

# Conjecture de Sard de rang minimal en géométrie sous-riemannienne

Ludovic Rifford

Université Côte d'Azur & AIMS-Sénégal

Geometry, Dynamics and Randomness  
CIRM, Marseille, 29 juillet - 2 août 2024

## Organisation de l'exposé

- I. Rappels sur les chemins horizontaux singuliers
- II. Caractérisation des relèvements anormaux
- III. Conjecture de Sard de rang minimal
- IV. Un résultat partiel

## I. Rappels sur les chemins horizontaux singuliers

- $M$  est une variété lisse, connexe, de dimension  $n$ .
- $\Delta$  est une **distribution totalement nonholonôme** de rang  $m \leq n$  sur  $M$  (aussi appelé **bracket-generating** de rang  $m$ ).
- On appelle **chemin horizontal** tout  $\gamma \in W^{1,2}([0, 1]; M)$  tel que

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta(\gamma(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, 1].$$

- Par le Théorème de Chow-Rashevsky,  $M$  est **horizontalement connexe**, c'est à dire que toute paire de points peut être reliée par un chemin horizontal.

# Chemins horizontaux singuliers

Considérons une famille  $X^1, \dots, X^k$  de champs de vecteurs lisses sur  $M$  telle que

$$\Delta(z) = \text{Vect} \left\{ X^1(z), \dots, X^m(z) \right\} \quad \forall z \in M$$

et, étant donné  $x \in M$ , définissons the **l'application End-Point**

$$\begin{aligned} E^{x,1} : \mathcal{U} \subset L^2([0, 1]; \mathbb{R}^k) &\longrightarrow M \\ u &\longmapsto \gamma_u(1) \end{aligned}$$

où  $\gamma_u : [0, 1] \rightarrow M$  est la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^k u_i(t) X^i(\gamma(t)) & \text{p.p. } t \in [0, 1] \\ \gamma(0) = x. \end{cases}$$

## Définition

Un chemin horizontal est dit **singulier** si il s'agit, à travers la correspondance  $\gamma \leftrightarrow u$ , d'un point critique de  $E^{x,1}$ .

# Exemples de chemins horizontaux singuliers

**Exemple 1:** Cas riemannien

Soit  $\Delta(x) = T_x M$ , alors tout chemin dans  $W^{1,2}$  est horizontal et il n'y a pas de chemin singulier.

# Exemples de chemins horizontaux singuliers

## **Exemple 1:** Cas riemannien

Soit  $\Delta(x) = T_x M$ , alors tout chemin dans  $W^{1,2}$  est horizontal et il n'y a pas de chemin singulier.

## **Exemple 2:** Heisenberg, distributions grasses (fat)

Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Delta$  donnée par  $X^1 = \partial_x$ ,  $X^2 = \partial_y + x\partial_z$  n'admet pas de chemin horizontal singulier non-trivial. Le même résultat est vérifié pour les distributions de contact ou plus généralement les distributions grasses.

# Exemples de chemins horizontaux singuliers

## Exemple 1: Cas riemannien

Soit  $\Delta(x) = T_x M$ , alors tout chemin dans  $W^{1,2}$  est horizontal et il n'y a pas de chemin singulier.

## Exemple 2: Heisenberg, distributions grasses (fat)

Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Delta$  donnée par  $X^1 = \partial_x, X^2 = \partial_y + x\partial_z$  n'admet pas de chemin horizontal singulier non-trivial. Le même résultat est vérifié pour les distributions de contact ou plus généralement les distributions grasses.

## Exemple 3: Distribution de Martinet

Dans  $\mathbb{R}^3$ , soit  $\Delta = \text{Vect}\{X^1, X^2\}$  avec  $X^1, X^2$  donnés par

$$X^1 = \partial_{x_1} \quad \text{et} \quad X^2 = \partial_{x_2} + x_1^2 \partial_{x_3}.$$

Les chemins horizontaux singuliers sont les chemins tangents au champ de droites défini par la trace de  $\Delta$  sur le plan  $\{x_1 = 0\}$ .

