Université Nice Sophia Antipolis - M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte Carlo)
http://math.unice.fr/rubentha/cours.html

CORRIGÉS POUR LE CHAPITRE 1

Exercice 1. Nous écrivons par exemple

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \cos(x^3)e^{-x}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cos(x^3)e^{-x} \times \mathbb{1}_{[0;1]}(x)dx\,. \end{aligned}$$

Donc $I_1 = \mathbb{E}(\cos(U^3)e^{-U})$ avec $U \sim \mathcal{U}([0;1])$. Donc, si $U_1, U_2, \dots$ sont i.i.d. $\sim \mathcal{U}([0;1])$, alors

$$\frac{\cos(U_1^3)e^{-U_1} + \dots + \cos(U_n^3)e^{-U_n}}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I_1\,.$$

Voir l'algorithme 1 pour une implémentation. Nous pouvons aussi écrire

Algorithme 1 Calcul de I_1

```
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
 u=runif(1,0,1)
 s=s+cos(u^3)*exp(-u)
}
cat("valeur approchée :  ",s/n)
```

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} \cos(x^3)\mathbb{1}_{[0;1]}(x) \times \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)e^{-x}dx\,.$$

Donc $I_1 = \mathbb{E}(\cos(X^3)\mathbb{1}_{[0;1]}(X))$ avec $X \sim \mathcal{E}(1)$. Donc, si $X_1, X_2, \dots$ sont i.i.d. $\sim \mathcal{E}(1)$, alors

$$\frac{\cos(X_1^3)\mathbb{1}_{[0;1]}(X_1) + \dots + \cos(X_n^3)\mathbb{1}_{[0;1]}(X_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I_1\,.$$

De même,

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{2\pi}\sin(x^4)e^{-2x}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) \times \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx = \mathbb{E}(\sqrt{2\pi}\sin(Z^4)e^{-2Z}\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(Z)\,,$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. Et

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} \sin(x^4)e^{-x^2/2}\frac{1}{2} \times 2\mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)e^{-2x}dx = \mathbb{E}(\sin(Y^4)e^{-Y^2/2}\frac{1}{2})\,,$$

avec $Y \sim \mathcal{E}(2)$.

De même,

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\pi}\ln(1+x^2)\mathbb{1}_{[0;1]}(x) \times \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2(1/2)}\right)}{\sqrt{2\pi(1/2)}} = \mathbb{E}(\sqrt{\pi}\ln(1+Z^2)\mathbb{1}_{[0;1]}(Z))\,,$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0;1/2)$. Et

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}} \ln(1+x^2)e^{-x^2} \times \mathbb{1}_{[0;1]}(x)dx = \mathbb{E}(\ln(1+X^2)e^{-X^2})\,,$$

avec $X \sim \mathcal{U}([0;1])$.

Exercice 2. (1) Si on tire U_1, U_2 indépendantes et uniformes dans $[-1;1]$ alors (U_1, U_2) est de loi uniforme dans C. Si on tire $((U_1^{(n)}, U_2^{(n)}))$ i.i.d., tous de même loi que (U_1, U_2), alors, par la loi des grands nombres (les variables $\mathbb{1}_{\dots}$ sont bornées donc les hypothèses sont bien vérifiées) :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(U_1^{(k)},U_2^{(k)})\in D} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X\in D})\,.$$

Voici un exemple de code : algorithme 2.

Algorithme 2

```
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
 u=runif(1,-1,1)
 v=runif(1,-1,1)
 if (u^2+v^2<1)
 {
 s=s+1
 }
}
cat("valeur approchée :  ",s/n)
```

(2) Par la loi des grands nombres (qui s'applique pour la même raison que ci-dessus)

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(\mathbb{1}_{(U_1^{(2k)},U_2^{(2k)})\in D} - \mathbb{1}_{(U_1^{(2k-1)},U_2^{(2k-1)})\in D})^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{V}(X)\,.$$

Voici un exemple de code : algorithme 3.

(3) Par le même calcul que dans la section sur la vitesse de convergence (1.2.2) (refaire le calcul), on voit qu'il faut choisir n tel que

$$n \geq \frac{(1,96\sigma)^2}{0,01^2}$$

Algorithme 3

```
indi<-function(u,v)
{
 z=0
 if (u^2+v^2<1)
 { z=1 }
 return(z)
}
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
 u=runif(1,-1,1); v=runif(1,-1,1)
 w=runif(1,-1,1); x=runif(1,-1,1)
 s=s+(indi(u,v)-indi(w,x))^2
}
cat("valeur approchée de la variance :  ",s/(2*n))
```

(où σ^2 est la variance). On trouve

$$\frac{(1,96\sigma)^2}{0,01^2} \approx 6608\,.$$

Exercice 4. (1) Si on prend X_1, X_2, ... i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0;1])$, alors $\mathbb{E}(\sin(\sqrt{X_1})) = I$ (on a bien $\mathbb{E}(|\sin(\sqrt{X_1})|) < +\infty$ puisque la variable intégrée est bornée par 1). Donc par la loi des grands nombres

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin(\sqrt{X_k}) \underset{n\to+\infty}{\overset{\text{p.s.}}{\longrightarrow}} I\,.$$

(2) Voici un exemple de code : algorithme 4.

