

Conjecture de Sard de rang minimal en géométrie sous-riemannienne

Ludovic Rifford

Université Côte d'Azur & AIMS-Sénégal

Séminaire de Géométrie
Université Cheikh Anta Diop, Dakar, 24 janvier 2024

Organisation de l'exposé

- I. Rappels sur les chemins horizontaux singuliers
- II. Caractérisation des relèvements anormaux
- III. Conjecture de Sard de rang minimal
- IV. Un résultat partiel

I. Rappels sur les chemins horizontaux singuliers

- M est une variété lisse, connexe, de dimension n .
- Δ est une **distribution totalement nonholonôme** de rang $m \leq n$ sur M (aussi appelé **bracket-generating** de rang m).
- On appelle **chemin horizontal** tout $\gamma \in W^{1,2}([0, 1]; M)$ tel que

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta(\gamma(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, 1].$$

- Par le Théorème de Chow-Rashevsky, M est **horizontalement connexe**, c'est à dire que toute paire de points peut être reliée par un chemin horizontal.

Chemins horizontaux singuliers

Considérons une famille X^1, \dots, X^k de champs de vecteurs lisses sur M telle que

$$\Delta(z) = \text{Vect} \left\{ X^1(z), \dots, X^m(z) \right\} \quad \forall z \in M$$

et, étant donné $x \in M$, définissons the **l'application End-Point**

$$\begin{aligned} E^{x,1} : \mathcal{U} \subset L^2([0, 1]; \mathbb{R}^k) &\longrightarrow M \\ u &\longmapsto \gamma_u(1) \end{aligned}$$

où $\gamma_u : [0, 1] \rightarrow M$ est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^k u_i(t) X^i(\gamma(t)) & \text{p.p. } t \in [0, 1] \\ \gamma(0) = x. \end{cases}$$

Définition

Un chemin horizontal est dit **singulier** si il s'agit, à travers la correspondance $\gamma \leftrightarrow u$, d'un point critique de $E^{x,1}$.

Exemples de chemins horizontaux singuliers

Exemple 1: Cas riemannien

Soit $\Delta(x) = T_x M$, alors tout chemin dans $W^{1,2}$ est horizontal et il n'y a pas de chemin singulier.

Exemples de chemins horizontaux singuliers

Exemple 1: Cas riemannien

Soit $\Delta(x) = T_x M$, alors tout chemin dans $W^{1,2}$ est horizontal et il n'y a pas de chemin singulier.

Exemple 2: Heisenberg, distributions grasses (fat)

Dans \mathbb{R}^3 , Δ donnée par $X^1 = \partial_x, X^2 = \partial_y + x\partial_z$ n'admet pas de chemin horizontal singulier non-trivial. Le même résultat est vérifié pour les distributions de contact ou plus généralement les distributions grasses.

Exemples de chemins horizontaux singuliers

Exemple 1: Cas riemannien

Soit $\Delta(x) = T_x M$, alors tout chemin dans $W^{1,2}$ est horizontal et il n'y a pas de chemin singulier.

Exemple 2: Heisenberg, distributions grasses (fat)

Dans \mathbb{R}^3 , Δ donnée par $X^1 = \partial_x, X^2 = \partial_y + x\partial_z$ n'admet pas de chemin horizontal singulier non-trivial. Le même résultat est vérifié pour les distributions de contact ou plus généralement les distributions grasses.

Exemple 3: Distribution de Martinet

Dans \mathbb{R}^3 , soit $\Delta = \text{Vect}\{X^1, X^2\}$ avec X^1, X^2 donnés par

$$X^1 = \partial_{x_1} \quad \text{et} \quad X^2 = \partial_{x_2} + x_1^2 \partial_{x_3}.$$

Les chemins horizontaux singuliers sont les chemins tangents au champ de droites défini par la trace de Δ sur le plan $\{x_1 = 0\}$.

Caractérisation des chemins horizontaux singuliers

L'**annihilateur** de Δ dans T^*M est défini par

$$\Delta^\perp := \left\{ (x, p) \in T^*M \mid p \perp \Delta(x), p \neq 0 \right\} \subset T^*M$$

et la **distribution hamiltonienne Hamiltonian** de Δ est donnée par

$$\vec{\Delta}(x, p) := \text{Vect} \left\{ \vec{h}^1(x, p), \dots, \vec{h}^m(x, p) \right\} \quad \forall (x, p) \in T^*M,$$

où \vec{h}^i est le champ hamiltonien de $h^i(x, p) = p \cdot X^i(x)$ sur T^*M défini via la forme symplectique canonique ω .