# Caractérisation des chemins horizontaux singuliers

L'**annihilateur** de  $\Delta$  dans  $T^*M$  est défini par

$$\Delta^\perp := \left\{ (x, p) \in T^*M \mid p \perp \Delta(x), p \neq 0 \right\} \subset T^*M$$

et la **distribution hamiltonienne Hamiltonian** de  $\Delta$  est donnée par

$$\vec{\Delta}(x, p) := \text{Vect} \left\{ \vec{h}^1(x, p), \dots, \vec{h}^m(x, p) \right\} \quad \forall (x, p) \in T^*M,$$

où  $\vec{h}^i$  est le champ hamiltonien de  $h^i(x, p) = p \cdot X^i(x)$  sur  $T^*M$  défini via la forme symplectique canonique  $\omega$ .

# Caractérisation des chemins horizontaux singuliers

L'**annihilateur** de  $\Delta$  dans  $T^*M$  est défini par

$$\Delta^\perp := \left\{ (x, p) \in T^*M \mid p \perp \Delta(x), p \neq 0 \right\} \subset T^*M$$

et la **distribution hamiltonienne Hamiltonian** de  $\Delta$  est donnée par

$$\vec{\Delta}(x, p) := \text{Vect} \left\{ \vec{h}^1(x, p), \dots, \vec{h}^m(x, p) \right\} \quad \forall (x, p) \in T^*M,$$

où  $\vec{h}^i$  est le champ hamiltonien de  $h^i(x, p) = p \cdot X^i(x)$  sur  $T^*M$  défini via la forme symplectique canonique  $\omega$ .

## Proposition

*Un chemin horizontal  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  est singulier si et seulement si il est projection d'un chemin  $\psi : [0, 1] \rightarrow \Delta^\perp$  horizontal pour  $\vec{\Delta}$ , ou de manière équivalente, tel que  $\dot{\psi}(t) \in \ker(\omega|_{\Delta^\perp})_{\psi(t)}$  pour presque tout  $t \in [0, 1]$ .*

## II. Caractérisation des relèvements anormaux

# Caractérisation des relèvements anormaux I

À partir de maintenant,  $M$  et  $\Delta$  sont supposées analytique réelles et on pose

$$\omega^\perp = \omega|_{\Delta^\perp}.$$

# Caractérisation des relèvements anormaux I

À partir de maintenant,  $M$  et  $\Delta$  sont supposées analytique réelles et on pose

$$\omega^\perp = \omega|_{\Delta^\perp}.$$

Dans ce contexte, un travail en collaboration avec A. Belotto et A. Parusinski a permis de montrer que:

Il existe

- un ensemble ouvert dense  $\mathcal{S}_0 \subset \Delta^\perp$  dont le complémentaire est analytique,
- une stratification sous-analytique de Whitney  $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_\alpha)$  invariante par dilatation le long des fibres et ayant  $\mathcal{S}_0$  comme strate,
- une distribution sous-analytique  $\vec{\mathcal{K}}$  compatible avec  $\mathcal{S}$  et invariante par dilatation le long des fibres,

tel que les propriétés suivantes sont vérifiées :

# Characterization of abnormal lifts II

(i) On a

$$\vec{\mathcal{K}}(\mathbf{a}) = \ker(\omega_{\mathbf{a}}^{\perp}) \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{S}_0,$$

$\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_0}$  est de **rang constant**  $k_0$  avec  $k_0 \equiv m(2)$  et  $k_0 \leq m - 2$ , et  $\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_\alpha}$  est **isotrope** et **intégrable**.

# Characterization of abnormal lifts II

(i) On a

$$\vec{\mathcal{K}}(\mathbf{a}) = \ker(\omega_{\mathbf{a}}^{\perp}) \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{S}_0,$$

$\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_0}$  est de **rang constant**  $k_0$  avec  $k_0 \equiv m(2)$  et  $k_0 \leq m - 2$ , et  $\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_\alpha}$  est **isotrope** et **intégrable**.