Algorithme 4

```
n=1000
for (i in 1:n)
{
 u=runif(1,0,1)
 s=s+sin(sqrt(u))
}
cat("valeur approchée de la variance :  ",s/n)
```

(3) On veut

$$\mathbb{P}\left(|I_n - I| \geq 0,01\right) \leq 0,01\,.$$

Calculons

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(|I_n - I| \geq 0,01) & = & \mathbb{P}(\sqrt{n}|I_n - I| \geq \sqrt{n} \times 0,01) \\ \text{(TCL)} & \approx & \mathbb{P}(\sigma|Z| \geq \sqrt{n} \times 0,01)\,, \end{array}$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. On veut donc

$$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}0,01}{\sigma}\right) \leq 1 - \frac{0,01}{2} = 0,995\,.$$

On voit sur la table qu'il faut choisir n tel que

$$\sqrt{n} \times \frac{0,01}{\sigma} \geq 2,58\,,$$

c'est à dire

$$n \geq \left(\frac{2,58\sigma}{0,01}\right)^2\,.$$

Exercice 5. Il y a intersection si $X \leq \sin(\Theta)$. Donc la probabilité qui nous intéresse vaut

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin(t)} 1dx\frac{dt}{(\pi/2)} &= \int_0^{\pi/2}\frac{2}{\pi}\sin(t)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\cos(t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\,.\end{aligned}$$

Exercice 6. Si U^1, U^2, U^3 sont des variables indépendantes de loi $\mathcal{U}([0;1])$, alors la densité de (U^1, U^2, U^3) est

$$(x,y,z) \mapsto \frac{\mathbb{1}_{[0;1]^3}((x,y,z))}{1^3}$$

(ne pas oublier de normaliser par le volume du cube). Par la loi des grands nombres, la limite p.s. cherchée est

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(U^1)^2+(U^2)^2+(U^3)^2<1}) = \int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{1}_{x^2+y^2+z^2<1} \times \frac{\mathbb{1}_{[0;1]^3}((x,y,z))}{1}dxdydz = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi 1^3\right)$$

(un huitième du volume de la boule de rayon 1).

De même, si U^1, U^2, U^3 sont des variables indépendantes de loi $\mathcal{U}([0;R])$ (avec $R > 0$), alors la densité de (U^1, U^2, U^3) est

$$(x,y,z) \mapsto \frac{\mathbb{1}_{[0;R]^3}((x,y,z))}{R^3}\,.$$

Si $((U^1_n, U^2_n, U^3_n))_{n\geq 1}$ sont i.i.d. de même loi que (U^1, U^2, U^3) alors, par la loi des grands nombres,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{(U^1_n)^2+(U^2_n)^2+(U^3_n)^2<R^2} \to \mathbb{E}(\mathbb{1}_{(U^1)^2+(U^2)^2+(U^3)^2<R^2})$$

quand $N \to +\infty$. Et

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{(U^1)^2+(U^2)^2+(U^3)^2<R^2}) = \int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{1}_{x^2+y^2+z^2<R^2}\times\frac{\mathbb{1}_{[0;R]^3}((x,y,z))}{R^3}dxdydz = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\frac{1}{R^3} = \frac{\pi}{6}\,.$$

On remarque que le résultat ne dépend pas de R.

Exercice 8.

(1) Soient $\epsilon_1(x)$, …, $\epsilon_n(x)$ des variables i.i.d. de loi $\mathcal{B}(x)$. Nous avons alors : $S_n(x) \sim \mathcal{B}(n,x)$. Donc

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)\,.$$

(2) Nous avons (puisque les $\epsilon_k(x)$ sont indépendants) :

$$\mathbb{E}(S_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\epsilon_k(x)) = nx\,,$$

$$\mathbb{V}(S_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(\epsilon_k(x)) = nx(1-x)\,.$$

Et donc

$$\mathbb{V}\left(\frac{S_n(x)}{n}\right) = \frac{nx(1-x)}{n^2} - \left(\frac{nx}{x}\right)^2 = \frac{x(1-x)}{n}\,.$$

Nous en déduisons, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n(x)}{n} - x\right| \geq \epsilon\right) &\leq \frac{\mathbb{V}\left(\frac{S_n(x)}{x}\right)}{\epsilon^2} \\ &= \frac{x(x-1)}{n\epsilon^2}\,.\end{aligned}$$

