0^{1,1} = (\mathbb{C}\omega \oplus \mathbb{C}\overline{\omega})^{\perp}$, et les relations $\omega^2 = 0$ et $\omega.\overline{\omega} > 0$. Il suffit donc de connaître la droite $\mathbb{C}\omega$ pour connaître toute la structure de Hodge.

Donnons-nous un réseau L isomorphe à $H^2(S,\mathbb{Z})_0$. On appelle alors *quartique marquée* le couple (S,φ), où φ est une isométrie entre $H^2(S,\mathbb{Z})_0$ et L. (Ce choix joue le même rôle que le choix d'une base symplectique dans le cas des courbes.) On peut complexifier φ et définir $\Omega := \{x \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \mid x^2 = 0\ ,\ x \cdot \bar{x} > 0\}$. On a alors une application des périodes donnée par $\tilde{\wp}(S,\varphi) := \varphi(\mathbb{C}\,\omega) \in \Omega$.

Définissons aussi $\mathcal{F}_4$ l'espace de modules des quartiques dans $\mathbb{P}^3$, qui n'est autre que l'espace des polynômes homogènes $P \in \mathbb{C}[X_0,\ldots,X_3]$ de degré 4 (associés à des surfaces lisses) modulo l'action de $GL(4)$. Si on note $O(L)$ le groupe orthogonal des automorphismes du réseau L, alors $\tilde{\wp}$ induit une application

$$\wp : \mathcal{F}_4 \to \Omega/O(L).$$

Le théorème de Shafarevich et Piatetski-Shapiro montre donc que $\wp$ est injective. De nouveau, par les théorèmes généraux de Baily-Borel, le quotient $\Omega/O(L)$ est une variété quasi-projective (puisque $O(L)$ est discret) et $\wp$ est un morphisme.

La question de la surjectivité de cette application trouve sa réponse dans le théorème suivant : si on note Ω^0 le complément d'une réunion localement finie de certains hyperplans bien déterminés de Ω dans $\mathbb{P}(L_{\mathbb{C}})$, alors on a :

Théorème 1.5.2. *On a l'isomorphisme :*

$$\wp : \mathcal{F}_4 \simeq \Omega^0/O(L).$$

Ce résultat, tout à fait particulier aux surfaces $K3$, donne une connaissance exceptionnelle de l'espace des modules : on peut par exemple déterminer quelles sont les courbes tracées sur une telle surface, ses automorphismes, etc.

1.5.2 Une structure de Hodge de type $K3$

Il existe un cas où la structure de Hodge ressemble à celle d'une surface $K3$. Considérons une hypersurface cubique $X \subset \mathbb{P}^5$. Dans ce cas :

$$H^4(X,\mathbb{Z}) \subset H^4(X,\mathbb{C}) = H^{3,1} \oplus H^{2,2} \oplus H^{1,3}\ \text{, avec } \dim H^{3,1} = 1.$$

Soit alors $M := H^4(X,\mathbb{Z})_0$ et $\Omega_M := \{x \in \mathbb{P}(M_{\mathbb{C}}) \mid x^2 = 0\ ,\ x \cdot \bar{x} < 0\}$. Attention, on prend cette fois-ci la condition ouverte $x \cdot \bar{x} < 0$.

Notons $\mathcal{C}$ l'espace des modules des hypersurfaces cubiques $\subset \mathbb{P}^5$, *i.e.* l'ensemble des polynômes homogènes $P \in \mathbb{C}[X_0,\ldots,X_5]$ de degré 3 (associés à des variétés lisses) modulo l'action de $GL(5)$.

On construit comme plus haut une application des périodes $\wp : \mathcal{C} \to \Omega_M/O(M)$.

Théorème 1.5.3. *(Voisin, 1986 ; Looijenga, 2009) On a l'isomorphisme* $\wp : \mathcal{C} \simeq \Omega_M^0/O(M)$*, où* Ω_M^0 *est le complémentaire d'une réunion localement finie d'hyperplans de* $\Omega_M \subset \mathbb{P}(M_{\mathbb{C}})$*.*

On doit à Claire Voisin l'injectivité (dans sa thèse en 1986 [Vo86, Vo08]). Looijenga [Lo09] rajoute en 2009 une description explicite des hyperplans à retirer pour obtenir la surjectivité.

1.5.3 En général

Dans le cas général, on dispose d'un théorème de Donagi [Do83] datant de 1983 et valable pour les variétés qui sont des hypersurfaces *génériques.*

Théorème 1.5.4 (Donagi, 1983)**.** *Soit $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une hypersurface de degré d générique et soit $X' \subset \mathbb{P}^{n+1}$ une autre hypersurface de degré d. Si on a $H^n(X,\mathbb{Z})_0 \simeq H^n(X',\mathbb{Z})_0$ un isomorphisme de structures de Hodge polarisées, alors $X \simeq X'$, sauf peut-être dans les cas exceptionnels suivants :*

$$n = 2, d = 3; \quad d \mid n+2; \quad d = 4, n = 4k; \quad d = 6,\ n = 6k+1.$$

Remarquons que le théorème de Claire Voisin cité précédemment traite le cas $d \mid n+2$ lorsque $d = 3$ et $n = 4$.

Pour prouver le théorème on commence par construire là aussi une application des périodes $\wp$ et on montre qu'elle est de degré 1. L'ingrédient principal de la preuve est l'interprétation par Griffiths (après des travaux de Poincaré) de la structure de Hodge de $H^n(X,\mathbb{Z})$ en termes de *l'idéal jacobien* $J_F = (F'_{X_0},\dots,F'_{X_n}) \subset \mathbb{C}[X_0,\dots,X_n]$.

