

# Inférence Statistique pour des Processus Multifractionnaires Cachés dans un Cadre de Modèles à Volatilité Stochastique

Qidi Peng

Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1

Exposé à la Dixième colloque "Jeunes probabilistes et statisticiens"  
CIRM - Marseille

Jeudi 19 avril 2012

- 1 Introduction et motivations
  - Du mb fractionnaire au mb multifractionnaire
  - Modèle à volatilité stochastique multifractionnaire (mvsm)
  - Mvsm et le cadre classique "signal+bruit"
- 2 Mvsm : régularité de Hölder global et ponctuel
  - Exposant de Hölder global et ponctuel
  - Simulations de trajectoires de mvsm
- 3 Exposant de Hölder ponctuel du mbm caché : estimation et TCL
  - La méthodologie
  - Enoncés des principaux résultats
  - Simulation de l'estimateur

# Plan

- 1 Introduction et motivations
  - Du mb fractionnaire au mb multifractionnaire
  - Modèle à volatilité stochastique multifractionnaire (mvsm)
  - Mvsm et le cadre classique "signal+bruit"
- 2 Mvsm : régularité de Hölder global et ponctuel
  - Exposant de Hölder global et ponctuel
  - Simulations de trajectoires de mvsm
- 3 Exposant de Hölder ponctuel du mbm caché : estimation et TCL
  - La méthodologie
  - Énoncés des principaux résultats
  - Simulation de l'estimateur

## Du mouvement brownien fractionnaire (mbf) au mb multifractionnaire (mbm)

Le **mouvement brownien fractionnaire (mbf)** (Kolmogorov (1940))  $\{B_\alpha(s)\}_{s \in [0,1]}$  de paramètre de Hurst  $\alpha \in ]0, 1[$ , peut être défini par :

$$B_\alpha(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{is\xi} - 1}{|\xi|^{\alpha+1/2}} d\widehat{B}(\xi) ; \quad (1)$$

$d\widehat{B}$  étant l'unique mesure stochastique à valeurs complexes qui vérifie :

$$\int_{\mathbb{R}} f(s) dB(s) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) d\widehat{B}(\xi), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (2)$$

où  $\{B(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$  désigne le processus de Wiener à valeurs réelles et  $\widehat{f}$  la transformée de Fourier de  $f$ .

→ Le mbf a été "popularisé" par Mandelbrot (à partir de la fin des années 60), qui a insisté sur son importance dans diverses applications.

→ Cependant, ce modèle est limitatif : sa "rugosité locale" (mesurée par l'exposant de Hölder ponctuel) reste constante au cours du temps.

→ La "rugosité locale" (i.e. la régularité de Hölder locale) d'un processus  $\{Y(s)\}_{s \in [0,1]}$  au voisinage d'un instant  $s_0$ , peut être mesurée par  $\rho_Y(s_0)$  l'exposant de Hölder ponctuel de  $\{Y(s)\}_{s \in [0,1]}$  en  $s_0$ .

→ Lorsque les trajectoires de  $\{Y(s)\}_{s \in [0,1]}$  sont continues et nulle-part dérivables,  $\rho_Y(s_0)$  peut être défini par :

$$\rho_Y(s_0) = \sup \left\{ \rho \in [0, 1] : \limsup_{x \rightarrow 0} \frac{|Y(s_0 + x) - Y(s_0)|}{|x|^\rho} = 0 \right\}. \quad (3)$$

⇒ Plus  $\rho_Y(s_0)$  est petit, plus "rugueux" est  $\{Y(s)\}_{s \in [0,1]}$  au voisinage de  $s_0 \in [0, 1]$ .