La fonction $x \in [0;1] \mapsto x(x-1)$ est un polynôme de degré 2 dont le graphe est concave (parce que le coefficient de x^2 est négatif). Donc elle atteint son maximum là où sa dérivée s'annule. La dérivée est $x \mapsto 2x-1$ et s'annule en $1/2$. Le maximum est donc $(1/2)^2 = 1/4$. Donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n(x)}{n} - x\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}\,.$$

(3) Puisque la fonction f est continue sur $[0;1]$, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| < +\infty$. Pour tout $\epsilon > 0$, $x \in [0;1]$,

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| &= \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right)\right) - f(x)\right| \\ &= \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right) - f(x)\right)\right| \\ &\leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right) - f(x)\right|\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n(x)}{n}-x\right|\geq\epsilon} + \left|f\left(\frac{S_n(x)}{n}\right) - f(x)\right| \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n(x)}{n}-x\right|<\epsilon}\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n(x)}{n}-x\right|\geq\epsilon} + \sup_{y,z\in[0;1],|y-z|<\epsilon} |y-z| \times \mathbb{1}_{\left|\frac{S_n(x)}{n}-x\right|<\epsilon}\right) \\ &= 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n(x)}{n} - x\right| \geq \epsilon\right) + \sup_{y,z\in[0;1],|y-z|<\epsilon} |y-z| \times \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n(x)}{n} - x\right| < \epsilon\right) \\ &\leq 2\|f\|_\infty \times \frac{1}{4n\epsilon^2} + \sup_{y,z\in[0;1],|y-z|<\epsilon} |y-z|\,.\end{aligned}$$

Soit $\delta > 0$. Puisque f est continue sur $[0;1]$ qui est compact alors elle est uniformément continue (cf. cours d'analyse de licence) donc il existe $\epsilon > 0$ tel que

$\sup_{y,z\in[0;1],|y-z|<\epsilon}|y-z|<\delta/2$. Il existe $N\geq 1$ tel que $n\geq N \Rightarrow 2\|f\|_\infty \times \frac{1}{4n\epsilon^2}<\delta/2$. Donc, pour cet ϵ et $n\geq N$, nous avons, pour tout $x\in[0;1]$

$$|\mathcal{P}_n(x)-f(x)|\leq \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\delta\,.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0;1]}|\mathcal{P}_n(x)-f(x)|=2\,.$$

Exercice 9.

(1) On passe en coordonnées polaires : $x=r\cos(\theta)$, $y=r\sin(\theta)$ avec $r\geq 0$, $\theta\in[0;2\pi[$. Si (x,y) est dans l'intérieur de la cardioïde, alors $(r^2-r\cos(\theta))^2<r^2$, donc $r^2<r(1+\cos(\theta))<2r$, donc $r<2$. Donc cet intérieur (que nous noterons C) est inclus dans $[-2;2]\times[-2;2]$. Soient (X_1,Y_1), (X_2,Y_2) ... des variables i.i.d. telles que $X_1 \perp\!\!\!\perp Y_1$ et $X_1,Y_1\sim\mathcal{U}([-2;2])$. La densité de (X_1,Y_1) est

$$(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\frac{\mathbb{1}_{[-2;2]^2}((x,y))}{4^2}\,.$$

Par la loi des grands nombres

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathbb{1}_C((X_i,Y_i)) &\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{1}_C((x,y))\times\frac{\mathbb{1}_{[-2;2]^2}((x,y))}{16}dxdy\\ (\text{comme } C\subset[-2;2]^2) &= \int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{1}_C((x,y))\times\frac{1}{16}dxdy\\ &= \frac{\mathcal{A}(C)}{16}\,,\end{aligned}$$

où $\mathcal{A}(C)$ est l'aire de C.

(2) On fait tourner la figure autour de l'axe de x et on obtient un solide de révolution (noté S, qui ressemble à une pomme). Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, notons $d=\sqrt{y^2+z^2}$. Nous avons, par un petite raisonnement géométrique,

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,(x^2+d^2-x)^2<(x^2+d^2)\}\,.$$

L'ensemble S est inclus dans $[-2;2]^3$. Prenons (X_i,Y_i,Z_i) des variables i.i.d. avec X_1,Y_1,Z_1 indépendants et de loi $\mathcal{U}([-2;2]^3)$. La densité de (X_1,Y_1,Z_1) est

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mapsto\frac{\mathbb{1}_{[-2;2]^3}((x,y,z))}{4^3}\,.$$

Par la loi des grands nombres

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\mathbb{1}_S((X_i,Y_i,Z_i)) &\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{1}_S((x,y,z))\times\frac{\mathbb{1}_{[-2;2]^3}((x,y,z))}{64}dxdydz\\ (\text{comme } S\subset[-2;2]^3) &= \int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{1}_s((x,y,z))\times\frac{1}{64}dxdydz\\ &= \frac{\mathcal{V}(S)}{64}\,,\end{aligned}$$

où $\mathcal{V}(S)$ est le volume de S.