Estimation semi-paramétrique dans un modèle de déformation

Philippe Fraysse

Université Bordeaux 1
INRIA Bordeaux Sud-Ouest

Colloque Jeunes probabilistes et Statisticiens
Marseille, 20 Avril 2012

On s'intéresse au modèle de déformation

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}$$

On s'intéresse au modèle de déformation

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}$$

où $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, $\mathbb{E}\left[\varepsilon_{i,j}\right] = 0$ et $\mathbb{E}\left[\varepsilon_{i,j}^2\right] = \sigma_j^2 < +\infty$.

On s'intéresse au modèle de déformation

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}$$

où $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, $\mathbb{E}\left[\varepsilon_{i,j}\right] = 0$ et $\mathbb{E}\left[\varepsilon_{i,j}^2\right] = \sigma_j^2 < +\infty$.

$(\mathcal{H}_1)$ *f est paire, 1-périodique, bornée.*

$(\mathcal{H}_2)$ *$(X_i)_{i\geq 0}$ iid de loi uniforme sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$*

On s'intéresse au modèle de déformation

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}$$

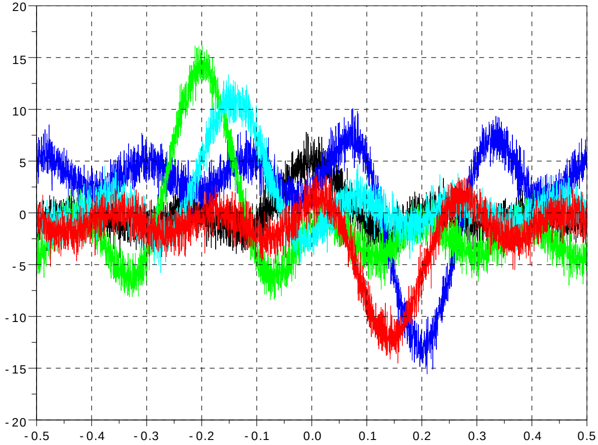
où $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, $\qquad \mathbb{E}\left[\varepsilon_{i,j}\right] = 0$ et $\mathbb{E}\left[\varepsilon_{i,j}^2\right] = \sigma_j^2 < +\infty$.

$(\mathcal{H}_1)$ $\quad$ *f est paire, 1-périodique, bornée.*

$(\mathcal{H}_2)$ $\quad$ *$(X_i)_{i\geq 0}$ iid de loi uniforme sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$*

Objectif : estimer v_j (paramètre de niveau), θ_j (paramètre de translation), a_j (paramètre d'échelle) et f (forme commune).

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}$$



1. Modèle
2. Identifiabilité
3. Estimation paramétrique
   - Estimation de θ
   - Estimation de a
4. Estimation non paramétrique de f

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

- Le modèle n'est pas identifiable :

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

- Le modèle n'est pas identifiable :
  Pour un jeu de paramètres (a, θ, v) et une fonction f, on peut trouver un autre jeu de paramètres (a^*, θ^*, v^*) et une autre fonction f^* tels que pour $1 \leq j \leq p$ et tout x,

$$a_j f(x - \theta_j) + v_j = a_j^* f^*(x - \theta_j^*) + v_j^*.$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

- Le modèle n'est pas identifiable :
  Pour un jeu de paramètres (a, θ, v) et une fonction f, on peut trouver un autre jeu de paramètres (a^*, θ^*, v^*) et une autre fonction f^* tels que pour $1 \leq j \leq p$ et tout x,

$$a_j f(x - \theta_j) + v_j = a_j^* f^*(x - \theta_j^*) + v_j^*.$$

- On rajoute donc les contraintes d'identifiabilité

$$(\mathcal{H}_3) \quad \int_{-1/2}^{1/2} f(x)dx = 0.$$

$$(\mathcal{H}_4) \quad a_1 = 1,\ \theta_1 = 0 \text{ et } \max_{1 \leq j \leq p} |\theta_j| < 1/4.$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

- On estime v_j par la moyenne empirique des $Y_{i,j}$.

