

Estimateurs séquentiels adaptatifs pour les modèles autorégressifs

Ouerdia ARKOUN

Equipe de Statistique
Laboratoire de Mathématiques Raphaël Salem
Université de Rouen, France

Marseille, le 16 avril 2012

- 1 Motivations
- 2 Approche minimax adaptative
- 3 Borne inférieure du risque minimax
- 4 Estimation adaptative séquentielle
- 5 Simulations numériques
- 6 Perspectives
- 7 Références

But : Etudier le problème d'estimation non paramétrique minimax pour des processus stochastiques à observations dépendantes.

- Estimation minimax non adaptative (régularité β est connue)

$$\inf_{\tilde{S}_n} \sup_{S \in \mathcal{H}^\beta} n^{\beta/(2\beta+1)} \mathcal{R}_n(\tilde{S}_n, S)$$

- Estimation minimax adaptative (régularité β est inconnue).

$$\inf_{\tilde{S}_n} \sup_{\beta \in [\beta_*; \beta^*]} \sup_{S \in \mathcal{H}^\beta} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{\frac{\beta}{2\beta+1}} \mathcal{R}_n(\tilde{S}_n, S)$$

Modèle autorégressif

$$y_k = S(x_k) y_{k-1} + \xi_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (0.1)$$

- $S(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction inconnue.
- $x_k = k/n$, pour tout $k = 1, \dots, n$.
- $(\xi_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont des variables aléatoires i.i.d. gaussiennes standard.

But : Estimer la fonction autorégressive S en un point fixe $z_0 \in]0; 1[$ à partir des observations y_k .

- fonctions höldériennes
- perte liée à l'erreur absolue
- approche minimax asymptotique

Motivations

L'intérêt des séries temporelles peut apparaître dans différents domaines

- Finance : par exemple, Embrechts, Kluppelberg and Mikosch, (1997)
- Économétrie : par exemple, Goldfeld, S.M. et Quandt, R.E.(1972)
- Biologie : par exemple, Julien Guyon, (2007)

Notons $\mathcal{H}^{(\beta)}$ la classe fonctionnelle, où $\beta \in \mathcal{B}$, \mathcal{B} étant un intervalle quelconque et

$$\mathcal{R}_\beta(\tilde{S}_n, N_n(\beta)) = \sup_{S \in \mathcal{H}^{(\beta)}} N_n(\beta) \mathbf{E}_S |\tilde{S}_n(z_0) - S(z_0)|,$$

avec \tilde{S}_n un estimateur et $(N_n(\beta))_{n \in \mathcal{N}^*}$ une suite tendant vers $+\infty$.

Définition 2.1

La famille $(N_n(\beta))_{n \in \mathcal{N}^*}$ est dite vitesse de convergence minimax adaptative des estimateurs sur la famille de classes $(\mathcal{H}^{(\beta)})_{\beta \in \mathcal{B}}$ si

- pour un certain estimateur S_n^* et une constante $C > 0$, on a :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{\beta \in \mathcal{B}} \mathcal{R}_\beta(S_n^*, N_n(\beta)) \leq C;$$

- il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\tilde{S}_n} \sup_{\beta \in \mathcal{B}} \mathcal{R}_\beta(\tilde{S}_n, N_n(\beta)) \geq c.$$

Cas adaptatif

- Régularité $\beta \in [\beta_*, 1]$ avec $\beta_* > 0$ supposée **inconnue**.
- Bruits gaussiens standard.
- Classes höldériennes :

On dit que le modèle (0.1) est stable si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq n} \mathbf{E}|y_k|^2 < \infty.$$

Pour tout $0 < \varepsilon < 1$ fixé la fonction inconnue S appartient à

$$\Gamma_\varepsilon = \{S \in \mathbf{C}_1[0, 1] : \|S\| \leq 1 - \varepsilon\}.$$

Pour $K > 0$ fixé et $0 < \beta \leq 1$ on définit la classe de Hölder stable associée au point z_0 par

$$\mathcal{H}^{(\beta)}(z_0, K, \epsilon) = \left\{ S \in \Gamma_\epsilon : \sup_{x \in [0,1]} \frac{|S(x) - S(z_0)|}{|x - z_0|^\beta} \leq K \right\}.$$

