

# Prescrire la courbure scalaire par intégration convexe mixte

Ludovic Rifford

Université Côte d'Azur & AIMS-Sénégal

AFRIMath 2026  
Cap Skirring, 13-17 avril 2026

# Un théorème de Lohkamp

L'objectif de cet exposé est de présenter une nouvelle preuve du résultat suivant :

**Théorème (J. Lohkamp, 1999)**

*Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne lisse de dimension  $n \geq 3$ . Alors, pour toute métrique riemannienne  $g_0$  sur  $M$ , toute fonction lisse  $k : M \rightarrow ]0, +\infty[$  et tout  $\epsilon > 0$ , il existe une métrique riemannienne lisse  $g_\epsilon$  sur  $M$  vérifiant*

$$\mathrm{Scal}^{g_0} - k - \epsilon < \mathrm{Scal}^{g_\epsilon} < \mathrm{Scal}^{g_0} - k$$

*et*

$$\|g_\epsilon - g_0\|_{C_g^0} < \epsilon.$$

Il s'agit d'un travail en collaboration avec Fatine Aliouane (Jijel, Algérie) et Mélanie Theillière (Rennes, France).

# Un théorème de Lohkamp

L'objectif de cet exposé est de présenter une nouvelle preuve du résultat suivant :

**Théorème (J. Lohkamp, 1999)**

Soit  $(M, g)$  une *variété riemannienne lisse de dimension  $n \geq 3$* . Alors, pour toute *métrique riemannienne*  $g_0$  sur  $M$ , toute fonction lisse  $k : M \rightarrow ]0, +\infty[$  et tout  $\epsilon > 0$ , il existe une *métrique riemannienne lisse*  $g_\epsilon$  sur  $M$  vérifiant

$$\text{Scal}^{g_0} - k - \epsilon < \text{Scal}^{g_\epsilon} < \text{Scal}^{g_0} - k$$

et

$$\|g_\epsilon - g_0\|_{C_g^0} < \epsilon.$$

Il s'agit d'un travail en collaboration avec Fatine Aliouane (Jijel, Algérie) et Mélanie Theillière (Rennes, France).

# Théorème de plongement isométrique $C^\infty$ de Nash

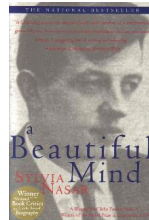
Théorème (J. Nash, 1956)

*Une variété riemannienne compacte lisse de dimension  $n$  se **plonge isométriquement de manière lisse** dans  $\mathbb{R}^N$  avec  $N = n(n+9)/2$ .*



John Forbes Nash Jr. (1928-2015)

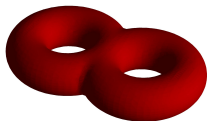
# Un Homme d'exception



Un film de Ron Howard (2001) tiré  
d'une biographie de Sylvia Nasar (1998)

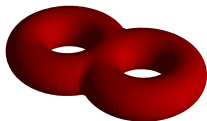
# Variétés compactes plongées dans $\mathbb{R}^N$

Une surface compacte lisse  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$  est donnée par le lieu d'annulation d'une fonction  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  dont le gradient ne s'annule pas sur  $M$ .



# Variétés compactes plongées dans $\mathbb{R}^N$

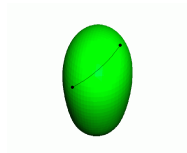
Une surface compacte lisse  $M$  dans  $\mathbb{R}^3$  est donnée par le lieu d'annulation d'une fonction  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  dont le gradient ne s'annule pas sur  $M$ .



De manière générale, l'image  $M \subset \mathbb{R}^N$  d'une variété compacte lisse de dimension  $n$  par un plongement lisse correspond au lieu d'annulation d'une fonction  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-n}$  dont la restriction à  $M$  est une submersion.

# Plongements isométriques dans $\mathbb{R}^N$

Une variété riemannienne est un espace muni d'un objet permettant de mesurer la longueur des courbes dans cet espace.



Le théorème de plongement isométrique  $C^\infty$  de Nash permet de voir une variété riemannienne compacte lisse de dimension  $n$  comme un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^N$  très régulier dans lequel on mesure la longueur des courbes en mesurant leur longueur comme courbe de  $\mathbb{R}^N$ .

$$\text{long}(\gamma) = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt.$$

# Théorème de Lohkamp version plongée

## Théorème (Non démontré)

*Soit  $M$  une sous-variété compacte lisse de  $\mathbb{R}^N$  de dimension  $n \geq 3$ . Alors, pour toute fonction lisse  $k : M \rightarrow ]0, +\infty[$  et tout  $\epsilon > 0$ , il existe un difféomorphisme  $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  tel que*

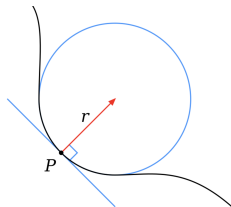
$$\|\Phi - \text{Id}_{\mathbb{R}^N}\|_{C^1} < \epsilon$$

*et*

$$\text{Scal}_x^M - k(x) - \epsilon < \text{Scal}_{\Phi(x)}^{\Phi(M)} < \text{Scal}_x^M - k(x) \quad \forall x \in M.$$

# Courbure d'une courbe dans le plan

Soit  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe de classe  $C^\infty$  paramétrée par la longueur.



