Prescrire la courbure scalaire par intégration convexe mixte

Ludovic Rifford

Université Côte d'Azur & AIMS-Sénégal

Mini-Workshop de Géométrie
AIMS-Sénégal, Mbour, 2 mai 2025

Organisation de l'exposé

I. Motivation et objectif

II. Perturbation de la métrique plate sur le tore

III. Démonstration du résultat général

IV. Perspectives

Partie I

I. Motivation et objectif

Motivation première

Théorème (Lohkamp, 1994)

Soit (M, g) une variété riemannienne lisse de dimension $n \geq 3$ et g_0 une métrique riemannienne lisse g_ϵ sur M. Alors pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$, il existe une métrique riemannienne lisse sur M telle que

$$r(g_\epsilon) < \alpha \quad \text{et} \quad \|g_\epsilon - g_0\|_{C^0_g} < \epsilon,$$

où $r_(g_\epsilon)$ désigne la courbure de Ricci de g_ϵ.

Motivation première

Théorème (Lohkamp, 1994)

Soit (M, g) une variété riemannienne lisse de dimension $n \geq 3$ et g_0 une métrique riemannienne lisse g_ϵ sur M. Alors pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$, il existe une métrique riemannienne lisse sur M telle que

$$r(g_\epsilon) < \alpha \quad et \quad \|g_\epsilon - g_0\|_{C^0_g} < \epsilon,$$

où $r_(g_\epsilon)$ désigne la courbure de Ricci de g_ϵ.

Remarque

À cause de la formule de Gauss-Bonnet ce résultat n'est pas valide en dimension 2.

Un résultat sur la courbure scalaire

Théorème (Lohkamp, 1999)

Soit (M, g) une variété riemannienne lisse de dimension $n \geq 3$ et g_0 une métrique riemannienne lisse sur M. Alors pour toute fonction $k : M \to]0, +\infty[$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une métrique riemannienne lisse g_ϵ sur M telle que

$$Scal^{g_0} - k - \epsilon < Scal^{g_\epsilon} < Scal^{g_0} - k$$

et

$$\|g_\epsilon - g_0\|_{C^0_g} < \epsilon.$$

Les démonstrations par Lohkamp des deux résultats énoncés reposent sur des techniques de recouvrement de la variété par différentes métriques obtenues par déformations conformes.

Relations différentielles partielles

Soit $\pi : E \to M$ un fibré sur une variété lisse M.

Relations différentielles partielles

Soit $\pi : E \to M$ un fibré sur une variété lisse M. Une section (lisse) $s : M \to E$ est une application de classe C^∞ telle que $\pi(s(x)) = x$ pour tous $x \in M$.

Relations différentielles partielles

Soit $\pi : E \to M$ un fibré sur une variété lisse M. Une section (lisse) $s : M \to E$ est une application de classe C^∞ telle que $\pi(s(x)) = x$ pour tous $x \in M$. L'espace des jets d'ordre $k \geq 1$ de sections du fibré, noté $J^k(E)$, est le fibré au dessus de M dont la fibre au dessus d'un point $x \in M$ représente l'ensemble des développement de Taylor à l'ordre k à équivalence près.

Relations différentielles partielles

Soit $\pi : E \to M$ un fibré sur une variété lisse M. Une section (lisse) $s : M \to E$ est une application de classe C^∞ telle que $\pi(s(x)) = x$ pour tous $x \in M$. L'espace des jets d'ordre $k \geq 1$ de sections du fibré, noté $J^k(E)$, est le fibré au dessus de M dont la fibre au dessus d'un point $x \in M$ représente l'ensemble des développement de Taylor à l'ordre k à équivalence près. Si s est une section donnée, l'application $J^k_s : M \to J^k(E)$ envoie chaque point $x \in M$ sur le jet de s à l'ordre k en x.

Relations différentielles partielles

Soit $\pi : E \to M$ un fibré sur une variété lisse M. Une section (lisse) $s : M \to E$ est une application de classe C^∞ telle que $\pi(s(x)) = x$ pour tous $x \in M$. L'espace des jets d'ordre $k \geq 1$ de sections du fibré, noté $J^k(E)$, est le fibré au dessus de M dont la fibre au dessus d'un point $x \in M$ représente l'ensemble des développement de Taylor à l'ordre k à équivalence près. Si s est une section donnée, l'application $J^k_s : M \to J^k(E)$ envoie chaque point $x \in M$ sur le jet de s à l'ordre k en x.

