Liste des cours (durée 4h30)

Géométries, Groupes, Uniformisation des surfaces de Riemann

Sorin DUMITRESCU

Université Côte d'Azur, Nice, France

RÉSUMÉ. Le but de ce cours est d'illustrer le rôle des géométries (au sens de Klein) et de leurs groupes de symétries dans l'uniformisation des surfaces de Riemann. Rappelons que le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann affirme que toute surface de Riemann est isomorphe au quotient de l'un des trois modèles fondamentaux simplement connexes (i.e. le plan complexe, le demi-plan supérieur et la sphère de Riemann) par un groupe discret d'automorphismes. Dans un premier temps, nous allons démontrer un théorème d'uniformisation locale qui est le théorème des coordonnées isothermes. Ensuite nous allons illustrer le rôle des géométries euclidiennes, hyperboliques et sphèriques, ainsi que le rôle des structures projectives complexes dans la preuve du théorème d'uniformisation.

Références : Henri Paul de Saint-Gervais. *Uniformisation des surfaces de Riemann*, ENS Editions, 2010.

Systèmes Fuchsiens, monodromie et le problème de Riemann-Hilbert

Frank LORAY

Université de Rennes, France

RÉSUMÉ. On commencera par introduire les systèmes Fuchsiens sur la sphère de Riemann :

$$\frac{dY}{dx} = A(x) \cdot Y, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_r(x) \end{pmatrix}$$

$$\text{où} \quad A(x) = \frac{A_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x - x_n}, \quad A_i \in \mathrm{gl}(r, \mathbb{C})$$

ce sont des systèmes d'équations différentielles linéaires à pôles simples. On étudiera les solutions locales, et la représentation de monodromie du système : un morphisme du groupe fondamental de la droite complexe privée des pôles $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\})$ dans le groupe linéaire $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$. Une fois fixés des générateurs, un tel morphisme est donné par n matrices

$$(M_1, \ldots, M_n).$$

On étudiera le comportement local des solutions au voisinage d'un pôle. On étudiera quelques exemples explicites pour lesquels il est possible de déterminer la monodromie. En général, il n'est pas possible de déterminer la monodromie d'un tel système, par exemple pour $r = 2$ et $n \geq 3$. Le problème de Riemann-Hilbert est la question d'existence et unicité d'un système dont la monodromie est prescrite. Pour aborder ce problème, il faut passer à des objets plus généraux : les fibrés munis de connexion méromorphe. Dans ce contexte plus général, la correspondance de Riemann-Hilbert met en bijection les classes d'isomorphismes de connexions et de représentations linéaires.

Références : *Geometry of Painlevé equations*, Rio de Janeiro: IMPA, 2023. 34º Colóquio Brasileiro de Matemática; v. 6, 113p. Chapitres 1 et 2.
https://coloquio34.impa.br/pdf/34CBM06-eBook.pdf

Introduction à la géométrie semi-riemannienne

Athoumane NIANG

Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal

RÉSUMÉ. Ce cours sur la géométrie semi-riemannienne vise les objectifs suivants. 1- L'étude des forme bilinéaires symétriques non-dégénérées sur un espace vectoriel de dimension finie n, montre qu'à

isomorphisme linéaire près, il n'en existe qu'une seule d'indexe i. L'index étant un entier naturel compris entre zéro et la dimension de l'espace vectoriel en question. Une telle forme bilinéaire symétrique est appelée produit scalaire. 2- Une variété semi-riemannienne c'est variété de dimension finie munie d'un (0,2)-tenseur symétrique qui est un produit scalaire d'indexe constant sur chaque espace tangent à la variété. Lorsque l'index est zéro la variété est riemannienne et lorsqu'il vaut 1, la variété est Lorentzienne. On donnera une majorité de concepts qui sont définis de manière analogue au cas riemannien. Parmi ces concepts un accent particulier est porté sur l'existence de voisinages convexes en tout point d'une variété semi-riemannienne. 3- Le cas riemannien sera étudié pour elle -même. Le fait que qu'une métrique riemannienne induit une distance compatible avec la topologie de la variété est un concept qui n'a un analogue satisfaisant au cas non-riemannien. 4- Une petite comparaison entre la géométrie riemannienne et celle lorentzienne sera abordée. 5- Pour finir , on abordera les sous-variétés semi-riemanniennes d'une variété semi-riemannienne.