(ii) On a pour chaque strate  $\mathcal{S}_\alpha$ ,

$$\vec{\mathcal{K}}(\mathbf{a}) = \ker(\omega_{\mathbf{a}}^{\perp}) \cap T_{\mathbf{a}}\mathcal{S}_\alpha \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{S}_\alpha$$

et  $\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_\alpha}$  est **isotrope de rang constant**  $k_\alpha$  vérifiant  $k_\alpha \leq m - 1$  et  $k_\alpha \geq k_0 + 2$ .

# Characterization of abnormal lifts II

(i) On a

$$\vec{\mathcal{K}}(\mathbf{a}) = \ker(\omega_{\mathbf{a}}^{\perp}) \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{S}_0,$$

$\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_0}$  est de **rang constant**  $k_0$  avec  $k_0 \equiv m(2)$  et  $k_0 \leq m - 2$ , et  $\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_\alpha}$  est **isotrope** et **intégrable**.

(ii) On a pour chaque strate  $\mathcal{S}_\alpha$ ,

$$\vec{\mathcal{K}}(\mathbf{a}) = \ker(\omega_{\mathbf{a}}^{\perp}) \cap T_{\mathbf{a}}\mathcal{S}_\alpha \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{S}_\alpha$$

et  $\vec{\mathcal{K}}|_{\mathcal{S}_\alpha}$  est **isotrope de rang constant**  $k_\alpha$  vérifiant  $k_\alpha \leq m - 1$  et  $k_\alpha \geq k_0 + 2$ .

(iii) Un chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  est horizontal singulier si et seulement si il admet un relèvement  $\psi : [0, 1] \rightarrow \Delta^{\perp}$  horizontal pour  $\vec{\mathcal{K}}$ .

**Exemple 1:** Distributions de rang 2 en dimension 3  
 $\Delta^\perp$  est de dimension 4 avec des fibres de dimension 1 donc on peut le voir comme un graphe au dessus de  $M$ ,  $k_0 = 0$  et le complémentaire de  $\mathcal{S}_0$  est le relèvement de la surface de Martinet définie par

$$\Sigma_\Delta := \{x \in M \mid [\Delta, \Delta](x) \in \Delta(x)\}.$$

Les chemins horizontaux singuliers sont donnés par les chemins tangents à la trace de  $\Delta$  sur  $\Sigma_\Delta$ .

**Exemple 1:** Distributions de rang 2 en dimension 3

$\Delta^\perp$  est de dimension 4 avec des fibres de dimension 1 donc on peut le voir comme un graphe au dessus de  $M$ ,  $k_0 = 0$  et le complémentaire de  $\mathcal{S}_0$  est le relèvement de la surface de Martinet définie par

$$\Sigma_\Delta := \{x \in M \mid [\Delta, \Delta](x) \in \Delta(x)\}.$$

Les chemins horizontaux singuliers sont donnés par les chemins tangents à la trace de  $\Delta$  sur  $\Sigma_\Delta$ .

**Exemple 2:** Distributions de co-rang 1

$\Delta^\perp$  est de dimension  $2n - (n - 1) = n + 1$  avec des fibres de dimension 1, donc il peut être vu comme un graphe au dessus de  $M$  et tout se projette sur  $M$ .

**Exemple 3:** Distributions de rang 2 en dimension  $n$   
 $\Delta^\perp$  est de dimension  $2n - 2$ ,  $k_0 = 0$  et pour tout  $\alpha \neq 0$  on a  $k_\alpha \in \{0, 1\}$ .

**Exemple 3:** Distributions de rang 2 en dimension  $n$

$\Delta^\perp$  est de dimension  $2n - 2$ ,  $k_0 = 0$  et pour tout  $\alpha \neq 0$  on a  $k_\alpha \in \{0, 1\}$ .

**Exemple 4:** Distributions de rang 3 en dimension 4

$\Delta^\perp$  est de dimension 5 et  $k_0 = 1$  donc  $\vec{\mathcal{K}}_{|S_0}$  est un champ de droites.