Définition

Une **relation différentielle partielle** *à l'ordre $k \geq 1$ pour le fibré $\pi : E \to M$ correspond à la donnée d'un ensemble $\mathcal{R} \subset J^k(E)$. On dit qu'une section $s : M \to E$ est une* **solution de** $\mathcal{R}$ *si elle vérifie*

$$J^k_s(x) \in \mathcal{R} \qquad \forall x \in M.$$

Exemples

Exemple 1 : Soit $\pi : E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ le fibré trivial. Une section de ce fibré est une application lisse de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. L'espace des jets d'ordre 1 de sections de ce fibré est donné par

$$J^1(E) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Si s est une section de E (on la voit comme une fonction $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$) alors J^1_s est défini par

$$J^1_s(x) = (x, s(x), d_x s) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Le jet d'ordre 2 de la section s est lui donné par

$$J^2_s : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto J^1_s(x) = \left(x, s(x), d_x s, d^2_x s\right) \in J^2(E).$$

Exemples

Exemple 2 : Soit $\pi : E = M \times N \to M$ le fibré trivial avec M et N deux variétés lisses. Le jet d'ordre 1 d'une section s, vue comme une application de M dans N, est défini par

$$J^1_s : x \in M \longmapsto J^1_s(x) = (x, s(x), d_x s) \in J^2(E),$$

où chaque $d_x s$ est une application linéaire de $T_x M$ dans $T_{s(x)} N$.

Exemples

Exemple 2 : Soit $\pi : E = M \times N \to M$ le fibré trivial avec M et N deux variétés lisses. Le jet d'ordre 1 d'une section s, vue comme une application de M dans N, est défini par

$$J^1_s : x \in M \longmapsto J^1_s(x) = (x, s(x), d_x s) \in J^2(E),$$

où chaque $d_x s$ est une application linéaire de $T_x M$ dans $T_{s(x)} N$. On peut considérer la relation différentielle partielle $\mathcal{R} \subset J^1(E)$ dont les éléments sont les (x, y, L) (avec $L \in \mathcal{L}(T_x M, T_y N)$) tels que L est injective. Ainsi, une section s est solution $\mathcal{R}$ si et seulement si $s : M \to N$ est une immersion.

Exemples

Exemple 2 : Soit $\pi : E = M \times N \to M$ le fibré trivial avec M et N deux variétés lisses. Le jet d'ordre 1 d'une section s, vue comme une application de M dans N, est défini par

$$J^1_s : x \in M \longmapsto J^1_s(x) = (x, s(x), d_x s) \in J^2(E),$$

où chaque $d_x s$ est une application linéaire de $T_x M$ dans $T_{s(x)} N$. On peut considérer la relation différentielle partielle $\mathcal{R} \subset J^1(E)$ dont les éléments sont les (x, y, L) (avec $L \in \mathcal{L}(T_x M, T_y N)$) tels que L est injective. Ainsi, une section s est solution $\mathcal{R}$ si et seulement si $s : M \to N$ est une immersion.

Exemple 3 : Soit $\pi : E \to M$ le fibré vectoriel des formes bilinéaires symétriques au dessus d'une variété M. Une métrique riemannienne vérifie une certaine condition de courbure si son jet d'ordre 2 est à valeurs dans un certain ensemble $\mathcal{R} \subset J^2(E)$.

Objectif

Différentes techniques (intégration convexe, approximation holonome, ...) permettent de résoudre certaines classes de relations différentielles partielles, c'est à dire de montrer qu'une section quelconque peut être approchée pour une certaine topologie par une section solution de la relation. En revanche, les relations différentielles partielles considérés par Lohkamp (propriétés de la courbure de Ricci ou scalaire) ne rentres dans aucune de ces classes.

Objectif

Différentes techniques (intégration convexe, approximation holonome, ...) permettent de résoudre certaines classes de relations différentielles partielles, c'est à dire de montrer qu'une section quelconque peut être approchée pour une certaine topologie par une section solution de la relation. En revanche, les relations différentielles partielles considérés par Lohkamp (propriétés de la courbure de Ricci ou scalaire) ne rentres dans aucune de ces classes.