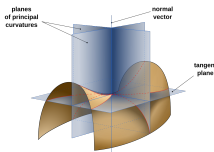
La **courbure** de  $\gamma$  en un point  $P = \gamma(t)$  est donnée par

$$\kappa(P) = \|\ddot{\gamma}(t)\|.$$

Elle correspond également à l'inverse du rayon de courbure.

# Courbure gaussienne d'une surface dans $\mathbb{R}^3$

Soit  $M$  une surface dans  $\mathbb{R}^3$



La **courbure gaussienne** de  $M$  en un point  $P$  est donnée par le produit

$$\kappa(P) = \kappa_1 \cdot \kappa_2,$$

où  $\kappa_1, \kappa_2$  désignent les courbures principales de  $M$  en  $P$  (qui sont les valeurs propres du Shape operator).

# Courbure scalaire en dimension supérieure

Soit  $M$  une sous-variété compacte lisse de dimension  $n \geq 2$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Sa **courbure sectionnelle** en un point  $P$  fixé le long d'un plan

$$H \subset T_P M$$

est donnée par la courbure gaussienne de la surface obtenue en intersectant  $M$  avec un  $(N + 2 - n)$ -plan  $H'$  contenant  $H$  et vérifiant

$$T_P M + H' = \mathbb{R}^N.$$

transverse à  $T_P M$ .

# Courbure scalaire en dimension supérieure

Soit  $M$  une sous-variété compacte lisse de dimension  $n \geq 2$  dans  $\mathbb{R}^N$ . Sa **courbure sectionnelle** en un point  $P$  fixé le long d'un plan

$$H \subset T_P M$$

est donnée par la courbure gaussienne de la surface obtenue en intersectant  $M$  avec un  $(N + 2 - n)$ -plan  $H'$  contenant  $H$  et vérifiant

$$T_P M + H' = \mathbb{R}^N.$$

transverse à  $T_P M$ .

Étant donnée une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_n)$  (pour la métrique euclidienne) de  $T_P M$ , la **courbure scalaire** est donnée par la somme des courbures sectionnelles de  $M$  en  $P$  le long des plans de la forme  $\text{Vect}(e_i, e_j)$  avec  $i \neq j$ .

# Théorème de Lohkamp version plongée

## Théorème

Soit  $M$  une sous-variété compacte lisse de  $\mathbb{R}^N$  de dimension  $n \geq 3$ . Alors, pour toute fonction lisse  $k : M \rightarrow ]0, +\infty[$  et tout  $\epsilon > 0$ , il existe un difféomorphisme  $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  tel que

$$\|\Phi - \text{Id}_{\mathbb{R}^N}\|_{C^1} < \epsilon$$

et

$$\text{Scal}_x^M - k(x) - \epsilon < \text{Scal}_{\Phi(x)}^{\Phi(M)} < \text{Scal}_x^M - k(x) \quad \forall x \in M.$$

# Le résultat est faux en dimension 2 !!

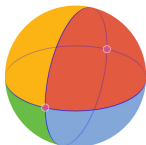
## Théorème (Théorème de Gauss-Bonnet)

Soit  $M$  une surface compacte lisse dans  $\mathbb{R}^N$ , alors

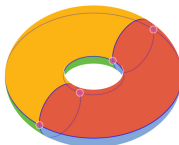
$$\int_M \kappa \, dA = 2\pi\chi(M),$$

où  $\chi(M)$  désigne la caractéristique d'Euler de  $M$ .

Euler Characteristic ( $\chi$ ) = Faces + Corners - Edges



$$\chi = 4 + 2 - 4 = 2$$



$$\chi = 4 + 4 - 8 = 0$$

# Le cas du tore $\mathbb{T}^3$

Trouver une déformation de la métrique plate sur  $\mathbb{T}^3$  vérifiant le résultat souhaité revient à trouver une fonction

$$G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \text{Sym}^+(3)$$

$\mathbb{Z}^3$ -périodique de classe  $C^\infty$  dont la courbure scalaire

$$\begin{aligned} \text{Scal}^G = & \sum_{i, k, j, p=1}^3 (g^{ik} g^{jp} - g^{ip} g^{jk}) \partial_{jk} g_{ip} \\ & + \frac{1}{4} \sum_{i, k, j, l, p, q=1}^3 g^{ik} g^{jl} g^{pq} \left( -4 \partial_j g_{lq} \partial_i g_{kp} + 4 \partial_j g_{lq} \partial_p g_{ik} + 3 \partial_i g_{lq} \partial_k g_{jp} \right. \\ & \left. - \partial_q g_{jl} \partial_p g_{ik} - 2 \partial_q g_{il} \partial_j g_{kp} \right). \end{aligned}$$

vérifie la relation différentielle partielle ( $k > 0$ )

$$-k(x) - \epsilon < \text{Scal}_x^G < -k(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