Caractérisation des chemins horizontaux singuliers

L'**annihilateur** de Δ dans T^*M est défini par

$$\Delta^\perp := \left\{ (x, p) \in T^*M \mid p \perp \Delta(x), p \neq 0 \right\} \subset T^*M$$

et la **distribution hamiltonienne Hamiltonian** de Δ est donnée par

$$\vec{\Delta}(x, p) := \text{Vect} \left\{ \vec{h}^1(x, p), \dots, \vec{h}^m(x, p) \right\} \quad \forall (x, p) \in T^*M,$$

où \vec{h}^i est le champ hamiltonien de $h^i(x, p) = p \cdot X^i(x)$ sur T^*M défini via la forme symplectique canonique ω .

Proposition

Un chemin horizontal $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est singulier si et seulement si il est projection d'un chemin $\psi : [0, 1] \rightarrow \Delta^\perp$ horizontal pour $\vec{\Delta}$, ou de manière équivalente, tel que $\dot{\psi}(t) \in \ker(\omega|_{\Delta^\perp})_{\psi(t)}$ pour presque tout $t \in [0, 1]$.

II. Caractérisation des relèvements anormaux

Caractérisation des relèvements anormaux I

À partir de maintenant, M et Δ sont supposées analytique réelles et on pose

$$\omega^\perp = \omega|_{\Delta^\perp}.$$

Caractérisation des relèvements anormaux I

À partir de maintenant, M et Δ sont supposées analytique réelles et on pose

$$\omega^\perp = \omega|_{\Delta^\perp}.$$

Dans ce contexte, un travail en collaboration avec A. Belotto et A. Parusinski a permis de montrer que:

Il existe

- un ensemble ouvert dense $\mathcal{S}_0 \subset \Delta^\perp$ dont le complémentaire est analytique,
- une stratification sous-analytique de Whitney $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_\alpha)$ invariante par dilatation le long des fibres et ayant \mathcal{S}_0 comme strate,
- une distribution sous-analytique $\vec{\mathcal{K}}$ compatible avec \mathcal{S} et invariante par dilatation le long des fibres,

tel que les propriétés suivantes sont vérifiées :

Characterization of abnormal lifts II

(i) On a

$$\vec{\mathcal{K}}(\mathbf{a}) = \ker(\omega_{\mathbf{a}}^{\perp}) \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{S}_0,$$

$\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_0}$ est de **rang constant** k_0 avec $k_0 \equiv m(2)$ et $k_0 \leq m - 2$, et $\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_\alpha}$ est **isotrope** et **intégrable**.

Characterization of abnormal lifts II

(i) On a

$$\vec{\mathcal{K}}(\mathbf{a}) = \ker(\omega_{\mathbf{a}}^{\perp}) \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{S}_0,$$

$\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_0}$ est de **rang constant** k_0 avec $k_0 \equiv m(2)$ et $k_0 \leq m - 2$, et $\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_\alpha}$ est **isotrope** et **intégrable**.

(ii) On a pour chaque strate \mathcal{S}_α ,

$$\vec{\mathcal{K}}(\mathbf{a}) = \ker(\omega_{\mathbf{a}}^{\perp}) \cap T_{\mathbf{a}}\mathcal{S}_\alpha \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{S}_\alpha$$

et $\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_\alpha}$ est **isotrope de rang constant** k_α vérifiant $k_\alpha \leq m - 1$ et $k_\alpha \geq k_0 + 2$.

Characterization of abnormal lifts II

(i) On a

$$\vec{\mathcal{K}}(\mathbf{a}) = \ker(\omega_{\mathbf{a}}^{\perp}) \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{S}_0,$$

$\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_0}$ est de **rang constant** k_0 avec $k_0 \equiv m(2)$ et $k_0 \leq m - 2$, et $\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_\alpha}$ est **isotrope** et **intégrable**.

(ii) On a pour chaque strate \mathcal{S}_α ,

$$\vec{\mathcal{K}}(\mathbf{a}) = \ker(\omega_{\mathbf{a}}^{\perp}) \cap T_{\mathbf{a}}\mathcal{S}_\alpha \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{S}_\alpha$$

et $\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_\alpha}$ est **isotrope de rang constant** k_α vérifiant $k_\alpha \leq m - 1$ et $k_\alpha \geq k_0 + 2$.