Remarque : la "rugosité" locale du mbf  $\{B_\alpha(s)\}_{s \in [0,1]}$  est partout la même car :

$$\rho_{B_\alpha}(s_0) = \alpha, \quad \text{p.s. pour tout } s_0.$$

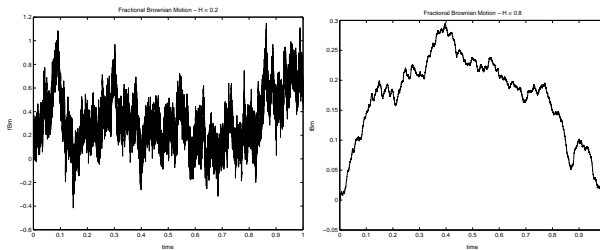


Figure: Simulation des trajectoires du mbf de paramètre de Hurst  $\alpha = 0.2$  et  $\alpha = 0.8$

Afin de remédier à cette limitation du mbf, Benassi, Jaffard, Lévy Véhel, Peltier et Roux, ont introduit, il y a plus de 15 ans, le **mouvement brownien multifractionnaire (mbm)**, noté par  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  et défini par :

$$X(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{is\xi} - 1}{|\xi|^{H(s)+1/2}} d\widehat{B}(\xi),$$

où  $H(\cdot)$  est un paramètre fonctionnel à valeurs dans  $]0, 1[$ . Lorsque  $H(\cdot)$  est une fonction lipschitzienne (condition suffisante mais non nécessaire), **on peut prescrire  $\rho_X$ , l'exposant de Hölder ponctuel du mbm, via ce paramètre :**

$$\rho_X(s_0) = H(s_0), \quad \text{p.s. pour tout } s_0.$$

$\Rightarrow$  Le mbm est devenu **un modèle d'une utilité considérable** en traitement du signal et de l'image (Lévy Véhel, Flandrin, Gonçalves, Iftekharuddin, Lopes, ...) ainsi que dans d'autres domaines tels que la finance (Bianchi, Lévy Véhel, ...).

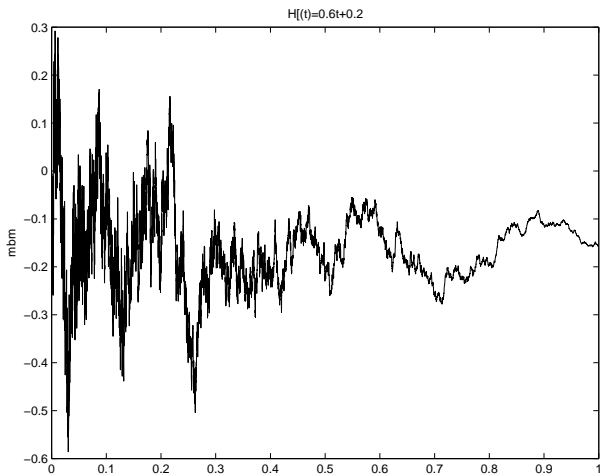


Figure: Simulation d'une trajectoire du mbm avec  $H(s) = 0.6s + 0.2$  pour tout  $s$

→ Depuis plus d'une décennie, plusieurs auteurs se sont intéressés à des problèmes d'inférence statistique liés au mbm ou encore à d'autres processus ou champs multifractionnaires (Ayache, Bardet, Benassi, Bertrand, Bianchi, Coeurjolly, Cohen, Istas, Surgailis, ...); parmi les plus importants, figure l'estimation de  $H(s_0)$ , l'exposant de Hölder ponctuel en un instant arbitraire  $s_0$ .

→ Dans de tels problèmes, la méthode des variations quadratiques généralisées, qui a d'abord été introduite par Istas et Lang dans un cadre de processus à accroissements stationnaires, joue un rôle crucial.

→ A notre connaissance, dans la littérature statistique qui concerne le mbm, jusqu'à présent, il a été supposé que, l'observation des vraies valeurs de ce processus sur une grille, est disponible; cependant, une telle hypothèse ne semble pas toujours réaliste.

⇒ L'objectif principal de cet exposé est d'étudier des problèmes d'inférence statistique liés au mbm, lorsque seulement une version corrompue de ce dernier peut être observée sur une grille régulière.

