EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I DEFINITIONS ET PROBLEMES GENERAUX

1 Exemples simples

Considérons les 5 équations suivantes reliant une fonction y et ses dérivés y' , y''

$y' = 0$ $\quad$ $y' = 2$ $\quad$ $y' = y$ $\quad$ $y'' = 0$ $\quad$ $y''+\omega^2 y = 0$

Elles sont équivalentes respectivement à

$y = \lambda_1$ $\quad$ $y = 2x+\lambda_1$ $\quad$ $y = \lambda_1 e^x$ $\quad$ $y = \lambda_1 x+\lambda_2$ $\quad$ $y = \lambda_1\cos\omega x+\lambda_2\sin\omega x$

où λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles arbitraires

2 Définitions

Une équation différentielle d'ordre p *est une équation liant une fonction y et ses p dérivées successives $y',y'',..,y^{(p)}$ sur un intervalle* **I** $\quad$ $R\,[x, y(x), y'(x), .., y^{(p)}(x)] = 0 \quad x \in I$ ***(1)***

(1) prend souvent l'une des écritures équivalentes

$$R\,[x, y, y', .., y^{(p)}] = 0 \qquad \text{ou} \qquad R\,[x, y, \frac{dy}{dx}, .., \frac{d^p y}{dx^p}] = 0$$

Dans la plupart des problèmes l'intervalle réel I de (1) sera à préciser.

Une solution de (1) *est une fonction y vérifiant (1) sur un intervalle I de R*
Une ligne (courbe) intégrale est une représentation graphique de y

On montre que les solutions de (1) dépendent en général de p constantes arbitraires $\lambda_1 , \lambda_2 ...,\lambda_p$
Intégrer une équation différentielle c'est en chercher toutes les solutions.
On s'attachera à expliciter ces solutions sous une forme la plus simple possible:
- fonctionnelle $\quad$ y = Fonction (x) ou à défaut x = Fonction (y)
- paramétriquex et y fonctions du même paramètre t
- relationnelle $\quad$ F(x,y) = 0
- graphique ou numérique (par points)

3 Cas des équations différentielles du 1er ordre R[x,y,y'] = 0 (1)

a) Solution générale, particulière, singulière

On peut vérifier que $y^2 + (yy')^2 = 1$ (1) admet pour solutions

✈ toutes les fonctions $\quad y_\lambda = \pm\sqrt{1-(x-\lambda)^2}$ $\quad$ avec μ réel arbitraire

✈ et 2 fonctions $\quad \bar{y}_1 = 1$ $\quad$ et $\quad \bar{y}_2 = -1$

La famille de solutions y_λ indicée par la constante réelle λ est appellée ***solution générale*** de (1)
$\bar{y}_1$ et $\bar{y}_2$ qui n'appartiennent pas à cette famille sont des ***solutions singulières*** de (1)
toute fonction vérifiant (1) est appellée ***solution particulière*** de (1)

b) Equation différentielle d'une famille de courbes { C_λ / $\lambda \in$ R}

Soit C_λ la famille de courbes d'équation $\mathbf{f(x, y(x), \lambda) = 0}$ **(2)** indicée par le paramètre réel λ . En éliminant λ du système : $\begin{cases} \mathbf{f(x,y(x),\lambda) = 0} & \mathbf{(2)} \\ \mathbf{\frac{d}{dx}\left[f(x,y(x),\lambda)\right] = 0} & \mathbf{(3)} \end{cases}$

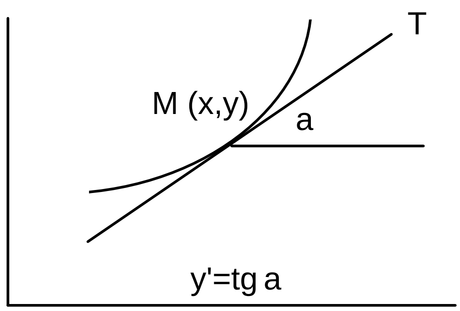
on obtient une équation différentielle $\mathbf{R\left[x,y,y'\right] = 0}$ (1) équivalente à (2) ; (1) est l'équation différentielle de la famille **{ C_λ / $\lambda \in$ R}**.