Références : 1.Barett,O'neil; Semi-riemannienne geometry , with application to relativity
2- S.Gallot; D.Hilin, J. Lafontaine; Riemannian Geometry
3-M.Spivak; A comprehensive introduction to differential Geometry, vol 1, 3 ed

---

Liste des exposés de 45 minutes

Aspects métriques et spectraux des courbes planes aléatoires

Michele ANCONA

Université Côte d'Azur, Nice, France

Résumé. Une courbe (complexe) plane est le lieu des zéros dans CP2 d'un polynôme homogène en trois variables. Toute courbe plane est munie d'une métrique riemannienne induite par la métrique ambiante de Fubini- Study du plan projectif complexe. Nous donnons des bornes inférieures probabilistes sur certaines quantités métriques et spectrales (telles que la systole ou le trou spectral) des courbes planes lorsque celles-ci sont choisies aléatoirement. Il s'agit d'un travail commun avec Damien Gayet.

On four dimensional Walker manifolds

Abdoul Salam DIALLO

Université Alioune Diop, Bambey, Sénégal

Résumé. A pseudo-Riemannian metric g on a four dimensional manifold M is said to be a Walker metric if there exists a two dimensional null distribution on M which is parallel with respect to the Levi-Civita connection of g. In this talk, we will present some recent development on four dimensional Walker manifolds.

Paire de feuilletages

Adjaratou Arame DIAW

Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal

RÉSUMÉ. On s'intéresse à la classification des paires de feuilletages holomorphes au voisinage d'un point singulier. Cette classification se fera suivant deux méthodes : la méthode des chemins de John Mazer et la méthode Mattei-Moussu. Ce résultat une généralisation du théorème Mattei- Moussu.

Courbure bisectionnelle holomorphe et hypersurfaces projectives

Damien GAYET

Université Grenoble Alpes, Grenoble, France

RÉSUMÉ. Les hypersurfaces complexes lisses de degré d donné dans l'espace projectif complexe sont topologiquement toutes les mêmes. Si on les munit de la restriction de la métrique ambiante et si l'hypersurface est choisie au hasard (à d fixé), on peut considérer qu'on a affaire à une variété différentielle fixée munie d'une métrique aléatoire. J'expliquerai que la moyenne de la proportion (en volume) de l'hypersurface où cette métrique possède une courbure bisectionnelle holomorphe négative tend vers un quand d tend vers l'infini. En particulier, nous obtenons ainsi un résultat déterministe nouveau : il existe une suite d'hypersurfaces dont le degré tend vers l'infini pour laquelle cette proportion tend vers un. C'est un résultat obtenu en collaboration avec Michele Ancona.

Affine deformations of pair of foliations via open book decomposition

Cheikh KHOULE

Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal

RÉSUMÉ. Given a contact pair (β_1, β_2) on a even-dimensional smooth manifold M, there is a uniquely determined pair of commuting vector fields (E_1, E_2) : $\beta_i(E_j) = \delta_i^j$, $i_{E_j} d\beta_i = 0$, $i, j = 1, 2$. (E_1, E_2) gives rise to a rank 2 Poisson tensor: $\pi = E_1 \wedge E_2$. Let α_1 and α_2 be two linearly independent integrable 1-forms on M. Consider Affine deformation of (α_1, α_2) defined by a pair (γ_t^1, γ_t^2) of 1-forms:

$$\gamma_t^1 = C_1(t)\alpha_1 + C_2(t)\alpha_2 \quad \text{and} \quad \gamma_t^2 = C_1(t)\alpha_2 + C_2(t)\beta_2, \quad \text{for } t \geq 0, \tag{1}$$

where C_1, C_2 are continuous functions on $[0, \infty)$ that are smooth on $[0, \infty)$ with $C_1(0) = 1$, $C_2(0) = 0$, and C_2 is positive on $(0, \infty)$. In this talk, firstly, we present a detailed proof of:

Theorem. *Let M be closed orientable $2m + 2n + 2$-dimensional manifold endowed with a contact pair (β_1, β_2) of type (m, n) and two linearly independent integrable 1-forms α_1 and α_2, such that:*

$$\beta_1 \wedge d\alpha_1 \wedge (d\beta_1)^{m-1} = \beta_2 \wedge d\alpha_2 \wedge (d\beta_2)^{n-1} = 0.$$