# Modèle à volatilité stochastique multifractionnaire (mvsm)

Dans cet exposé, nous supposons que l'on observe un échantillon  $\{Z(0), Z(1/n), \dots, Z(n/n)\}$  du processus  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$ , appelé **modèle à volatilité stochastique multifractionnaire (mvsm)**, défini par :

$$Z(t) = \int_0^t \Phi(X(s)) dW(s), \quad (4)$$

- $\{W(s)\}_{s \in [0,1]}$  désigne un mouvement brownien standard ;
- $\Phi$  est une fonction inconnue de l'espace  $C_{pol}^2(\mathbb{R})$ , pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,

$$C_{pol}^l(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^l(\mathbb{R}) : \exists c, K > 0, \forall x, \sum_{k=0}^l |f^{(k)}(x)| \leq c(1+|x|^K) \right\};$$

- $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  est un mbm caché indépendant de  $\{W(s)\}_{s \in [0,1]}$  ; sauf mention du contraire, nous supposons que  $H(\cdot)$  est une fonction de classe  $C^2$  à valeurs dans  $]0, 1[$ .

Le modèle à volatilité stochastique  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$  possède les trois propriétés suivantes qui permettent de reproduire certaines caractéristiques de séries chronologiques financières :

- les accroissements de  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$  sont non corrélés, cela résulte de l'hypothèse d'indépendance des processus  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  et  $\{W(s)\}_{s \in [0,1]}$  ;
- en revanche, les carrés des accroissements de  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$  sont corrélés et les intensités de leurs corrélations peuvent changer au cours du temps, permettant ainsi d'avoir des périodes avec de la longue dépendance qui alternent avec d'autres périodes avec de la faible dépendance ;
- lorsque  $\Phi' \neq 0$  p.p., la "rugosité" locale du processus de volatilité  $\{\Phi(X(s))\}_{s \in [0,1]}$  (autrement dit son exposant de Hölder ponctuel) peut être calibrée au moyen du paramètre fonctionnel  $H(\cdot)$  du mbm  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  et peut donc évoluer au cours du temps.

## Mvsm et le cadre classique "signal+bruit"

Des modèles à volatilité stochastique fractionnaire (mvsf) de la même forme que  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$  mais où le mbm caché  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  est remplacé par un mbf caché  $\{B_\alpha(s)\}_{s \in [0,1]}$  avec  $\alpha \in ]1/2, 1[$ , ont été étudiés précédemment par Gloter et Hoffmann (2004).

→ Une idée importante, déjà utilisée par ces deux auteurs, est que les valeurs moyennes inconnues,

$$\bar{Y}_{i,N_n} = N_n \int_{i/N_n}^{(i+1)/N_n} (\Phi(X(s)))^2 ds \quad i = 0, \dots, N_n - 1,$$

où  $N_n = \lceil n^\beta \rceil$  (ici  $\lceil \cdot \rceil$  désigne la fonction partie entière et  $\beta \in ]0, 1[$  un paramètre fixé), peuvent être estimées à partir des observations disponibles  $\{Z(0), Z(1/n), \dots, Z(n/n)\}$ .

De façon plus précise, pour tout  $i \in \{0, \dots, N_n - 1\}$ , en posant :

$$\hat{Y}_{i,N_n,n} := N_n \sum_{k=0}^{j_{i+1}-j_i-1} \left( Z((j_i + k + 1)/n) - Z((j_i + k)/n) \right)^2,$$

où,  $j_i := [in/N_n]$ , on peut, grâce à la formule d'Itô, se ramener à un cadre statistique classique de la forme "signal+bruit" :

$$\hat{Y}_{i,N_n,n} = \bar{Y}_{i,N_n} + \mathcal{E}_{i,N_n,n}, \quad i = 0, \dots, N_n - 1, \quad (5)$$

où les termes d'erreur  $\mathcal{E}_{i,N_n,n}$  possèdent des propriétés "sympathiques", entre autres :