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

- On estime v_j par la moyenne empirique des $Y_{i,j}$.
- Estimation de $\theta_j \Rightarrow$ Estimation de a_j.

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

On cherche une fonction ϕ continue $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ telle que $\phi(\theta) = 0$.

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

On cherche une fonction ϕ continue $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ telle que $\phi(\theta) = 0$.

- $\phi(t) = \mathbb{E}\left[S(X,t)\begin{pmatrix} a_1 f(X-\theta_1) \\ \vdots \\ a_p f(X-\theta_p) \end{pmatrix}\right].$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

On cherche une fonction ϕ continue $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ telle que $\phi(\theta) = 0$.

- $$\phi(t) = \mathbb{E}\left[S(X,t) \begin{pmatrix} a_1 f(X - \theta_1) \\ \vdots \\ a_p f(X - \theta_p) \end{pmatrix} \right].$$

- $$S(X,t) = \operatorname{diag}\Big(\sin(2\pi(X - t_1)), \ldots, \sin(2\pi(X - t_p)) \Big)$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

On cherche une fonction ϕ continue $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ telle que $\phi(\theta) = 0$.

- $$\phi(t) = \mathbb{E}\left[S(X,t)\begin{pmatrix} a_1 f(X-\theta_1) \\ \vdots \\ a_p f(X-\theta_p)\end{pmatrix}\right].$$

- $$S(X,t) = \operatorname{diag}\Big(\sin(2\pi(X-t_1)), \ldots, \sin(2\pi(X-t_p))\Big)$$

- $$\phi(t) = f_1 \begin{pmatrix} a_1 \sin(2\pi(\theta_1 - t_1)) \\ \vdots \\ a_p \sin(2\pi(\theta_p - t_p))\end{pmatrix}.$$

où

$$f_1 = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\cos(2\pi x)dx$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

On cherche une fonction ϕ continue $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ telle que $\phi(\theta) = 0$.

- $\phi(t) = \mathbb{E}\left[S(X,t) \begin{pmatrix} a_1 f(X-\theta_1) \\ \vdots \\ a_p f(X-\theta_p) \end{pmatrix} \right].$
- $S(X,t) = \mathrm{diag}\Big(\sin(2\pi(X-t_1)), \ldots, \sin(2\pi(X-t_p)) \Big)$
- $\phi(t) = f_1 \begin{pmatrix} a_1 \sin(2\pi(\theta_1 - t_1)) \\ \vdots \\ a_p \sin(2\pi(\theta_p - t_p)) \end{pmatrix}.$

où

$$f_1 = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\cos(2\pi x)dx$$

$\Rightarrow \underline{\phi(\theta) = 0}$

Algorithme :

Algorithme :

- $\widehat{\theta}_0 \in K^p = [-1/4; 1/4]^p$.

Algorithme :

- $\widehat{\theta}_0 \in K^p = [-1/4; 1/4]^p$.
- Pour $n \geq 1$,

$$\widehat{\theta}_{n+1} = \pi_{K^p}\Big(\widehat{\theta}_n + \frac{1}{n} T_{n+1}\Big).$$

Algorithme :

- $\widehat{\theta}_0 \in K^p = [-1/4; 1/4]^p$.
- Pour $n \geq 1$,
$$\widehat{\theta}_{n+1} = \pi_{K^p}\Big(\widehat{\theta}_n + \frac{1}{n} T_{n+1}\Big).$$
- $$T_{n+1} = \mathrm{diag}\Big(\mathsf{sign}(a_1 f_1), \ldots, \mathsf{sign}(a_p f_1)\Big) S(X_{n+1}, \widehat{\theta}_n) \begin{pmatrix} Y_{n+1,1} \\ \vdots \\ Y_{n+1,p} \end{pmatrix}.$$

Algorithme :

- $\widehat{\theta}_0 \in K^p = [-1/4; 1/4]^p$.
- Pour $n \geq 1$,
$$\widehat{\theta}_{n+1} = \pi_{K^p}\Big(\widehat{\theta}_n + \frac{1}{n} T_{n+1}\Big).$$
- $T_{n+1} = \mathrm{diag}\Big(\mathsf{sign}(a_1 f_1), \ldots, \mathsf{sign}(a_p f_1)\Big) S(X_{n+1}, \widehat{\theta}_n) \begin{pmatrix} Y_{n+1,1} \\ \vdots \\ Y_{n+1,p} \end{pmatrix}.$