Exemple pour la famille des paraboles de sommet O, tangentes en O à Oy,

$$\mathbf{y^2 = 2\lambda x \quad (2) \qquad ; \qquad 2yy' = 2\lambda \quad (3) \qquad ; \qquad 2xy' - y = 0 \quad (1)}$$

Remarque A une famille de fonctions dépendant de p paramètres, est associée une équation différentielle d'ordre p.

c) Intérprétation géométrique de l'équation



A tout triplet (x,y,y') vérifiant (1) est associé un élément de contact d'une courbe intégrale c'est dire un point M (x,y) et une tangente MT de pente y'.

Conséquences : Les ***enveloppes*** des lignes intégrales (qui leurs sont tangentes) sont aussi des lignes intégrales ; elles sont généralement singulières (cf exemple 3a)

L' équation différentielle (1) apporte sans intégration des renseignements sur les lignes intégrales (ensemble des extrema des points d'inflexion ...) On pourra chercher ces ensembles pour l'équation **y'-xy = 2**

Définition : Pour l'équation (1), on appelle **isocline** dans la direction de pente m l'ensemble $\mathbf{I_m}$ des points des courbes intégrales en lesquels la pente de la tangente est constamment égale à m; $\mathbf{I_m}$ a pour équation $\mathbf{R\left[x,y,m\right]=0}$

d) Trajectoires orthogonales

Définition 1 Deux ***courbes*** sont ***orthogonales*** ssi elles ***se coupent*** et que leurs ***tangentes*** au point d'intersection sont ***perpendiculaires***. Notons que le produit des pentes de ces tangentes vaut alors -1 .

Définition 2 On appelle ***trajectoire orthogonale*** de la famille de courbes **{ C_λ / $\lambda \in$ R}** une courbe Γ telle qu'en chacun de ses points il passe une courbe $\mathbf{C_\lambda}$ orthogonale à.Γ

Notons que, si $\mathbf{R\left[x,y,y'\right] = 0}$ est l'équation différentielle de la famille **{C_λ / $\lambda \in$R}**,

$\mathbf{R\left[x,y,\left(-1/y'\right)\right]=0}$ est celle des trajectoires orthogonales.

Exemple : Les trajectoires orthogonales des paraboles de 3b) ont pour équation différentielle :

$\mathbf{2x(-1/y') - y = 0}$ associée à la famille d'ellipses $\mathbf{x^2 + y^2/2 = cte}$

e) Théorème *Si **F** et* F'_y *sont continues sur un domaine **D** , alors pour tout* $(x_0,y_0) \in \overset{\circ}{D}$ *intérieur de **D** , il existe* φ *unique solution de* $y' = F(x,y)$ *tel que* $\begin{cases} \varphi'(x)=F(x,\varphi(x)) \\ \varphi(x_0)=y_0 \end{cases}$

Pour l'équation **y'=ay** , les hypothèses sont vérifiées pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}$ et la solution unique est $y = y_0 e^{a(x-x_0)}$
Pour l'équation **(1+x)y'=y** , les hypothèses sont vérifiées pour tout $x_0 \neq -1$ **et** $y_0 \in \mathbb{R}$, on a alors pour $x_0 \neq -1$: $y = y_0 \dfrac{1+x}{1+x_0}$; pour $x_0=-1$ les hypothèses ne sont pas remplies pour $F(x,y) = \dfrac{y}{1+x}$

II QUELQUES METHODES DE RESOLUTION ANALYTIQUE POUR LE 1er ORDRE

1 Intégration directe

Outre les équations du type y' = f(x) qui se ramènent immédiatement à la recherche des primitives de f, il est parfois possible d'intégrer directement **R[x,y,y'] = 0** (1) en mettant en évidence des groupements différentiels. Les 3 exemples ci dessous illustrent ce procédé :

$yy' - y' + x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{2} - y + \frac{x^2}{2}\right)' = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2y + x^2 = Cte$ $\qquad yy' + y + e^x = 0 \Leftrightarrow$
$(xy + e^x)' = 0 \Leftrightarrow xy + e^x = Cte$

$yy' - y = x \Leftrightarrow (y/x)' = 1/x \Leftrightarrow y/x = \ln|x| + cte \Leftrightarrow y = x(\ln|x| + K) \quad K \in \mathbb{R}$

2 Equation à variables séparables

Définition Equation **R[x,y,y'] = 0** qui peut se ramener à une écriture de la forme
A(y) dy = B(x) dx (1) avec y' = dy/dx

Notons que dans une équation à variables séparables, **y'= B(x)/A(y)** est produit (quotient) de fonctions de x seul par des fonctions de y seul.