Risque adaptatif d'un estimateur \tilde{S}_n :

$$\mathcal{R}_n(\tilde{S}_n, S) = \sup_{\beta \in [\beta_*, 1]} \psi_n(\beta) \mathbf{E}_S |\tilde{S}_n(z_0) - S(z_0)|,$$

$\psi_n(\beta) = \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{\beta/(2\beta+1)}$: **vitesse de convergence minimax adaptative.**

Borne inférieure du risque minimax

Theorem 3.1

Le risque adaptatif minimax admet la borne inférieure asymptotique suivante : $\exists K_0 > 0$ telle que $\forall K > K_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\tilde{S}_n} \sup_{S \in \mathcal{H}^{(\beta)}(z_0, K, \epsilon)} \mathcal{R}_n(\tilde{S}_n, S) \geq \frac{1}{4}.$$

où l'infimum est pris sur tous les estimateurs \tilde{S}_n .

Estimateur à noyau

- L'estimateur à noyau s'écrit sous la forme suivante

$$\hat{S}_n(z_0) = \frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^n Q(u_k) y_{k-1} y_k \mathbf{1}_{(A_n \geq a^*)},$$

où $Q(\cdot)$ est la fonction noyau,

$$A_n = \sum_{k=1}^n Q(u_k) y_{k-1}^2 \quad \text{avec} \quad u_k = \frac{x_k - z_0}{h_n}.$$

- L'erreur de l'estimateur à noyau est

$$\hat{S}_n(z_0) - S(z_0) = -S(z_0) \mathbf{1}_{(A_n < a^*)} + (B_n + \frac{1}{\sqrt{A_n}} \varsigma_n) \mathbf{1}_{(A_n \geq a^*)}$$

avec

$$\varsigma_n = \frac{\sum_{k=1}^n Q(u_k) y_{k-1} \xi_k}{\sqrt{A_n}}$$

Estimateur séquentiel

L'estimateur séquentiel s'écrit sous la forme suivante

$$S_h^*(z_0) = \frac{1}{H} \left(\sum_{j=1}^{\tau_H-1} Q(u_j) y_{j-1} y_j + \alpha_H Q(u_{\tau_H}) y_{\tau_H-1} y_{\tau_H} \right) \mathbf{1}_{(A_n \geq H)}.$$

Pour $0 \leq \alpha_H \leq 1$ tel que $\sum_{j=1}^{\tau_H-1} Q(u_j) y_{j-1}^2 + \alpha_H Q(u_{\tau_H}) y_{\tau_H-1}^2 = H$,
 où τ_H est le temps d'arrêt défini comme suit

$$\tau_H = \inf \left\{ 0 \leq k \leq n : \sum_{j=1}^k Q(u_j) y_{j-1}^2 \geq H \right\}$$

On note

$$A_k = \sum_{j=1}^k Q(u_j) y_{j-1}^2 \quad \text{avec} \quad u_j = \frac{x_j - z_0}{h}.$$

- **Propriété de l'intégrale stochastique :**

$\forall H > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \int_0^{\tau_H} f_t dW_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

avec

$$\tau_H = \inf(t \geq 0 : \int_0^t f_s^2 ds \geq H)$$

• **Propriété de l'intégrale stochastique :**

$\forall H > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{H}} \int_0^{\tau_H} f_t dW_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

avec

$$\tau_H = \inf(t \geq 0 : \int_0^t f_s^2 ds \geq H)$$

Lemme 4.1

Pour tout $z \geq 2$,

$$\mathbf{P}_S(|\zeta_H(h)| > z) \leq 2 e^{-z^2/8}.$$

avec

$$\zeta_H = \frac{1}{\sqrt{H}} \left(\sum_{j=1}^{\tau_H-1} Q(u_j) y_{j-1} \xi_j + \alpha_H Q(u_{\tau_H}) y_{\tau_H-1} \xi_{\tau_H} \right) \mathbf{1}_{(A_n \geq H)}.$$

