

Processus stochastiques, contrôle no 1,

Durée 1h15. Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Le barème sera décidé lors de la correction.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X \in \mathbb{L}^p$ pour un certain $p \geq 1$. Soit $k \in]0; p[$.

(1) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X| \geq x) = O\left(\frac{1}{x^{k+\epsilon}}\right)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Par inégalité de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X| > x) &\leq \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{x^p} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{x^{k+(p-k)}}, \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu.

(2) Montrer que $\mathbb{E}(|X|^k) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X|^k \geq t) dt$.

Nous calculons

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X|^k \geq t) dt &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{|x|^k \geq t} \mathbb{P}_X(dx) dt \\ \text{(Fubini-Tonelli)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{|x|^k \geq t} dt \mathbb{P}_X(dx) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \mathbb{P}_X(dx) \\ &= \mathbb{E}(|X|^k). \end{aligned}$$

(3) Dédurre des questions précédentes que $\mathbb{E}(|X|^k) < \infty$.

D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X|^k) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X|^k \geq t) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X| \geq t^{1/k}) dt \\ \text{(pour une constante } C \text{ et } \epsilon > 0) &\leq \int_0^{+\infty} \frac{C}{(t^{1/k})^{k+\epsilon}} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{C}{t^{1+\epsilon/k}} dt \\ \text{(intégrale de Riemann)} &< \infty. \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(p)$ (pour un paramètre p dans $]0; 1[$). On définit la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n^X)_{n \geq 0}$ associée à ce processus.

(1) Montrer que $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$ est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nous avons $\{T \leq 0\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0^X$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, nous regardons

$$\begin{aligned} \{T \leq n\} &= \{X_1 = 1\} \cup \dots \cup \{X_n = 1\} \\ &\in \mathcal{F}_n^X. \end{aligned}$$

(2) Calculer $\mathbb{E}(T)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (avec la convention : $n = 1 \Rightarrow \{X_1 = 0\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} = 0\} = \Omega$)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T = n) &= \mathbb{P}(\{X_1 = 0\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} = 0\} \cap \{X_n = 1\}) \\ (\text{les } X_k \text{ sont indépendants}) &= \mathbb{P}(X_1 = 0) \times \dots \times \mathbb{P}(X_{n-1} = 0) \times \mathbb{P}(X_n = 1) \\ (\text{les } X_k \text{ sont tous de loi } \mathcal{B}(p)) &= (1-p)^{n-1}p. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T) &= \sum_{n \geq 1} (1-p)^{n-1}p \times n \\ &= p \times \frac{d}{dp} \left(- \sum_{n \geq 0} (1-p)^n \right) \\ (\text{somme géométrique de raison } (1-p) \in]0; 1[) &= p \times \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) \\ &= \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

(3) Montrer que T est fini presque sûrement.

La variable T est positive et d'espérance finie. Elle est donc p.s. finie.

Exercice 3. Soient N une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$ (on rappelle que N prend ses valeurs dans \mathbb{N}^* avec $\mathbb{P}(N = k) = (1-p)^{k-1}p$). Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(q)$ ($q \in]0; 1[$). Les variables $(X_k)_{k \geq 1}$ sont supposées indépendantes de N . Soit $S = \sum_{k=1}^N X_k$.

(1) Calculer $\mathbb{E}(S|N = n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S|N = n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \\ &= n\mathbb{E}(X_1) \\ &= nq. \end{aligned}$$

(2) Calculer $\mathbb{E}(S)$. (On pourra utiliser la formule : $\sum_{n \geq 1} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$ pour $|z| < 1$.)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S) &= \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(S|S = n)\mathbb{P}(S = n) \\ &= \sum_{n \geq 1} nq(1-p)^{n-1}p \\ &= \frac{qp}{(1-(1-p))^2} = \frac{q}{p}. \end{aligned}$$