(iii) Un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est horizontal singulier si et seulement si il admet un relèvement $\psi : [0, 1] \rightarrow \Delta^{\perp}$ horizontal pour $\vec{\mathcal{K}}$.

Exemple 1: Distributions de rang 2 en dimension 3
 Δ^\perp est de dimension 4 avec des fibres de dimension 1 donc on peut le voir comme un graphe au dessus de M , $k_0 = 0$ et le complémentaire de \mathcal{S}_0 est le relèvement de la surface de Martinet définie par

$$\Sigma_\Delta := \{x \in M \mid [\Delta, \Delta](x) \in \Delta(x)\}.$$

Les chemins horizontaux singuliers sont donnés par les chemins tangents à la trace de Δ sur Σ_Δ .

Exemple 1: Distributions de rang 2 en dimension 3

Δ^\perp est de dimension 4 avec des fibres de dimension 1 donc on peut le voir comme un graphe au dessus de M , $k_0 = 0$ et le complémentaire de \mathcal{S}_0 est le relèvement de la surface de Martinet définie par

$$\Sigma_\Delta := \{x \in M \mid [\Delta, \Delta](x) \in \Delta(x)\}.$$

Les chemins horizontaux singuliers sont donnés par les chemins tangents à la trace de Δ sur Σ_Δ .

Exemple 2: Distributions de co-rang 1

Δ^\perp est de dimension $2n - (n - 1) = n + 1$ avec des fibres de dimension 1, donc il peut être vu comme un graphe au dessus de M et tout se projette sur M .

Exemple 3: Distributions de rang 2 en dimension n
 Δ^\perp est de dimension $2n - 2$, $k_0 = 0$ et pour tout $\alpha \neq 0$ on a $k_\alpha \in \{0, 1\}$.

Exemple 3: Distributions de rang 2 en dimension n

Δ^\perp est de dimension $2n - 2$, $k_0 = 0$ et pour tout $\alpha \neq 0$ on a $k_\alpha \in \{0, 1\}$.

Exemple 4: Distributions de rang 3 en dimension 4

Δ^\perp est de dimension 5 et $k_0 = 1$ donc $\vec{\mathcal{K}}_{|S_0}$ est un champ de droites.

Exemple 3: Distributions de rang 2 en dimension n

Δ^\perp est de dimension $2n - 2$, $k_0 = 0$ et pour tout $\alpha \neq 0$ on a $k_\alpha \in \{0, 1\}$.

Exemple 4: Distributions de rang 3 en dimension 4

Δ^\perp est de dimension 5 et $k_0 = 1$ donc $\vec{\mathcal{K}}_{|S_0}$ est un champ de droites.

Exemple 5: Distributions de rang 4 en dimension 5

Δ^\perp est de dimension 6 et $k_0 = 0$ ou $k_0 = 2$.

III. La Conjecture de Sard de rang minimal

La Conjecture de Sard

Étant donné $x \in M$, on désigne par Sing_Δ^x l'ensemble des points $y \in M$ pour lesquels il existe un chemin horizontal singulier joignant x à y , il s'agit d'un ensemble fermé contenant x .

La Conjecture de Sard

Étant donné $x \in M$, on désigne par Sing_Δ^x l'ensemble des points $y \in M$ pour lesquels il existe un chemin horizontal singulier joignant x à y , il s'agit d'un ensemble fermé contenant x .

Conjecture (Conjecture de Sard)

L'ensemble Sing_Δ^x est de mesure de Lebesgue nulle dans M .

Le résultat est démontré pour très peu de cas :

- Rang 2 en dimension 3 (résultat plus fort par Belotto, Figalli, Parusinski, R).
- Cas où la stratification (\mathcal{S}_α) est constituée d'une seule strate.
- Quelques cas de groupes de Carnot.

Rang d'un chemin horizontal

Le rang d'un chemin horizontal γ est défini par

$$\text{rank}_{\Delta}(\gamma) := \dim(\text{Im}(D_u E^{x,1})),$$

où u est un contrôle tel que $\gamma = \gamma_u$.

Rang d'un chemin horizontal

Le rang d'un chemin horizontal γ est défini par

$$\text{rank}_\Delta(\gamma) := \dim(\text{Im}(D_u E^{x,1})),$$

où u est un contrôle tel que $\gamma = \gamma_u$.