Puisque β est inconnu on utilise la grille sur l'intervalle $[\beta_*, 1]$ définie par :

$$\beta_k = \beta_* + \frac{k}{m}(1 - \beta_*), \quad m = \lceil \ln d_n \rceil + 1 \quad \text{et} \quad d_n = n / \ln n.$$

On note

$$N_k = N(\beta_k) \quad \text{and} \quad h_k = h(\beta_k),$$

et

$$\omega(h_j) = \max_{0 \leq k \leq j} \left(|\hat{S}_{h_j} - \hat{S}_{h_k}| - \frac{\lambda}{N_{k+1}} \right),$$

puis on définit l'indice optimal de la fenêtre comme

$$\hat{k} = \inf \left\{ 0 \leq j \leq m : \omega(h_j) \geq \frac{\lambda}{N_j} \right\} - 1.$$

L'estimateur adaptatif est défini comme

$$\hat{S}_n = S_{\hat{h}}^* \quad \text{avec} \quad \hat{h} = h_{\hat{k}}.$$

Theorem 4.2

$\forall K > 0$ et $0 < \varepsilon < 1$, on a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{S \in \mathcal{H}^{(\beta)}(z_0, K, \varepsilon)} \mathcal{R}_n(\hat{S}_n, S) < \infty,$$

donc l'estimateur \hat{S}_n est adaptatif en vitesse de convergence.

Simulation numérique

On se propose d'estimer en z_0 la fonction S définie sur $[0; 1]$ par $S(x) = |x - z_0|^\beta$ pour $\beta = 0.7$ et $z_0 = 1/\sqrt{2}$.

$$\mathbf{R}_n = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M |\hat{S}_n^{(k)}(z_0) - S(z_0)|.$$

Pour $M = 15000$, on obtient

n	100	1000	5000	10000
\mathbf{R}_n	0.284	0.154	0.101	0.087





En prenant $\beta = 1$, on obtient





n	100	1000	5000	10000
\mathbf{R}_n	0.201	0.097	0.058	0.047

- Régresseurs non uniformément répartis
- Adaptation avec distribution de bruit inconnue
- Modèle multidimensionnel
 - $y_k = S_1(x_k)y_{k-1} + \dots + S_p(x_k)y_{k-p} + \xi_k$

- Régresseurs non uniformément répartis
- Adaptation avec distribution de bruit inconnue
- Modèle multidimensionnel
 - $y_k = S_1(x_k)y_{k-1} + \dots + S_p(x_k)y_{k-p} + \xi_k$
- Considérer les modèles AR en temps continu
 - $dy_t = (a(t) + S(t)y_t)dt + dW_t$
 - $dy_t = (a(t) + S(t)y_t)dt + d\xi_t$
avec $(\xi_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Lévy

Références

-  Arkoun, O. (2011) : Sequential adaptive estimators in nonparametric autoregressive models. *Sequential Analysis* **30** (2), 228-246.
-  Arkoun, O. and Pergamenchtchikov, S. (2008) : Nonparametric Estimation for an Autoregressive Model. Vestnik of Tomsk State University, Ser. *Mathematics et Mechanics* **2** (3), 20 - 30.
-  Belitser, E. (2000a) : Local minimax pointwise estimation of a multivariate density, *Statisti.Nederletica* **54** (3), 351-365.
-  Borisov, V.Z. and Konev, V.V. (1977) : Sequential Estimation of Parameters of Discrete Processes, *Automat. and Remote control* **10**, 58-64.

-  Dahlhaus, R. (1996a) : On the Kullback-Leibler information divergence of locally stationary processes, *Stochastic Process. Appl.* **62** (1), 139–168.
-  Galtchouk, L. and Pergamenschikov, S. (2001) : Sequential nonparametric adaptive estimation of the drift coefficient in diffusion processes, *Math. Methods Statist.* **10** (3), 316–330.
-  Lepskiï, O. V. (1990) : A problem of adaptive estimation in Gaussian white noise, *Theory Probab. Appl.* **35**(3), 454-466.
-  Liptser, R. S. and Shiryaev, A. N. : *Statistics of random processes. I and II*, Springer-Verlag, New York, 1978.