Théorème

Sous $(\mathcal{H}_{1-4})$,
$$\lim_{n \to +\infty} \widehat{\theta}_n = \theta \qquad \text{p.s.}$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

Théorème

Sous $(\mathcal{H}_{1-4})$ *et si* $(\varepsilon_{i,j})$ *a un moment d'ordre* > 2 *on a,*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \xi^2(\theta)\right).$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

Théorème

Sous $(\mathcal{H}_{1-4})$ *et si* $(\varepsilon_{i,j})$ *a un moment d'ordre* > 2 *on a,*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \xi^2(\theta)\right).$$

Théorème

De plus, on a la loi du log-itéré

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2\log\log n}\right)\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)^T = \xi^2(\theta) \qquad \text{p.s.}$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

Théorème

Sous $(\mathcal{H}_{1-4})$ *et si* $(\varepsilon_{i,j})$ *a un moment d'ordre* > 2 *on a,*

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \xi^2(\theta)\right).$$

Théorème

De plus, on a la loi du log-itéré

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{2\log\log n}\right)\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right)^T = \xi^2(\theta) \qquad \text{p.s.}$$

et la loi forte quadratique

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\left(\widehat{\theta}_k - \theta\right)\left(\widehat{\theta}_k - \theta\right)^T = \xi^2(\theta) \qquad \text{p.s.}$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}$$

- $\psi(t) = \mathbb{E}\left[C(X,t) \begin{pmatrix} a_1 f(X-\theta_1) \\ \vdots \\ a_p f(X-\theta_p) \end{pmatrix} \right].$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}$$

- $\psi(t) = \mathbb{E}\left[C(X,t)\begin{pmatrix} a_1 f(X-\theta_1) \\ \vdots \\ a_p f(X-\theta_p) \end{pmatrix}\right].$
- $C(X,t) = \mathrm{diag}\Big(\cos(2\pi(X-t_1)), \ldots, \cos(2\pi(X-t_p))\Big).$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}$$

- $\psi(t) = \mathbb{E}\left[C(X,t)\begin{pmatrix} a_1 f(X-\theta_1) \\ \vdots \\ a_p f(X-\theta_p)\end{pmatrix}\right].$
- $C(X,t) = \mathrm{diag}\Big(\cos(2\pi(X-t_1)),\ldots,\cos(2\pi(X-t_p))\Big).$
- $\psi(t) = f_1\begin{pmatrix} a_1\cos(2\pi(\theta_1-t_1)) \\ \vdots \\ a_p\cos(2\pi(\theta_p-t_p))\end{pmatrix}.$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}$$

- $\psi(t) = \mathbb{E}\left[C(X,t)\begin{pmatrix} a_1 f(X-\theta_1) \\ \vdots \\ a_p f(X-\theta_p) \end{pmatrix}\right].$
- $C(X,t) = \mathrm{diag}\Big(\cos(2\pi(X-t_1)), \ldots, \cos(2\pi(X-t_p))\Big).$
- $\psi(t) = f_1 \begin{pmatrix} a_1 \cos(2\pi(\theta_1 - t_1)) \\ \vdots \\ a_p \cos(2\pi(\theta_p - t_p)) \end{pmatrix}.$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \psi(\widehat{\theta}_n) = \psi(\theta) = f_1 a$ p.s.