En fait, étant donné un chemin horizontal γ et $p \in T_y^* M_y \setminus \{0\}$ avec $y := \gamma(1)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) $p \in (\text{Im}(D_u E^{x,1}))^\perp$.
- (ii) Il existe $\psi : [0, 1] \rightarrow \Delta^\perp$ horizontal pour $\vec{\Delta}$ tel que $\pi(\psi) = \gamma$ et $\psi(1) = (y, p)$.

Rang d'un chemin horizontal

Le rang d'un chemin horizontal γ est défini par

$$\text{rank}_\Delta(\gamma) := \dim(\text{Im}(D_u E^{x,1})),$$

où u est un contrôle tel que $\gamma = \gamma_u$.

En fait, étant donné un chemin horizontal γ et $p \in T_y^* M_y \setminus \{0\}$ avec $y := \gamma(1)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) $p \in (\text{Im}(D_u E^{x,1}))^\perp$.
- (ii) Il existe $\psi : [0, 1] \rightarrow \Delta^\perp$ horizontal pour $\vec{\Delta}$ tel que $\pi(\psi) = \gamma$ et $\psi(1) = (y, p)$.

On a toujours

$$m \leq \text{rank}_\Delta(\gamma) \leq n.$$

Rang d'un chemin horizontal

Le rang d'un chemin horizontal γ est défini par

$$\text{rank}_\Delta(\gamma) := \dim(\text{Im}(D_u E^{x,1})),$$

où u est un contrôle tel que $\gamma = \gamma_u$.

En fait, étant donné un chemin horizontal γ et $p \in T_y^* M_y \setminus \{0\}$ avec $y := \gamma(1)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i) $p \in (\text{Im}(D_u E^{x,1}))^\perp$.
- (ii) Il existe $\psi : [0, 1] \rightarrow \Delta^\perp$ horizontal pour $\vec{\Delta}$ tel que $\pi(\psi) = \gamma$ et $\psi(1) = (y, p)$.

On a toujours

$$m \leq \text{rank}_\Delta(\gamma) \leq n.$$

Étant donné $x \in M$ et un entier $r \in [m, n - 1]$, on désigne par $\text{Sing}_{\Delta}^{x,r}$ l'ensemble des points $y \in M$ pour lesquels il y a un chemin horizontal singulier de rang r joignant x à y .

Conjecture de Sard de rang minimal

Conjecture (Conjecture de Sard)

Pour tout $x \in M$ et tout entier $r \in [m, n - 1]$, l'ensemble $Sing_{\Delta}^{x,r}$ est de mesure de Lebesgue nulle dans M .

Conjecture de Sard de rang minimal

Conjecture (Conjecture de Sard)

Pour tout $x \in M$ et tout entier $r \in [m, n - 1]$, l'ensemble $Sing_{\Delta}^{x,r}$ est de mesure de Lebesgue nulle dans M .

Conjecture (Conjecture de Sard de rang minimal)

Pour tout $x \in M$, l'ensemble $Sing_{\Delta}^{x,m}$ est de mesure de Lebesgue nulle dans M .

Conjecture de Sard de rang minimal

Conjecture (Conjecture de Sard)

Pour tout $x \in M$ et tout entier $r \in [m, n - 1]$, l'ensemble $Sing_{\Delta}^{x,r}$ est de mesure de Lebesgue nulle dans M .

Conjecture (Conjecture de Sard de rang minimal)

Pour tout $x \in M$, l'ensemble $Sing_{\Delta}^{x,m}$ est de mesure de Lebesgue nulle dans M .

Remarque

Dans le cas de distributions de co-rang 1 les deux conjectures sont équivalentes distributions.

Conjecture de Sard de rang minimal

Conjecture (Conjecture de Sard)

Pour tout $x \in M$ et tout entier $r \in [m, n - 1]$, l'ensemble $Sing_{\Delta}^{x,r}$ est de mesure de Lebesgue nulle dans M .

Conjecture (Conjecture de Sard de rang minimal)

Pour tout $x \in M$, l'ensemble $Sing_{\Delta}^{x,m}$ est de mesure de Lebesgue nulle dans M .

Remarque

Dans le cas de distributions de co-rang 1 les deux conjectures sont équivalentes distributions.

Exemple

La Conjecture de Sard de rang minimal est vérifiée pour les groupes de Carnot.