- (i) conditionnellement à la tribu  $\mathcal{G}_X = \sigma(X(s), 0 \leq s \leq 1)$ , les lois des  $\mathcal{E}_{i, N_n, n}$ ,  $i = 0, \dots, N_n - 1$  sont **indépendantes** entre elles ;
- (ii) il existe une variable aléatoire  $C$  dont les moments de tout ordre sont finis, telle que, presque sûrement, pour tout  $n$  assez grand et  $i = 0, \dots, N_n - 1$ , l'on a :

$$|\mathbb{E}(\mathcal{E}_{i, N_n, n} | \mathcal{G}_X)| \leq CN_n^{-(\beta^{-1}-1)},$$

$$\mathbb{E}(\mathcal{E}_{i, N_n, n}^2 | \mathcal{G}_X) \leq CN_n^{-(\beta^{-1}-1)},$$

et

$$\mathbb{E}(\mathcal{E}_{i, N_n, n}^4 | \mathcal{G}_X) \leq CN_n^{-2(\beta^{-1}-1)}.$$

⇒ Ainsi, on dispose d'un contrôle de la vitesse de convergence vers 0 des termes d'erreur.

# Plan

- 1 Introduction et motivations
  - Du mb fractionnaire au mb multifractionnaire
  - Modèle à volatilité stochastique multifractionnaire (mvsm)
  - Mvsm et le cadre classique "signal+bruit"
- 2 Mvsm : régularité de Hölder global et ponctuel
  - Exposant de Hölder global et ponctuel
  - Simulations de trajectoires de mvsm
- 3 Exposant de Hölder ponctuel du mbm caché : estimation et TCL
  - La méthodologie
  - Énoncés des principaux résultats
  - Simulation de l'estimateur

Avant de se lancer dans une étude statistique du mvsm

$$Z(t) = \int_0^t \Phi(X(s)) dW(s),$$

il faudrait au préalable avoir une "représentation intuitive" de ce modèle. Pour cela, il convient de déterminer "le degré de rugosité" de ses trajectoires et de simuler ces dernières ; la méthode de simulation résultera d'une représentation en série aléatoire du mvsm, via la base de Haar.

→ Les résultats de cette section sont valables, non seulement dans le cas où  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  est un mbm avec un paramètre  $H(\cdot)$  suffisamment régulier et à valeurs dans  $]1/2, 1[$ , mais aussi, dans le cadre beaucoup plus général, où  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  est un processus gaussien centré arbitraire dont les trajectoires vérifient une condition de Hölder uniforme d'un certain ordre  $\alpha \in ]1/2, 1]$  i.e. :  $\exists C > 0$  une v.a. telle que p.s.  $\forall s_1, s_2 \in [0, 1]$ ,

$$|X(s_1) - X(s_2)| \leq C|s_1 - s_2|^\alpha.$$

→ Dans cette section, il suffit de supposer que  $\Phi \in C_{pol}^1(\mathbb{R})$ .

## Exposant de Hölder global et ponctuel

Soit  $\gamma \in [0, 1]$ . Une fonction  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  appartient à l'espace de Hölder (global)  $C^\gamma([0, 1])$  si :

$$\|u\|_{C^\gamma([0,1])} = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)| + \sup_{0 \leq t_1 < t_2 \leq 1} \frac{|u(t_1) - u(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\gamma} < \infty.$$

### Théorème 1

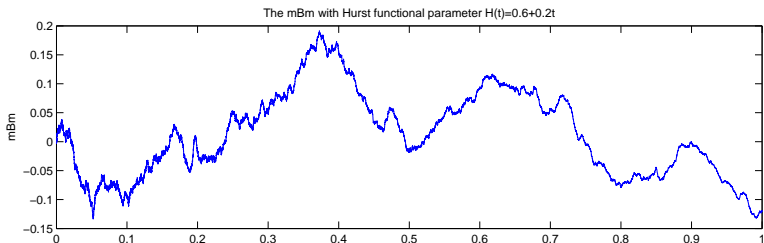
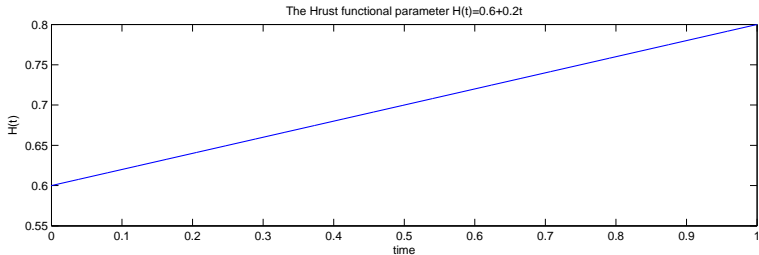
*Il existe une modification de  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$ , qu'on identifie avec  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$ , telle que, avec probabilité 1, pour tout  $\gamma < 1/2$ , les trajectoires de  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$  sont dans l'espace de Hölder  $C^\gamma([0, 1])$ .*