Résolution : (1) équivaut à $\int A(y)dy = \int B(x)dx + C \quad$ **avec** $C \in \mathbb{R}$
Exemple **y' = y - a (1)**
Sous la condition $y \neq a$, (1) équivaut aux équations suivantes **dy/dx = y - a** ; **dy /(y-a) = dx** ; $\ln|y-a| = x + C$; $|y-a| = e^{x+C}$; $y = a \pm e^C e^x$
D'autre part **y = a** est solution de (1)

Donc **(1)** $\Leftrightarrow$ **y = a ou** $y = a \pm e^C e^x \Leftrightarrow y = a + Ke^x \quad K \in \mathbb{R}$

3 Equations homogènes en x et y

Définition : Equation **R[x,y,y'] = 0** pour lesquelles le changement **(x,y) --> (kx,ky)** , k réel arbitraire, laisse y' invariant.

Notons que y' ne dépend que du rapport y/x et que les lignes intégrales sont homothétiques dans des homothéties de centre O

Résolution Le changement de fonction **y(x) --> t(x)=y(x)/x** transforme une équation homogène de la forme **y' = f(y/x)** en une équation à variables x et t séparables

Exemple $2xyy' = y^2-x^2$ **(1)** $\Leftrightarrow$ **y' = 1/2 (y/x - x/y)** . Le changement **y --> t**, via les formules **y=tx**; **y' = t + xt'** où **t' = dt/dx** , conduit aux écritures équivalentes : **t + xt' = 1/2 (t +1/t)**
$dx/x=-2tdt/(t^2+1)$; $\ln|x| = -\ln((t^2+1)) + C$; $y^2+x^2 = kx$, avec $k = \pm e^C$ réel non nul.

4) Equations linéaires (du 1er degré en y et y')

Définition Equation **R[x,y,y'] = 0** pouvant se mettre sous la forme : **a(x) y' + b(x) y = d(x) (1)**

La résolution repose sur les théorèmes ci-dessous dans lesquels intervient l'équation **a(x) Y' + b(x) Y = 0 (2)** équation homogène ou *"sans second membre"* associée à (1)

Théorème 1 *Si* y_0 *est solution de (1) alors* **y** *est solution de (1) si et seulement si* $Y=y-y_0$ *est solution de (2)*

Conséquence La solution **y** de (1) s'obtient en ajoutant à l'une de ses solutions particulières y_0 la solution générale **Y** de (2).

Exemple 1 **y'=y+1 (1)**

$y_0=1$ est solution particulière de (1).
La resolution de **(2)** : **Y'=Y** conduit à l'ensemble des solutions $Y=ke^x$ $k \in R$
La solution générale de **(1)** est $y = 1+ke^x$ $k \in R$

Résolution Elle revient à chercher **Y** et y_0

1ère ETAPE Résolution de l'équation à variables séparables **a(x) Y' + b(x) Y = 0 (2)**

$$(2) \Leftrightarrow Y = ke^{\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx} \; k \in R$$

Notons que si Y_0 est solution particulière de **(2)**, $\{kY_0 \;/\; k \in R\}$ est solution générale de **(2)**

2ième ETAPE Recherche d'une solution particulière y_0 de **a(x) y' + b(x) y = d(x) (1)**
Dans le cas où on ne peut induire la forme de y_0 on peut utiliser le théorème suivant dit de *"variation de la constante" !!!*

Théorème 2 *Si* $\{kY_0 \;/\; k \in R\}$ est solution générale de **(2)** il existe une solution particulière de **(1)** de la forme $k(x)Y_0$ avec $k(x)=\int \frac{d(x)}{a(x)Y_0}$ s'obtenant par intégration

Exemple 2 $(1+x^2)y' - xy = \sqrt{1+x^2}$ **(1)**

1ère ETAPE Résolution de $(1+x^2)Y' - xY = 0$ **(2)** $\Leftrightarrow$ $Y = k\sqrt{1+x^2}$ $k \in R$

2ième ETAPE Recherche d'une solution y_0 de $(1+x^2)y' - xy = \sqrt{1+x^2}$ **(1)** de la forme $Y = k(x)\sqrt{1+x^2}$

On est conduit à $k'(x).(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1+x^2}$ soit $k'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $k(x) = \text{Arctg}x$; $y_0 = (\text{Arctg}x)\sqrt{1+x^2}$

$$\textbf{BILAN : (1)} \Leftrightarrow y = (\text{Arctg}x)\sqrt{1+x^2} + k\sqrt{1+x^2} \quad k \in R$$