L'objectif de ce travail, réalisé en collaboration avec Fatine Aliouane (Jijel, Algérie) et Mélanie Theillière (Rennes, France) est de montrer que la relation courbure scalaire considée par Lohkamp appartient à une catégorie de relations qu'on peut résoudre par une technique d'intégration convexe mixte.

Partie II

II. Perturbation de la métrique plate sur le tore

Énoncé du résultat

L'objectif est ici de démontrer le résultat suivant :

Proposition

Soit $n \geq 3$. Pour toute fonction $k : \mathbb{T}^n \to]0, +\infty[$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une métrique riemannienne lisse g_ϵ sur $\mathbb{T}^n$ telle que

$$-k - \epsilon < Scal^{g_\epsilon} < -k$$

et

$$\|g_\epsilon - g_0\|_{C^0} < \epsilon.$$

Pour simplifier on va travailler avec des métriques $\mathbb{Z}^n$-périodiques dans $\mathbb{R}^n$ avec les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$.

Courbure scalaires des perturbations

On considère une métrique g de la forme

$$g = dx_1^2 + e^{2h_2}\, dx_2^2 + e^{2h_3}\, dx_3^2 + dx_4^2 + \cdots + dx_n^2,$$

où $h_2, h_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont lisses et $\mathbb{Z}^n$-périodiques.

Courbure scalaires des perturbations

On considère une métrique g de la forme

$$g = dx_1^2 + e^{2h_2}\, dx_2^2 + e^{2h_3}\, dx_3^2 + dx_4^2 + \cdots + dx_n^2,$$

où $h_2, h_3 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont lisses et $\mathbb{Z}^n$-périodiques.
La courbure scalaire de g est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{Scal}^g = &-2\Big(\partial_1^2 h_2 + \partial_1^2 h_3 + (\partial_1 h_2)^2 + (\partial_1 h_3)^2 + \partial_1 h_2\, \partial_1 h_3\Big) \\
&- 2e^{-2h_2}\Big(\partial_2^2 h_3 - \partial_2 h_2\, \partial_2 h_3 + (\partial_2 h_3)^2\Big) \\
&- 2e^{-2h_3}\Big(\partial_3^2 h_2 - \partial_3 h_3\, \partial_3 h_2 + (\partial_3 h_2)^2\Big) \\
&- 2\sum_{i=4}^{n}\Big(\partial_i^2 h_2 + \partial_i^2 h_3 + (\partial_i h_2)^2 + (\partial_i h_3)^2 - \partial_i h_2\, \partial_i h_3\Big).
\end{aligned}$$

La relation différentielle partielle concernée

On cherche donc une fonction $F = (h_2, h_3) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{Z}^n$-périodique) vérifiant

$$L \cdot \partial_{11}^2 F(x) + R\left(x, \partial_1 F(x), *\right) + k(x) \in (-\epsilon, \epsilon),$$

où L est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ et

$$R\left(x, \partial_1 F(x), *\right) = \\ -2\Big(\partial_1^2 h_2 + \partial_1^2 h_3 + (\partial_1 h_2)^2 + (\partial_1 h_3)^2 + \partial_1 h_2\, \partial_1 h_3\Big) \\ + *.$$

La relation différentielle partielle concernée

On cherche donc une fonction $F = (h_2, h_3) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{Z}^n$-périodique) vérifiant

$$L \cdot \partial_{11}^2 F(x) + R\left(x, \partial_1 F(x), *\right) + k(x) \in (-\epsilon, \epsilon),$$

où L est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ et

$$R\left(x, \partial_1 F(x), *\right) = - 2\Big(\partial_1^2 h_2 + \partial_1^2 h_3 + (\partial_1 h_2)^2 + (\partial_1 h_3)^2 + \partial_1 h_2\, \partial_1 h_3\Big) + *.$$

On dira que le 2-jet de F vérifie

$$J_F^2 \in \mathcal{R}_\epsilon \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Résolution de relations qualinéaires

Proposition

Supposons qu'il existe deux familles de boucles lisses $\{\gamma_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ *et* $\{\delta_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$ *($\mathbb{Z}^n$-périodiques) vérifiant les propriétés suivantes :*

(L1) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, $\overline{\gamma}_x = \overline{\delta}_x = 0$;

(L2) *Pour tous* $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $t \in \mathbb{R}$, $\cdot\gamma_x(t) = 0$.