### Théorème 2

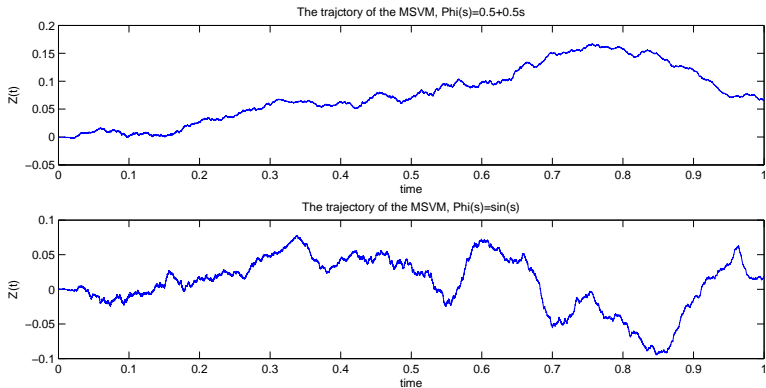
*Si  $\Phi \neq 0$  p.p., alors  $\rho_Z$  l'exposant de Hölder ponctuel du processus  $Z$ , vérifie :*

$$\mathbb{P}(\rho_Z(t_0) = 1/2) = 1, \quad \forall t_0 \in ]0, 1[. \quad (6)$$

Grâce à la représentation en série aléatoire et à l'analyse multirésolution associée à la base de Haar, on peut mettre en place une méthode de simulation récursive des trajectoires du processus  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$ .



# Simulations de trajectoires de mvsm



# Plan

- 1 Introduction et motivations
  - Du mb fractionnaire au mb multifractionnaire
  - Modèle à volatilité stochastique multifractionnaire (mvsm)
  - Mvsm et le cadre classique "signal+bruit"
- 2 Mvsm : régularité de Hölder global et ponctuel
  - Exposant de Hölder global et ponctuel
  - Simulations de trajectoires de mvsm
- 3 Exposant de Hölder ponctuel du mbm caché : estimation et TCL
  - La méthodologie
  - Enoncés des principaux résultats
  - Simulation de l'estimateur

→ Nous avons montré que lorsque le paramètre fonctionnel  $H(\cdot)$  du mbm caché  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  est à valeurs dans  $]1/2, 1[$ , alors, en tout instant  $t_0 \in ]0, 1[$ , l'exposant de Hölder ponctuel  $\rho_Z(t_0)$  du mvsm  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$ , vaut presque sûrement  $1/2$ .

⇒ Il y a donc une perte considérable d'information lorsque, au lieu d'observer  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$ , l'on observe sa version corrompue  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$ ; en effet, contrairement à  $\rho_Z(\cdot)$ , l'exposant de Hölder ponctuel  $\rho_X = H(\cdot)$  de  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  varie d'un instant à l'autre.

→ Est-il possible d'estimer pour tout  $t_0 \in ]0, 1[$ , l'exposant de Hölder ponctuel caché  $H(t_0)$ , à partir des observations  $Z(q/n)$ ,  $q = 0, \dots, n$ ?

