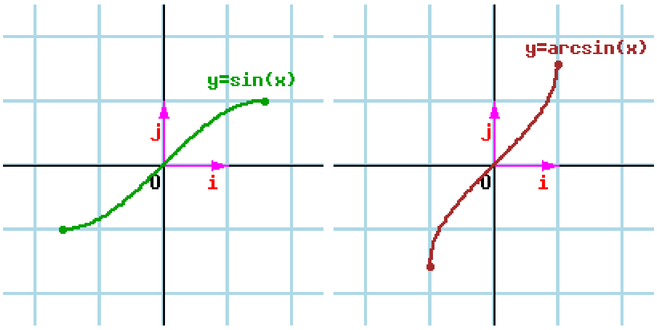
2.5.4 Compléments (fonctions trigonométriques inverses)

Les fonctions trigonométriques $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \tan(x)$ n'étant pas monotones sur $\mathbb{R}$ (la fonction $x \mapsto \tan(x)$ n'est même pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier), pour construire des fonctions inverses (on dit aussi fonctions réciproques) aux fonctions trigonométriques, on est obligé de se restreindre à des intervalles de monotonie de ces fonctions (on prend en général des intervalles de monotonie maximaux).

I. **La fonction arcsin:**
la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est monotone (strictement croissante) sur l'intervalle $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
On définit alors son inverse, arcsin: $[-1, 1] \longrightarrow [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x \mapsto \arcsin(x)$.
Il faut retenir que:

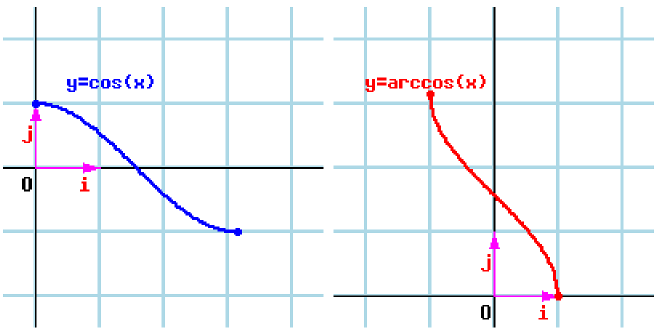
1. le **domaine de définition** de la fonction arcsinus est $[\mathbf{-1, 1}]$
2. $\boldsymbol{y = \arcsin(x) \Longleftrightarrow \left(\sin(y) = x \text{ et } \frac{-\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)}$



Les graphes de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
En utilisant les règles de dérivation de fonctions composées, on montre que la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et que $\boldsymbol{(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$.

II. **La fonction arccos:**
la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est monotone (strictement décroissante) sur l'intervalle $[0, \pi]$. On définit son inverse, arccos: $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$, $x \mapsto \arccos(x)$.
Il faut retenir que:

1. le **domaine de définition** de la fonction arccos est $[\mathbf{-1, 1}]$
2. $\boldsymbol{y = \arccos(x) \Longleftrightarrow (\cos(y) = x \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \pi)}$



Les graphes de ces deux fonctions se déduisent l'un de l'autre par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y=x$.
En utilisant les règles de dérivation de fonctions composées, on montre que la fonction $x \mapsto \arccos(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\boldsymbol{(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

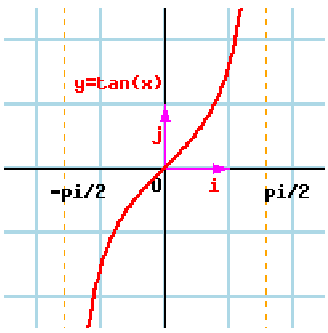
Remarque: En utilisant les définitions des fonctions **arcsin**, **arccos** et les formules trigonométriques usuelles, on montre:

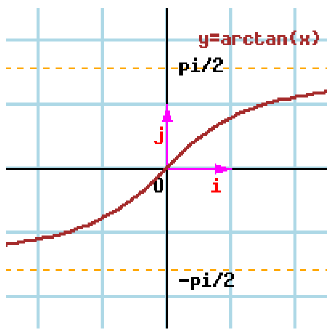
$$\boldsymbol{\forall x \in [-1,1],\ \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}}.$$