**Exemple 3:** Distributions de rang 2 en dimension  $n$

$\Delta^\perp$  est de dimension  $2n - 2$ ,  $k_0 = 0$  et pour tout  $\alpha \neq 0$  on a  $k_\alpha \in \{0, 1\}$ .

**Exemple 4:** Distributions de rang 3 en dimension 4

$\Delta^\perp$  est de dimension 5 et  $k_0 = 1$  donc  $\vec{\mathcal{K}}_{|S_0}$  est un champ de droites.

**Exemple 5:** Distributions de rang 4 en dimension 5

$\Delta^\perp$  est de dimension 6 et  $k_0 = 0$  ou  $k_0 = 2$ .

## III. La Conjecture de Sard de rang minimal

# La Conjecture de Sard

Étant donné  $x \in M$ , on désigne par  $\text{Sing}_\Delta^x$  l'ensemble des points  $y \in M$  pour lesquels il existe un chemin horizontal singulier joignant  $x$  à  $y$ , il s'agit d'un ensemble fermé contenant  $x$ .

# La Conjecture de Sard

Étant donné  $x \in M$ , on désigne par  $\text{Sing}_\Delta^x$  l'ensemble des points  $y \in M$  pour lesquels il existe un chemin horizontal singulier joignant  $x$  à  $y$ , il s'agit d'un ensemble fermé contenant  $x$ .

## Conjecture (Conjecture de Sard)

*L'ensemble  $\text{Sing}_\Delta^x$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $M$ .*

Le résultat est démontré pour très peu de cas :

- Rang 2 en dimension 3 (résultat plus fort par Belotto, Figalli, Parusinski, R).
- Cas où la stratification  $(\mathcal{S}_\alpha)$  est constituée d'une seule strate.
- Quelques cas de groupes de Carnot.

# Rang d'un chemin horizontal

Le rang d'un chemin horizontal  $\gamma$  est défini par

$$\text{rank}_\Delta(\gamma) := \dim(\text{Im}(D_u E^{x,1})),$$

où  $u$  est un contrôle tel que  $\gamma = \gamma_u$ .

# Rang d'un chemin horizontal

Le rang d'un chemin horizontal  $\gamma$  est défini par

$$\text{rank}_{\Delta}(\gamma) := \dim(\text{Im}(D_u E^{x,1})),$$

où  $u$  est un contrôle tel que  $\gamma = \gamma_u$ .

En fait, étant donné un chemin horizontal  $\gamma$  et  $p \in T_y^* M_y \setminus \{0\}$  avec  $y := \gamma(1)$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i)  $p \in (\text{Im}(D_u E^{x,1}))^\perp$ .
- (ii) Il existe  $\psi : [0, 1] \rightarrow \Delta^\perp$  horizontal pour  $\vec{\Delta}$  tel que  $\pi(\psi) = \gamma$  et  $\psi(1) = (y, p)$ .

# Rang d'un chemin horizontal

Le rang d'un chemin horizontal  $\gamma$  est défini par

$$\text{rank}_\Delta(\gamma) := \dim(\text{Im}(D_u E^{x,1})),$$

où  $u$  est un contrôle tel que  $\gamma = \gamma_u$ .

En fait, étant donné un chemin horizontal  $\gamma$  et  $p \in T_y^* M_y \setminus \{0\}$  avec  $y := \gamma(1)$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i)  $p \in (\text{Im}(D_u E^{x,1}))^\perp$ .
- (ii) Il existe  $\psi : [0, 1] \rightarrow \Delta^\perp$  horizontal pour  $\vec{\Delta}$  tel que  $\pi(\psi) = \gamma$  et  $\psi(1) = (y, p)$ .

On a toujours

$$m \leq \text{rank}_\Delta(\gamma) \leq n.$$

# Rang d'un chemin horizontal

Le rang d'un chemin horizontal  $\gamma$  est défini par

$$\text{rank}_\Delta(\gamma) := \dim(\text{Im}(D_u E^{x,1})),$$

où  $u$  est un contrôle tel que  $\gamma = \gamma_u$ .