Then all corresponding affine deformations (γ_t^1, γ_t^2) (defined as in (1)) are contact pairs of type (m, n), for $t > 0$ if and only if the pair (E_1, E_2) of Reeb vector fields associated with (β_1, β_2) satisfies the compatibility conditions:

$$\langle \alpha_1 \wedge \alpha_2, \pi \rangle = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{2} \alpha_i (E_i) = 0.$$

Secondly we gives example of a contact pair in $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^3$ that admits an affine deformation in the sens of the above Theorem, by using open book decompositions. This is a joint work with Ameth Ndiaye and Aissa Wade.

Behavior of geodesic rays on infinite-type surfaces

Cheikh LO

Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal

RÉSUMÉ. The purpose of this of talk is to study the behavior of geodesic rays on hyperbolic surfaces on infinite-type. More precisely we show that under certain geometric conditions the quasi-minimizing geodesic rays are of three types. We conclude our presentation by establishing between those geodesic rays and the nature of limit points of the Fuchsian groups defining the surfaces.

Deformations of pairs of codimension one foliations

Ameth NDIAYE

Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal

RÉSUMÉ. The notion of a linear deformation of a codimension one foliation into contact structures was introduced by Dathe-Rukimbira. This concept is a special type of deformation of confoliations. In this talk, we discuss linear deformations of pairs of codimension one foliations into contact pairs. Applications of our main result are also provided.

L^p-Theory for the $\partial\bar{\partial}$-equation and isomorphism results

Salomon SAMBOU

Université Assane Seck, Ziguinchor, Sénégal

RÉSUMÉ. We establish an L^p loc-existence theorem for the $\partial\bar{\partial}$-problem on a half space of $\mathbb{C}^n$. The result is achieved for L^p loc-forms and for forms with coefficients in L^p loc-Sobolev spaces and

having distributional boundary values. Our proof of the first case is based on pushing out a bumping technique, however, the proof of the second case is twofold, where we solve respectively the equations $du = f$ and $\partial u = f$ with L^p loc-Sobolev regularity, and hence the $\partial\bar{\partial}$-solution becomes a consequence of the resulting d and ∂-solutions. The main ingredient is to construct suitable L^p loc-regularizing operators for d and ∂-complexes. Isomorphisms results in relation with de Rham cohomology groups and the $\partial\bar{\partial}$-cohomology groups are also proved. Joint work with Shaban Khidr.

Quasi-Einstein and twisted product manifolds

Mansour SANE

Université Assane Seck, Ziguinchor, Sénégal

RÉSUMÉ. We study quasi-Einstein manifolds on twisted product structures. We examine the effect of the condition of quasi-Einstein on a twisted product to its factor manifolds. Also, we obtain some conditions for a twisted product satisfying the quasi-Einstein condition to be a warped or a direct product.

On Banyaga's conjecture for the group of area preserving homeomorphisms

Stéphane TCHUIAGA

Université de Buéa, Buéa, Cameroun

Résumé. This talk addresses Banyaga's conjecture that : "the group of strong symplectic homeomorphisms is a proper normal subgroup of the symplectic homeomorphism group of a closed symplectic manifold" holds true in dimension 2.

Liste des exposés de 25 minutes

On L_3-Affine Surfaces

Ibrahima Moulaye BADJI

Université Alioune Diop, Bambey, Sénégal

RÉSUMÉ. A Riemannian manifold (M, g) is said to be a L_3-space if its Ricci tensor is cyclic parallel. This definition extends easily to the affine case. Here we investigate the torsion-free affine manifolds (M, ∇) to be L_3-spaces. We classify locally homogeneous L_3-spaces on two dimensional affine manifolds.

Les classes de conjugaison des stabilisateurs des cartes unicellulaires à un sommet

Sokhna Faatim Laye DIOP

Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal

RÉSUMÉ. Un graphe unicellulaire d'une surface Σ_g est la classe d'isotopie d'un graphe de Σ_g telle que son complémentaire est un disque. Dans cet exposé, on s'intéresse à des sous-groupes du groupe modulaire représentant l'ensemble des stabilisateurs des composantes connexes d'un graphe défini sur les graphes unicellulaires. Plus précisément, nous discuterons du nombre de classes de conjugaison des stabilisateurs dans le cas des cartes unicellulaires à un sommet.