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}$$

- $\psi(t) = \mathbb{E}\left[C(X,t)\begin{pmatrix} a_1 f(X-\theta_1) \\ \vdots \\ a_p f(X-\theta_p)\end{pmatrix}\right].$
- $C(X,t) = \mathrm{diag}\Big(\cos(2\pi(X-t_1)), \ldots, \cos(2\pi(X-t_p))\Big).$
- $\psi(t) = f_1 \begin{pmatrix} a_1 \cos(2\pi(\theta_1 - t_1)) \\ \vdots \\ a_p \cos(2\pi(\theta_p - t_p))\end{pmatrix}.$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \psi(\widehat{\theta}_n) = \psi(\theta) = f_1 a \quad$ p.s.

$$\Rightarrow \widehat{a}_{n,j} = \frac{1}{nf_1}\sum_{i=1}^{n} \cos(2\pi(X_i - \widehat{\theta}_{n,j}))Y_{i,j}.$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

$$\widehat{a}_{n,j} = \frac{1}{nf_1} \sum_{i=1}^{n} \cos(2\pi(X_i - \widehat{\theta}_{n,j}))Y_{i,j}.$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

$$\widehat{a}_{n,j} = \frac{1}{n f_1} \sum_{i=1}^{n} \cos(2\pi(X_i - \widehat{\theta}_{n,j})) Y_{i,j}.$$

Théorème

Sous $(\mathcal{H}_{1-4})$*,*

$$\lim_{n \to +\infty} \widehat{a}_n = a \qquad \text{p.s.}$$

et

$$\sqrt{n}\left(\widehat{a}_n - a\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}_p\left(0, \frac{1}{f_1^2}\Sigma\right)$$

où $\Sigma =$ Cov $\left(\frac{\cos(2\pi(X_1-\theta_k))}{g(X_1)} Y_{1,k}, \frac{\cos(2\pi(X_1-\theta_l))}{g(X_1)} Y_{1,l}\right)_{1\leq k,l\leq p}$

Pour résumer, pour le modèle de déformation

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

Pour résumer, pour le modèle de déformation

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

- On estime v_j par

$$\widehat{v}_{n,j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,j}.$$

Pour résumer, pour le modèle de déformation

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

- On estime v_j par
$$\widehat{v}_{n,j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,j}.$$

- On estime θ_j par
$$\widehat{\theta}_{n+1,j} = \pi_K\Big(\widehat{\theta}_{n,j} + \frac{1}{n} T_{n+1,j}\Big).$$

Pour résumer, pour le modèle de déformation

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

- On estime v_j par

$$\widehat{v}_{n,j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,j}.$$

- On estime θ_j par

$$\widehat{\theta}_{n+1,j} = \pi_K \left(\widehat{\theta}_{n,j} + \frac{1}{n} T_{n+1,j} \right).$$

- On estime a_j par

$$\widehat{a}_{n,j} = \frac{1}{n f_1} \sum_{i=1}^{n} \cos(2\pi(X_i - \widehat{\theta}_{n,j})) Y_{i,j}.$$

Pour résumer, pour le modèle de déformation

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

- On estime v_j par

$$\widehat{v}_{n,j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{i,j}.$$

- On estime θ_j par

$$\widehat{\theta}_{n+1,j} = \pi_K \Big(\widehat{\theta}_{n,j} + \frac{1}{n} T_{n+1,j} \Big).$$

- On estime a_j par

$$\widehat{a}_{n,j} = \frac{1}{n f_1} \sum_{i=1}^{n} \cos(2\pi(X_i - \widehat{\theta}_{n,j})) Y_{i,j}.$$

Et on a établi la convergence p.s. de chacun des estimateurs, ainsi que la normalité asymptotique.

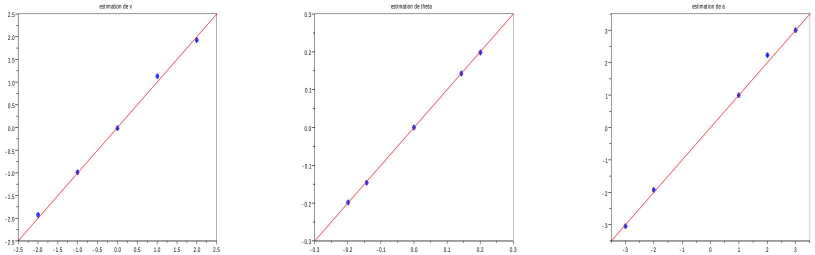


FIGURE: Estimation de v, θ et a

1. Modèle

2. Identifiabilité

3. Estimation paramétrique
   - Estimation de θ
   - Estimation de a

4. Estimation non paramétrique de f

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

Pour l'estimation non paramétrique de f, on considère l'estimateur récursif de Nadaraya-Watson