En fait, étant donné un chemin horizontal  $\gamma$  et  $p \in T_y^* M_y \setminus \{0\}$  avec  $y := \gamma(1)$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- (i)  $p \in (\text{Im}(D_u E^{x,1}))^\perp$ .
- (ii) Il existe  $\psi : [0, 1] \rightarrow \Delta^\perp$  horizontal pour  $\vec{\Delta}$  tel que  $\pi(\psi) = \gamma$  et  $\psi(1) = (y, p)$ .

On a toujours

$$m \leq \text{rank}_\Delta(\gamma) \leq n.$$

Étant donné  $x \in M$  et un entier  $r \in [m, n - 1]$ , on désigne par  $\text{Sing}_{\Delta}^{x,r}$  l'ensemble des points  $y \in M$  pour lesquels il y a un chemin horizontal singulier de rang  $r$  joignant  $x$  à  $y$ .

# Conjecture de Sard de rang minimal

## Conjecture (Conjecture de Sard)

*Pour tout  $x \in M$  et tout entier  $r \in [m, n - 1]$ , l'ensemble  $Sing_{\Delta}^{x,r}$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $M$ .*

# Conjecture de Sard de rang minimal

## Conjecture (Conjecture de Sard)

*Pour tout  $x \in M$  et tout entier  $r \in [m, n - 1]$ , l'ensemble  $Sing_{\Delta}^{x,r}$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $M$ .*

## Conjecture (Conjecture de Sard de rang minimal)

*Pour tout  $x \in M$ , l'ensemble  $Sing_{\Delta}^{x,m}$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $M$ .*

# Conjecture de Sard de rang minimal

## Conjecture (Conjecture de Sard)

*Pour tout  $x \in M$  et tout entier  $r \in [m, n - 1]$ , l'ensemble  $Sing_{\Delta}^{x,r}$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $M$ .*

## Conjecture (Conjecture de Sard de rang minimal)

*Pour tout  $x \in M$ , l'ensemble  $Sing_{\Delta}^{x,m}$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $M$ .*

## Remarque

*Dans le cas de distributions de co-rang 1 les deux conjectures sont équivalentes.*

# Conjecture de Sard de rang minimal

## Conjecture (Conjecture de Sard)

*Pour tout  $x \in M$  et tout entier  $r \in [m, n - 1]$ , l'ensemble  $Sing_{\Delta}^{x,r}$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $M$ .*

## Conjecture (Conjecture de Sard de rang minimal)

*Pour tout  $x \in M$ , l'ensemble  $Sing_{\Delta}^{x,m}$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $M$ .*

## Remarque

*Dans le cas de distributions de co-rang 1 les deux conjectures sont équivalentes.*

## Exemple

*La Conjecture de Sard de rang minimal est vérifiée pour les groupes de Carnot.*

## IV. Un résultat partiel

# Conjecture MRS dans le cas splittable

Théorème (Belotto-Parusinski-R, 2022)

*Soient  $M$  et  $\Delta$  analytiques réelles. Si la distribution intégrable  $\vec{\mathcal{K}}_{S_0}$  est **splittable**, alors la conjecture MRS est vraie.*

# Conjecture MRS dans le cas splittable

Théorème (Belotto-Parusinski-R, 2022)

*Soient  $M$  et  $\Delta$  analytiques réelles. Si la distribution intégrable  $\vec{\mathcal{K}}_{S_0}$  est **splittable**, alors la conjecture MRS est vraie.*

Corollaire (Belotto-Parusinski-R, 2022)

*Soient  $M$  et  $\Delta$  analytiques réelles. Si  $\Delta$  est de rang 3 alors la conjecture MRS est vraie.*

# Conjecture MRS dans le cas splittable

Théorème (Belotto-Parusinski-R, 2022)

Soient  $M$  et  $\Delta$  analytiques réelles. Si la distribution intégrable  $\vec{\mathcal{K}}_{S_0}$  est **splittable**, alors la conjecture MRS est vraie.

Corollaire (Belotto-Parusinski-R, 2022)

Soient  $M$  et  $\Delta$  analytiques réelles. Si  $\Delta$  est de rang 3 alors la conjecture MRS est vraie.

