

Processus stochastiques, contrôle no 2,

Durée 2h. Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le barème sera décidé lors de la correction.

Exercice 1. On se donne des variables $(\xi_n)_{n \geq 1}$ indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(\xi_1 = 2) = \mathbb{P}(\xi_1 = 0) = 1/2$. Ces variables représentent le gain par euro misé dans un jeu de hasard (l'indice n est le numéro de la partie). Un joueur démarre le jeu avec un capital $X_0 = 1$ et décide de miser la fraction λ de son capital à chaque partie ($0 < \lambda \leq 1$, λ est fixé). Notons X_n le capital du joueur après n parties. Nous avons la relation de récurrence : $X_{n+1} = (1 - \lambda)X_n + \lambda X_n \xi_{n+1}$. Nous introduisons la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, $\forall n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

(1) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale dans la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

Pour tout $n \geq 1$, X_n est une fonction de ξ_1, \dots, ξ_n , il est donc \mathcal{F}_n -mesurable. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par récurrence : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = (1 - \lambda)u_n + 2\lambda u_n$. On peut montrer par récurrence que $\forall n, 0 \leq X_n \leq u_n$. Donc, $\forall n, X_n$ est \mathbb{L}^1 . Pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}((1 - \lambda)X_{n-1} + \lambda X_{n-1} \xi_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ (X_{n-1} \text{ est } \mathcal{F}_{n-1}\text{-mesurable et } \xi_n \perp \mathcal{F}_n) &= (1 - \lambda)X_{n-1} + \lambda X_{n-1} \mathbb{E}(\xi_n) \\ &= (1 - \lambda)X_{n-1} + \lambda X_{n-1} \\ &= X_{n-1}. \end{aligned}$$

(2) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ pour tout n .

Puisque $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale, nous avons, pour tout n , $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_0) = 1$.

(3) Est-ce que la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ converge presque sûrement ?

Les X_n sont toujours ≥ 0 . Donc la question précédente nous montre que $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}(|X_n|) = 1 < +\infty$. Donc, par théorème de convergence, $\exists X_\infty$ telle que $X_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} X_\infty$.

(4) Calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ par récurrence sur n . (Indication : exprimer $\mathbb{E}(X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n)$ en fonction de λ et X_n .)

Nous avons, pour tout n ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((1 - \lambda)^2 X_n^2 + \lambda^2 X_n^2 \xi_{n+1}^2 + 2(1 - \lambda)\lambda X_n^2 \xi_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ (X_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable et } \xi_{n+1} \perp \mathcal{F}_n) &= (1 - \lambda)^2 X_n^2 + \lambda^2 X_n^2 \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2) + 2(1 - \lambda)\lambda X_n^2 \mathbb{E}(\xi_{n+1}) \\ &= (1 - \lambda)^2 X_n^2 + \lambda^2 X_n^2 \times 2 + 2(1 - \lambda)\lambda X_n^2 \\ &= X_n^2 \times ((1 - \lambda)^2 + 2\lambda^2 + 2(1 - \lambda)\lambda). \end{aligned}$$

Donc, par récurrence, $\mathbb{E}(X_n^2) = ((1 - \lambda)^2 + 2\lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda))^n$ pour tout n .

(5) Est-ce que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge dans \mathbb{L}^2 ?

Nous étudions la fonction $f : \lambda \in]0; 1] \mapsto f(\lambda) = (1 - \lambda)^2 + 2\lambda^2 + 2\lambda(1 - \lambda)$. Nous avons

$$f(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

Donc $\mathbb{E}(X_n^2) \xrightarrow[n \rightarrow 0]{} +\infty$. Donc nous n'avons pas convergence dans \mathbb{L}^2 .

Exercice 2. Soient X_1, X_2, \dots des variables indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Nous notons $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Nous introduisons la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ définie par : $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et, $\forall n \geq 1$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Soient a et b deux entiers tels que $a < 0 < b$. Nous notons $T = \inf\{n \geq 0 : S_n \in \{a, b\}\}$. Nous admettons que : T est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, T est fini presque sûrement, $\mathbb{P}(S_T = a) = \frac{b}{b-a}$.

- (1) On introduit $Z_n = S_n^2 - n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une martingale (dans $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$).

Pour tout n , Z_n est construit avec X_1, \dots, X_n donc est \mathcal{F}_n -mesurable, de plus : $|Z_n| \leq n^2 + n$ donc Z_n est \mathbb{L}^1 . Pour tout n ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((S_n + X_{n+1})^2 - (n+1) | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(S_n^2 + X_{n+1}^2 + 2S_n X_{n+1} - n - 1 | \mathcal{F}_n) \\ (\text{car } S_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable et } X_{n+1} \perp \mathcal{F}_n) &= S_n^2 + \mathbb{E}(X_{n+1}^2) + 2S_n \mathbb{E}(X_{n+1}) - n - 1 \\ &= S_n^2 + 1 + 0 - n - 1 \\ &= Z_n. \end{aligned}$$

- (2) Nous fixons $t \in \mathbb{N}^*$.

- (a) Montrer que $(Z_{\min(t,n)})_{n \geq 0}$ est une martingale (dans $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$).

Pour tout n , $Z_{\min(t,n)}$ est \mathcal{F}_n -mesurable et

$$\mathbb{E}(Z_{\min(t,n+1)} | \mathcal{F}_n) \begin{cases} = \mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = Z_n = Z_{\min(t,n)} & \text{si } t \geq n+1, \\ = \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_n) = Z_t = Z_{\min(t,n)} & \text{si } t \leq n. \end{cases}$$

- (b) Montrer que $\min(t, T)$ est un temps d'arrêt (pour $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$).

Pour tout n ,

$$\{\min(t, T) \leq n\} \begin{cases} = \Omega & \text{si } t \leq n, \\ = \{T \leq n\} & \text{si } t \geq n+1. \end{cases}$$

Dans tous les cas (puisque T est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$) : $\{\min(t, T) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

- (c) Montrer que $\mathbb{E}(S_{\min(t,T)}^2 - \min(t, T)) = 0$.

Pour tout n , $|Z_{\min(t,n)}| \leq \max(a^2, b^2) + t$. Donc la martingale $(Z_{\min(t,n)})$ est UI (uniformément intégrable). Donc (par théorème d'arrêt) $\mathbb{E}(Z_{\min(t,T)}) = \mathbb{E}(Z_0) = 0$.

- (3)

- (a) Montrer que $\mathbb{E}(S_{\min(t,T)}^2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(S_T^2)$.

Pour tout ω et tout $t \in \mathbb{N}^*$: $S_{\min(t,T)}^2(\omega) \leq \max(a^2, b^2)$. T est fini p.s. donc $S_{\min(t,T)}^2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} S_T^2$ (p.s.). Donc, par convergence dominée, $\mathbb{E}(S_{\min(t,T)}^2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(S_T^2) = \frac{b}{b-a} \times a^2 + \frac{-a}{b-a} \times b^2$.

- (b) Montrer que $\mathbb{E}(\min(t, T)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T)$.

Pour presque tout ω , $\min(t, T(\omega)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} T(\omega)$ en croissant (T est fini p.s.). Donc, par convergence monotone, $\mathbb{E}(\min(t, T)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T)$.

- (c) Calculer $\mathbb{E}(T)$.

Nous déduisons des questions précédentes :

$$\mathbb{E}(T) = \frac{b}{b-a} \times a^2 + \frac{-a}{b-a} \times b^2.$$