(L3) *Pour tous* $x \in \mathbb{R}^n$ *et* $t \in \mathbb{R}$,

$$L \cdot \delta_x(t) + R\left(x, \gamma_x(t), *\right) + k(x) = 0.$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, *la fonction* F *donnée par intégration mixte de* $\{\gamma_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ *et* $\{\delta_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ *vérifie :*

(a) $\|F\|_{C^0} < \epsilon$;

(b) *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$, $J^2_F(x) \in \mathcal{R}_\epsilon$.

Intégration mixte I

On note par $C^\infty_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des applications lisses 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et on définit l'opérateur

$$\mathrm{Int} : C^\infty_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \longrightarrow C^\infty_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$$

par

$$\mathrm{Int}(\gamma)(t) := \int_0^t (\gamma(s) - \overline{\gamma})\ dt \quad \text{avec} \quad \overline{\gamma} = \int_0^1 \gamma(t)\, dt.$$

Intégration mixte I

On note par $C^\infty_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des applications lisses 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ et on définit l'opérateur

$$\mathrm{Int} : C^\infty_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \longrightarrow C^\infty_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$$

par

$$\mathrm{Int}(\gamma)(t) := \int_0^t (\gamma(s) - \overline{\gamma})\, dt \quad \text{avec} \quad \overline{\gamma} = \int_0^1 \gamma(t)\, dt.$$

Étant donné deux familles de boucles lisses $\{\gamma_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ et $\{\delta_x\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ à valeurs dans $C^\infty_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, on définit F par intégration mixte via la formule :

$$F(x) := \frac{1}{N} \mathrm{Int}\left(\gamma_x\right)\left(Nx_1\right) + \frac{1}{N^2} \mathrm{Int}^2\left(\delta_x\right)\left(Nx_1\right).$$

Intégration mixte II

Proposition

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $\|F\|_{C^0} = O(1/N)$.

(ii) *Pour tout* $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, $\|\partial_j F\|_{C^0} = O(1/N)$.

(iii) *Pour tous* $j, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, $\|\partial^2_{jk} F\|_{C^0} = O(1/N)$.

Intégration mixte II

Proposition

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $\|F\|_{C^0} = O(1/N)$.

(ii) *Pour tout* $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, $\|\partial_j F\|_{C^0} = O(1/N)$.

(iii) *Pour tous* $j, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, $\|\partial^2_{jk} F\|_{C^0} = O(1/N)$.

De plus, on a pour tout x

(iv) $\partial_i F(x) = \gamma_x(Nx_i) - \overline{\gamma_x} + O(1/N)$.

(v) $\partial_i^2 F(x) = 2\left(\partial_i \gamma_x(Nx_i) - \overline{(\partial_i \gamma_x)}\right) + N\dot{\gamma}_x(Nx_i) + \delta_x(Nx_i) - \overline{\delta_x} + O(1/N)$.

(vi) *Pour tout* $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, $\partial^2_{ij} F(x) = \partial^2_{ij} f(x) + \partial_j \gamma_x(Nx_i) - \overline{(\partial_j \gamma_x)} + O(1/N)$.

Partie III

III. Démonstration du résultat général

Démonstration du résultat général

Théorème (Lohkamp, 1999)

Soit (M, g) une variété riemannienne lisse de dimension $n \geq 3$ et g_0 une métrique riemannienne lisse sur M. Alors pour toute fonction $k : M \to]0, +\infty[$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une métrique riemannienne lisse g_ϵ sur M telle que

$$Scal^{g_0} - k - \epsilon < Scal^{g_\epsilon} < Scal^{g_0} - k$$

et

$$\|g_\epsilon - g_0\|_{C^0_g} < \epsilon.$$

Partie IV

IV. Perspectives

Perspectives I

A-t-on le résultat suivant ?

Théorème

Soit (M, g) une variété riemannienne lisse de dimension $n \geq 3$ et g_0 une métrique riemannienne lisse sur M. Alors pour toute fonction $k : M \to]0, +\infty[$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une métrique riemannienne lisse g_ϵ sur M telle que

$$Scal^{g_\epsilon} = Scal^{g_0} - k$$

et

$$\|g_\epsilon - g_0\|_{C^0_g} < \epsilon.$$

Perspectives II

Peut-on étendre le résultat démontré (avec éventuellement des hypothèses sur n) au cas lorentzien ou pseudoriemannien ?

Merci pour votre attention !!