Corollary (Belotto-Parusinski-R, 2022)

Soient  $M$  et  $\Delta$  analytiques réelles. Si  $\Delta$  est de co-rang 1 ( $m = n - 1$ ) et  $\vec{\mathcal{K}}_{S_0}$  est **splittable** alors la Conjecture de Sard est vraie.

# Feuilletages splittables I

Cadre :

- $N$  variété analytique réelle de dimension  $n \geq 2$  équipée d'une métrique riemannienne lisse  $h$ .
- $\mathcal{F}$  feuilletage analytique régulier de rang constant  $d \in [1, n - 1]$ .

# Feuilletages splittables I

Cadre :

- $N$  variété analytique réelle de dimension  $n \geq 2$  équipée d'une métrique riemannienne lisse  $h$ .
- $\mathcal{F}$  feuilletage analytique régulier de rang constant  $d \in [1, n - 1]$ .

## Définition

Étant donné  $\ell > 0$ , on dit que  $x$  et  $y$  in  $N$  sont  $(\mathcal{F}, \ell)$ -**reliés** si il existe un chemin lisse  $\varphi : [0, 1] \rightarrow N$  de longueur  $\in [0, \ell]$  (pour  $h$ ) horizontal pour  $\mathcal{F}$  joignant  $x$  à  $y$ .

# Feuilletages splittables I

Cadre :

- $N$  variété analytique réelle de dimension  $n \geq 2$  équipée d'une métrique riemannienne lisse  $h$ .
- $\mathcal{F}$  feuilletage analytique régulier de rang constant  $d \in [1, n - 1]$ .

## Définition

Étant donné  $\ell > 0$ , on dit que  $x$  et  $y$  in  $N$  sont  $(\mathcal{F}, \ell)$ -reliés si il existe un chemin lisse  $\varphi : [0, 1] \rightarrow N$  de longueur  $\in [0, \ell]$  (pour  $h$ ) horizontal pour  $\mathcal{F}$  joignant  $x$  à  $y$ .

## Définition

Étant donné  $\bar{x} \in N$ , on appelle **section transverse locale** en  $\bar{x}$  un ensemble  $S \subset N$  contenant  $\bar{x}$  qui est une sous-variété lisse difféomorphe au disque ouvert de dimension  $n - d$  et transverse aux feuilles de  $\mathcal{F}$ .

## Définition

On dit que le feuilletage  $\mathcal{F}$  est **splittable** dans  $(N, h)$  si pour tout  $\bar{x} \in N$ , toute section transverse locale  $S$  en  $\bar{x}$  et tout  $\ell > 0$ , la propriété suivante est vérifiée :

Pour tout ensemble Lebesgue mesurable  $E \subset S$  tel que  $\mathcal{L}^{n-d}(E) > 0$ , Il existe un ensemble Lebesgue mesurable  $F \subset E$  tel que :

- $\mathcal{L}^{n-d}(F) > 0$ ,
- pour tous  $x \neq y$  dans  $F$ ,  $x$  et  $y$  ne sont pas  $(\mathcal{F}, \ell)$ -reliés.

# Exemples

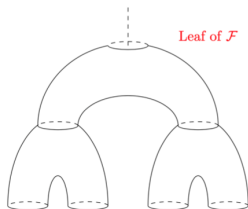
- Tout feuilletage de rang 1 est splittable.

# Exemples

- Tout feuilletage de rang 1 est splittable.
- Si  $\mathcal{F}$  de rang  $\geq 2$  est telle que la courbure de Ricci (pour  $h$ ) de ses feuilles est uniformément bornée par en dessous alors il est splittable.

# Exemples

- Tout feuilletage de rang 1 est splittable.
- Si  $\mathcal{F}$  de rang  $\geq 2$  est telle que la courbure de Ricci (pour  $h$ ) de ses feuilles est uniformément bornée par en dessous alors il est splittable.
- En modifiant une construction d ue   Hirsch, on peut construire une  $(N, h)$  et un feuilletage de rang 2 qui n'est pas splittable.



Merci pour votre attention !!