En effet, pour $x \in [-1,1]$, posons $y = \arcsin(x)$.
Nous avons $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $\sin(y) = x$. Or on a $\sin(y) = \cos(\dfrac{\pi}{2} - y)$.
Comme $0 \leqslant \dfrac{\pi}{2} - y \leqslant \pi$, on obtient
$\arcsin(x) + \arccos(x) = y + \mathrm{arcos}(\cos(\dfrac{\pi}{2} - y)) = \dfrac{\pi}{2}$.

III. **La fonction arctan:**
la fonction tangente est monotone (strictement croissante) sur l'intervalle $]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.
L'image de l'intervalle $]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ par la fonction $x \mapsto \tan(x)$ est $\mathbb{R}$ tout entier. La fonction inverse (ou encore réciproque) déduite est la fonction **arctan:** $\boldsymbol{\mathbb{R} \longrightarrow]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[}$. Ce qu'il faut retenir:

1. Le **domaine de définition** de arctan est $\mathbb{R}$
2. $\boldsymbol{y = \arctan(x) \Longleftrightarrow \left(\tan(y) = x \text{ et } \dfrac{-\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)}$





arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\boxed{\boldsymbol{\arctan(x)' = \dfrac{1}{1+x^2}}}$.

IV. **Complément à la liste des primitives des fonctions usuelles:**
λ désignant une constante réelle quelconque, nous avons:

1. $\boxed{\boldsymbol{\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{dx} = \arcsin(x) + \lambda}}$
2. $\boxed{\boldsymbol{\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{dx} = \arctan(x) + \lambda}}$

2.6 Intégrales impropres - Définitions et exemples

Une généralisation de la notion d'intégrale définie.

2.6.1 Intégrales (impropres) sur un intervalle non borné

Définition 2.30.
Soient $a \in \mathbb{R}$, f: $[a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $b \geqslant a$, f est intégrable sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$.

On pose alors par définition $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{dx} = \lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$. *L'expression* $\displaystyle\int_a^{+\infty} \boldsymbol{f(x)}\mathbf{dx}$ ***est appelée intégrale impropre de f*** *sur* $\Big[a, +\infty\Big[$.

Si $\displaystyle\lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ *existe et est un nombre réel, alors l'intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *est dite convergente.*

Si $\displaystyle\lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{dx}$ *n'existe pas ou est infinie, alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ *est dite divergente*

Note: Nous n'allons pas aborder ici les théorèmes généraux de convergence des intégrales impropres, mais plutôt considérer des cas simples où on sait calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{dx}$. Le passage à la limite lorsque b tend vers $+\infty$ (ou lorsque a tend vers $-\infty$ comme ci-dessous) nous permettra de décider de la convergence de l'intégrale impropre considérée.

Exemple 2.31.

1. f: $\Big[1, +\infty\Big[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

   Pour $b \in \Big[1, +\infty\Big[$, on a f continue sur $[1, b]$ et $\displaystyle\int_1^b f(x)\mathrm{dx} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$.

   On en déduit $\displaystyle\lim_{b \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{dx} = 1$, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{dx} = 1$.

2. f: $\Big[1, +\infty\Big[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   On a, pour $b \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^b f(x)\mathrm{dx} = \Big[\ln(x)\Big]_1^b = \ln(b)$. Comme $\displaystyle\lim_{b \longrightarrow +\infty} \ln(b) = +\infty$, on en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{dx}$ diverge.

3. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x)\mathrm{dx}$ diverge.

   En effet $\displaystyle\int_0^b \cos(x)\mathrm{dx} = \Big[\sin(x)\Big]_0^b = \sin(b)$ et $\displaystyle\lim_{b \longrightarrow +\infty} \sin(b)$ n'existe pas.