Structures de contact paires et structures d'Engel

Sérigne Abdou Aziz DRAME

Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal

RÉSUMÉ. Cet exposé est une introduction aux structures d'Engel. Une structure d'Engel est une distribution D de rang 2 sur une variété M de dimension 4 qui vérifie :

$$\text{rang}\left(\mathcal{D}^2 = \mathcal{D} + [\mathcal{D}, \mathcal{D}]\right) = 2 \quad \text{et} \quad \text{rang}\left(\mathcal{D}^3 = \mathcal{D} + [\mathcal{D}^2, \mathcal{D}]\right) = 3.$$

Pour toute structure d'Engel, on peut associer deux distributions : le feuilletage caractéristique de la distribution d'Engel $\mathcal{L}$ et la structure de contact paire associée $\mathcal{E}$ donnant ainsi la suite d'inclusion suivante

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{E} \subset TM.$$

On va d'abord parler de la géométrie des structures de contact paires qui sont fondamentales pour la compréhension des structures d'Engel, essayer d'aboutir aux structures d'Engel et les condition d'intégrabilité de la distribution de Reeb associée à la distribution d'Engel puis terminer avec les structures d'Engel généralisées.

Structures pseudo-kählériennes et para-kählériennes sur les algèbres de Lie non-dérogatoires

Ameth MBAYE

Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal

RÉSUMÉ. Une algèbre de Lie est dite non-dérogatoire si elle est de la forme $\mathbb{R}[\phi] \times \mathbb{R}^n$ où ϕ est un endomorpshime de $\mathbb{R}^n$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique et $\mathbb{R}[\phi]$ l'anneau des polynômes en ϕ. Dans cet exposé nous étudions les structures pseudo–kählériennes et para-kählériennes suivant les valeurs propres de l'endomorphisme ϕ.

Metrics induced by $\mathbb{R}^{6+k}$ on the graph of k-smooth functions and the Hopf Conjecture

Thierno SECK

Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal

RÉSUMÉ. In this work, we first give a formula for the sectional curvature of a metric induced by $\mathbb{R}^{6+k}$ on the graph of k-smooth functions on $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$. Secondly, we give a new proof of a theorem on metrics induced by R^7 on the graph of 1-smooth function. Finally, we show that a metric induced by $\mathbb{R}^8$ on the graph of two smooth functions which are the sum of lifts on $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ does not have a positive sectional curvature.

On the closure of irregular orbits of the horocyclic flow of infinite finess

Amadou SY

Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal

RÉSUMÉ. The topological dynamics of the horocycle flow h on the unit tangent bundle of a geometrically finite hyperbolic surface S is well known. In particular on such surfaces the flow h is minimal or the minimal sets are the periodic orbits. When the surface S is geometrically infinite, the situation is more complex; the possible presence of orbits which are neither dense nor closed, called irregular horocyclic orbits, makes the description of minimal sets complicated. In this text, through examples we study the meeting times between those irregular orbits and their cor- responding geodesic rays in order to describe the h-minimal sets. Joint work with Masseye Gaye and Cheikh Lo.

References:
1. A.F. Beardon, The Geometry of Discrete Groups (Springer, New York, 1983)
2. A. Bellis, Étude topologique du flot horocyclique: le cas des surfaces géométriquement infinies. Thèse/Université de Rennes1, 2018
3. A. Bellis, On the links between horocyclic and geodesic orbits on geometrically infinite sur- feces. J. Ecole Polytech. Math. 5,443–454 (2018)
4. F. Dal'Bo, Trajectoires géodésiques et horocycliques. Savoirs Actuels (EDPS-CNRS, Les Ulis,2007)
5. F. Dal'Bo, A.N. Starkov, On a classification of limit points of infinitely generated Schottky groups. J. Dyn. Control Syst. 6(4), 561–578 (2000)
6. M. Gaye, C. Lo, Sur l'inexistance d'ensembles minimaux pour le flot horocyclique. Conflu- entes Math. 9(1), 95–104 (2017)
7. E. Ghys, Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes. Sémin. Bourbaki 34, 93–136 (1991–1992)
8. G.A. Hedlund, Fuchsian groups and transitive horocycles. Duke Math. J. 2(3), 530–542 (1936)