IV. Un résultat partiel

Conjecture MRS dans le cas splittable

Théorème (Belotto-Parusinski-R, 2022)

*Soient M et Δ analytiques réelles. Si la distribution intégrable $\vec{\mathcal{K}}_{S_0}$ est **splittable**, alors la conjecture MRS est vraie.*

Conjecture MRS dans le cas splittable

Théorème (Belotto-Parusinski-R, 2022)

*Soient M et Δ analytiques réelles. Si la distribution intégrable $\vec{\mathcal{K}}_{S_0}$ est **splittable**, alors la conjecture MRS est vraie.*

Corollaire (Belotto-Parusinski-R, 2022)

Soient M et Δ analytiques réelles. Si Δ est de rang 3 alors la conjecture MRS est vraie.

Conjecture MRS dans le cas splittable

Théorème (Belotto-Parusinski-R, 2022)

*Soient M et Δ analytiques réelles. Si la distribution intégrable $\vec{\mathcal{K}}_{S_0}$ est **splittable**, alors la conjecture MRS est vraie.*

Corollaire (Belotto-Parusinski-R, 2022)

Soient M et Δ analytiques réelles. Si Δ est de rang 3 alors la conjecture MRS est vraie.

Corollary (Belotto-Parusinski-R, 2022)

*Soient M et Δ analytiques réelles. Si Δ est de co-rang 1 ($m = n - 1$) et $\vec{\mathcal{K}}_{S_0}$ est **splittable** alors la Conjecture de Sard est vraie.*

Feuilletages splittables I

Cadre :

- N variété analytique réelle de dimension $n \geq 2$ équipée d'une métrique riemannienne lisse h .
- \mathcal{F} feuilletage analytique régulier de rang constant $d \in [1, n - 1]$.

Feuilletages splittables I

Cadre :

- N variété analytique réelle de dimension $n \geq 2$ équipée d'une métrique riemannienne lisse h .
- \mathcal{F} feuilletage analytique régulier de rang constant $d \in [1, n - 1]$.

Définition

Étant donné $\ell > 0$, on dit que x et y in N sont (\mathcal{F}, ℓ) -**reliés** si il existe un chemin lisse $\varphi : [0, 1] \rightarrow N$ de longueur $\in [0, \ell]$ (pour h) horizontal pour \mathcal{F} joignant x à y .

Feuilletages splittables I

Cadre :

- N variété analytique réelle de dimension $n \geq 2$ équipée d'une métrique riemannienne lisse h .
- \mathcal{F} feuilletage analytique régulier de rang constant $d \in [1, n - 1]$.

Définition

Étant donné $\ell > 0$, on dit que x et y in N sont (\mathcal{F}, ℓ) -reliés si il existe un chemin lisse $\varphi : [0, 1] \rightarrow N$ de longueur $\in [0, \ell]$ (pour h) horizontal pour \mathcal{F} joignant x à y .

Définition

Étant donné $\bar{x} \in N$, on appelle **section transverse locale** en \bar{x} un ensemble $S \subset N$ contenant \bar{x} qui est une sous-variété lisse difféomorphe au disque ouvert de dimension $n - d$ et transverse aux feuilles de \mathcal{F} .

Définition

On dit que le feuilletage \mathcal{F} est **splittable** dans (N, h) si pour tout $\bar{x} \in N$, toute section transverse locale S en \bar{x} et tout $\ell > 0$, la propriété suivante est vérifiée :

Pour tout ensemble Lebesgue mesurable $E \subset S$ tel que $\mathcal{L}^{n-d}(E) > 0$, Il existe un ensemble Lebesgue mesurable $F \subset E$ tel que :

- $\mathcal{L}^{n-d}(F) > 0$,
- pour tous $x \neq y$ dans F , x et y ne sont pas (\mathcal{F}, ℓ) -reliés.

Exemples

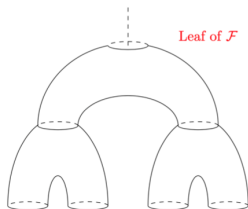
- Tout feuilletage de rang 1 est splittable.

Exemples

- Tout feuilletage de rang 1 est splittable.
- Si \mathcal{F} de rang ≥ 2 est telle que la courbure de Ricci (pour h) de ses feuilles est uniformément bornée par en dessous alors il est splittable.

Exemples

- Tout feuilletage de rang 1 est splittable.
- Si \mathcal{F} de rang ≥ 2 est telle que la courbure de Ricci (pour h) de ses feuilles est uniformément bornée par en dessous alors il est splittable.
- En modifiant une construction d ue   Hirsch, on peut construire une (N, h) et un feuilletage de rang 2 qui n'est pas splittable.



Merci pour votre attention !!