# Une relation différentielle partielle en dimension 1

Considérons la courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^\infty$  donnée par

$$\gamma(t) = (t, 0, 0) \quad \forall t \in [0, 1].$$

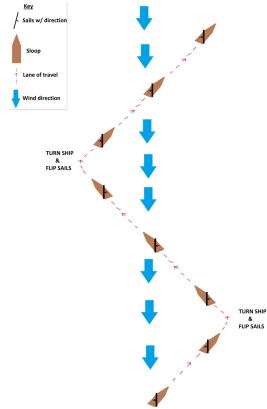
Peut-on trouver, pour tout  $\epsilon > 0$ , une courbe  $\gamma^\epsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^\infty$  telle que

$$\|\gamma^\epsilon(t) - \gamma(t)\| < \epsilon \quad \forall t \in [0, 1]$$

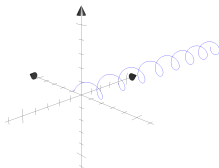
et

$$1 < \dot{\gamma}_2(t)^2 + \dot{\gamma}_3(t)^2 < 4 \quad \forall t \in [0, 1].$$

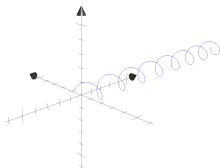
# Aller contre le vent



# Un théorème dû à Filippov



# Un théorème dû à Filippov



## Théorème (Filippov)

Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$  une courbe de classe  $C^1$  telle que

$$\dot{\gamma}(t) \in \text{conv}(F(\gamma(t))) \quad \forall t \in [0, 1],$$

où  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  est une fonction continue à valeurs ouvertes et connexes. Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une courbe  $\gamma^\epsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$  de classe  $C^\infty$  telle que

$$\|\gamma^\epsilon - \gamma\|_\infty < \epsilon \quad \text{et} \quad \dot{\gamma}^\epsilon(t) \in F(\gamma^\epsilon(t)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

# L'Intégration convexe de Gromov

Théorème (J. Nash-N. Kuiper, 1954-55)

*Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un **plongement isométrique de classe  $C^1$**  de la sphère unité  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ( $n \geq 1$ ) à valeurs dans la boule  $B^{n+1}(0, \epsilon)$ .*



E. Bartosz, V. Borrelli, R. Denis, F. Lazarus, D. Rohmer, B. Thibert (2016)

# Perturbation de la métrique plate sur $\mathbb{T}^3$

L'idée de la nouvelle preuve pour traiter ce cas est de considérer une métrique de la forme

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2h_2(x)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2h_3(x)} \end{pmatrix}$$

où  $h_2, h_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$ ,  $\mathbb{Z}^3$ -périodiques, proches de zéro. Dans ce cas la courbure scalaire est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Scal}^G = & -2 \left( \partial_1^2 h_2 + \partial_1^2 h_3 + (\partial_1 h_2)^2 + (\partial_1 h_3)^2 + \partial_1 h_2 \partial_1 h_3 \right) \\ & - 2e^{-2h_2} \left( \partial_2^2 h_3 - \partial_2 h_2 \partial_2 h_3 + (\partial_2 h_3)^2 \right) \\ & - 2e^{-2h_3} \left( \partial_3^2 h_2 - \partial_3 h_3 \partial_3 h_2 + (\partial_3 h_2)^2 \right). \end{aligned}$$

# Perturbation de la métrique plate sur $\mathbb{T}^3$

Afin d'avoir

$$k - \epsilon < \text{Scal}^G < -k$$

avec  $k$  à valeurs  $> 0$ , on considère des fonctions  $h_2, h_3$  de la forme

$$h_2(x) = \frac{1}{N} \int_0^{Nx_1} \gamma_x(t) \, dt + \frac{1}{N^2} \int_0^{Nx_1} \int_0^t \delta_x(s) \, ds \, dt$$

$$h_3(x) = -\frac{1}{N} \int_0^{Nx_1} \gamma_x(t) \, dt.$$

avec

$$\gamma_x(t) = \sqrt{k(x) + \epsilon} \cos(2\pi t)$$

$$\text{et } \delta_x(t) = \frac{k(x) + \epsilon}{2} - (\gamma_x(t))^2.$$

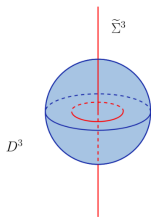
# Idée générale de la preuve

L'utilisation de cette technique d'intégration convexe mixte, dans laquelle on mélange des oscillations permettant d'attraper les dérivées partielles d'ordre 1 et 2, nous permet de résoudre des relations différentielles partielles d'ordre 2 semilinéaires qui vérifient une certaine propriété le long d'une variable donnée sur des tores épais.

# Idée générale de la preuve

L'utilisation de cette technique d'intégration convexe mixte, dans laquelle on mélange des oscillations permettant d'attraper les dérivées partielles d'ordre 1 et 2, nous permet de résoudre des relations différentielles partielles d'ordre 2 semilinéaires qui vérifient une certaine propriété le long d'une variable donnée sur des tores épais.

Un démontage de la variété en union de tores épais de dimensions croissantes permet de conclure la démonstration.



Merci pour votre attention !!

Merci pour l'organisation !!