Stratégie : on récupère X, non pas à partir de $\wp(X)$, mais à partir de l'application tangente $T_X(\wp)$. Celle-ci permet de retrouver, par des manipulations purement algébriques, l'idéal J_F, qui détermine F.

1.6 Conclusion

Je n'ai touché qu'un aspect des applications de la théorie de Hodge ; il y en a bien d'autres, notamment à la théorie des *cycles algébriques* – description et structure des sous-variétés d'une variété donnée. C'est en fait un aspect un peu en filigrane de cette présentation ; par exemple, lorsqu'on a abordé la jacobienne intermédiaire, on n'a pas parlé du fait que cet objet paramètre des cycles dans la variété et joue ainsi un rôle très important.

Questions

Qing Liu. — Tu as passé sous silence la torsion dans la cohomologie entière, peut-on en retirer des informations sur la variété ?

A. B. — Au premier ordre, lorsqu'on regarde uniquement la structure de Hodge, la torsion disparaît. Cependant lorsqu'on regarde les surfaces d'Enriques, qui sont des quotients de surfaces $K3$ par une involution sans point fixe, alors la structure de Hodge de la surface est triviale, par contre si on regarde le revêtement universel de la surface, on récupère en quelque sorte l'information de la torsion, et on sait montrer que la structure de Hodge du revêtement détermine la surface d'Enriques dont on est parti. Dans ce sens-là, on tire des informations de la torsion.

Fabien Pazuki. — Comment est-ce qu'on détermine les hyperplans à mettre de côté pour obtenir la surjectivité des applications des périodes ?

A. B. — Dans le cas d'une surface quartique par exemple, il faut s'intéresser aux classes de carré -2. Il faut en fait enlever tous les hyperplans orthogonaux à une classe de carré -2. En effet, le théorème de Riemann-Roch montre qu'une telle classe est soit effective, soit a une classe opposée effective. Or on ne peut avoir de classe effective dans l'orthogonal de l'élément h qu'on avait introduit. Attention, je n'ai jamais prétendu que c'était facile !

Qing Liu. — Est-ce qu'il y a une construction algébrique de la jacobienne intermédiaire ? Est-ce faisable en toute caractéristique ?

A. B. — En général non. Mais par exemple, dans le cas où $H^{3,0} = 0$, on peut faire des choses. Prenons plus particulièrement les hypersurfaces cubiques : cela repose alors sur l'existence de ce qu'on appelle une variété de Prym (liée à un revêtement double de courbe) associée à la jacobienne intermédiaire. On peut alors utiliser une propriété universelle pour les mettre en relation, même sur un corps de caractéristique p.

Bibliographie

[ArMu72] M. Artin et D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational,* Proc. London. Math. Soc. (3) **25**, 75–95 (1972).

[BaBo66] W. L. Jr. Baily et A. Borel, *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains,* Ann. of Math. (2) **84**, 442–528 (1966).

[Be77] A. Beauville, *Prym varieties and the Schottky problem,* Invent. Math. **41.2**, 141–196 (1977).

[Be82] A. Beauville, *Les singularités du diviseur Θ de la jacobienne intermédiaire de l'hypersurface cubique dans $\mathbb{P}^4$,* Lect. Notes in Math. **947**, Springer, 190–208 (1982).

[ClGr72] H. Clemens et P. A. Griffiths, *The intermediate Jacobian of the cubic threefold,* Ann. of Math. (2), **95**, 281–356 (1972).

[De71a] P. Deligne, *Théorie de Hodge I,* Actes Cong. Int. Math. (Nice, 1970), Gauthier–Villars, 425–430, **1** (1971).

[De71b] P. Deligne, *Théorie de Hodge II,* IHES Pub. Math. **40**, 5–58 (1971) .

[De74] P. Deligne, *Théorie de Hodge III,* IHES Pub. Math. **44**, 5–77 (1974).

[Do83] R. Donagi, *Generic Torelli for projective hypersurfaces,* Compositio Math. **50**, 325–353 (1983) .

[DeIl87] P. Deligne et L. Illusie, *Relèvements modulo p^2 et décomposition du complexe de de Rham,* Invent. Math. **89.2**, 247–270 (1987).

[Gre84] M. L. Green, *Quadrics of rank four in the ideal of a canonical curve,* Invent. Math. **75**, 85–104 (1984).

[Gri70] P. A. Griffiths, *Periods of integrals on algebraic manifolds,* Bull. Am. Math. Soc. **76**, 228–296 (1970).

[Ho89] W. Hodge, *The theory and applications of harmonic integrals,* (Réédition de l'ouvrage de 1941) Camb. Univ. Press (1989).

[IsMa71] V. A. Ishkovskikh et Ju. I. Manin *Three-dimensional quartics and counter-examples to the Lüroth problem,* Math.Sb. (N.S.) **(86)128**, 140–166 (1971) .

[Lo09] E. Looijenga, *The period map for cubic fourfolds,* Invent. Math. **177.1**, 213–233 (2009).

[Lü75] J. Lüroth, *Beweis eines Satzes über rationale Curven,* Math. Ann. **9.2**, 163–165 (1875).

[PiSh71] I. I. Piatetski-Shapiro et I. R. Shafarevich, *Torelli's theorem for algebraic surfaces of type $K3$,* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. **35**, 530–572 (1971).

[Vo86] C. Voisin, *Théorème de Torelli pour les cubiques de* $\mathbb{P}^5$*,* Invent. Math. **86.3**, 577–601 (1986).

[Vo08] C. Voisin, *Erratum : Théorème de Torelli pour les cubiques de* $\mathbb{P}^5$*,* Invent. Math. **172.2**, 455–458 (2008).

[Vo02] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe,* Cours Spécialisés **10**, SMF, Paris (2002).