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

Pour l'estimation non paramétrique de f, on considère l'estimateur récursif de Nadaraya-Watson

$$\widehat{f}_n(x) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \widehat{f}_{n,j}(x),$$

avec

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

Pour l'estimation non paramétrique de f, on considère l'estimateur récursif de Nadaraya-Watson

$$\widehat{f}_n(x) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \widehat{f}_{n,j}(x),$$

avec

- $\widehat{f}_{n,j}(x) = \dfrac{1}{\widehat{a}_{n,j}} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} W_{i,j}(x) \left(Y_{i,j} - \widehat{v}_{i,j}\right)}{\sum_{i=1}^{n} W_{i,j}(x)}.$

$$Y_{i,j} = a_j f(X_i - \theta_j) + v_j + \varepsilon_{i,j}.$$

Pour l'estimation non paramétrique de f, on considère l'estimateur récursif de Nadaraya-Watson

$$\widehat{f}_n(x) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} \widehat{f}_{n,j}(x),$$

avec

- $\widehat{f}_{n,j}(x) = \dfrac{1}{\widehat{a}_{n,j}} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} W_{i,j}(x) \left(Y_{i,j} - \widehat{v}_{i,j}\right)}{\sum_{i=1}^{n} W_{i,j}(x)}.$
- $W_{i,j}(x) = \dfrac{1}{h_i} K\left(\dfrac{X_i - \widehat{\theta}_{i-1,j} - x}{h_i}\right).$
- $h_i = i^{-\alpha}.$

Théorème

Sous $(\mathcal{H}_{1-4})$, *si* f *est lipschitzienne et si* $(\varepsilon_{i,j})$ *a un moment d'ordre* > 2.
Pour $x \in [-1/2; 1/2]$,

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f}_n(x) = f(x) \qquad \text{p.s.}$$

Théorème

Sous $(\mathcal{H}_{1-4})$*, si* f *est lipschitzienne et si* $(\varepsilon_{i,j})$ *a un moment d'ordre* > 2*.*
Pour $x \in [-1/2; 1/2]$*,*

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{f}_n(x) = f(x) \qquad \text{p.s.}$$

Théorème

De plus, si $\alpha > 1/3$*, alors pour* $x \in [-1/2; 1/2]$ *avec* $x \neq 0$*,*

$$\sqrt{nh_n}(\widehat{f}_n(x) - f(x)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\nu^2}{1+\alpha}\frac{1}{p^2}\sum_{j=1}^{p}\frac{\sigma_j^2}{g(\theta_j + x) + g(\theta_j - x)}\right).$$

De plus, en $x = 0$*,*

$$\sqrt{nh_n}(\widehat{f}_n(0) - f(0)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\nu^2}{1+\alpha}\frac{1}{p^2}\sum_{j=1}^{p}\frac{\sigma_j^2}{g(\theta_j)}\right).$$

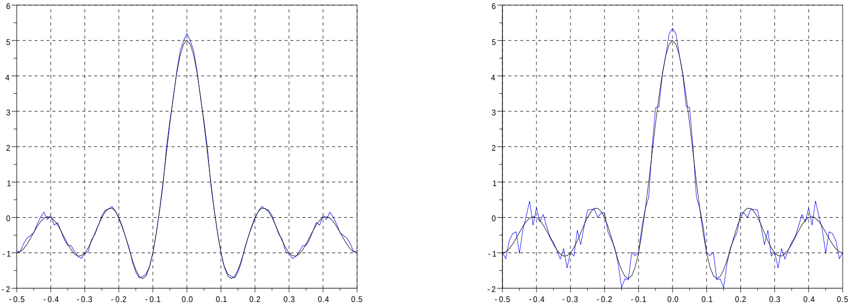


FIGURE: Estimation de f par $\widehat{f}_n$ et $\widehat{f}_{n,1}$

Merci de votre attention.

On s'est inspiré de

B. BERCU, P. F., A Robbins-Monro procedure for estimation in semiparametric regression models, *Annals of Statistics*.