→ Nous avons montré que lorsque le paramètre fonctionnel  $H(\cdot)$  du mbm caché  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  est à valeurs dans  $]1/2, 1[$ , alors, en tout instant  $t_0 \in ]0, 1[$ , l'exposant de Hölder ponctuel  $\rho_Z(t_0)$  du mvsm  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$ , vaut presque sûrement  $1/2$ .

⇒ Il y a donc une perte considérable d'information lorsque, au lieu d'observer  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$ , l'on observe sa version corrompue  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$ ; en effet, contrairement à  $\rho_Z(\cdot)$ , l'exposant de Hölder ponctuel  $\rho_X = H(\cdot)$  de  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  varie d'un instant à l'autre.

→ Est-il possible d'estimer pour tout  $t_0 \in ]0, 1[$ , l'exposant de Hölder ponctuel caché  $H(t_0)$ , à partir des observations  $Z(q/n)$ ,  $q = 0, \dots, n$ ?

Nous allons voir que, malgré le fait que la structure de  $H(\cdot)$  est nettement plus complexe que celle de  $\rho_Z(\cdot)$ , la réponse à cette question est quand même positive, sous certaines conditions.

→ Nous avons montré que lorsque le paramètre fonctionnel  $H(\cdot)$  du mbm caché  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  est à valeurs dans  $]1/2, 1[$ , alors, en tout instant  $t_0 \in ]0, 1[$ , l'exposant de Hölder ponctuel  $\rho_Z(t_0)$  du mvsm  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$ , vaut presque sûrement  $1/2$ .

⇒ Il y a donc une perte considérable d'information lorsque, au lieu d'observer  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$ , l'on observe sa version corrompue  $\{Z(t)\}_{t \in [0,1]}$ ; en effet, contrairement à  $\rho_Z(\cdot)$ , l'exposant de Hölder ponctuel  $\rho_X = H(\cdot)$  de  $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  varie d'un instant à l'autre.

→ Est-il possible d'estimer pour tout  $t_0 \in ]0, 1[$ , l'exposant de Hölder ponctuel caché  $H(t_0)$ , à partir des observations  $Z(q/n)$ ,  $q = 0, \dots, n$ ?

Nous allons voir que, malgré le fait que la structure de  $H(\cdot)$  est nettement plus complexe que celle de  $\rho_Z(\cdot)$ , la réponse à cette question est quand même positive, sous certaines conditions.

Nous donnerons également des conditions qui garantissent la normalité asymptotique de notre estimateur.

- Rosenbaum (2008) a étudié la question qui nous préoccupe, dans un cadre où le mbm caché  $X$  est remplacé par un processus  $\tilde{X}$  qui se ramène à un processus gaussien à accroissements stationnaires avec un exposant de Hölder ponctuel  $\tilde{h}$  constant et strictement supérieur à  $1/2$ .
- Au moyen de coefficients d'ondelettes, Rosenbaum (2008) a construit des estimateurs de  $\tilde{h}$  qui convergent en probabilité à la vitesse optimale au sens "minimax".
- Pour estimer  $H(t_0)$  nous utiliserons la méthode des variations quadratiques généralisées localisées autour de  $t_0$ .

# La méthodologie

→ Supposons que pour tout entier  $N$  assez grand, on dispose d'une suite finie  $\{S_{i,N}\}_{i \in \{0, \dots, N\}}$  de variables aléatoires associées aux points  $i/N$  de l'intervalle  $[0, 1]$ .

→ Désignons par  $a = (a_0, \dots, a_p)$  une suite arbitraire de  $\mathbb{R}^{p+1}$  ayant  $M(a) \geq 2$  moments nuls :

$$\sum_{k=0}^p k^l a_k = 0, \text{ pour tout } l = 0, \dots, M(a) - 1 \text{ et } \sum_{k=0}^p k^{M(a)} a_k \neq 0. \quad (7)$$

→  $\Delta_a S_{i,N}$ , l'accroissement généralisé de  $S$  en  $i/N$ , est défini par :

$$\Delta_a S_{i,N} = \sum_{k=0}^p a_k S_{i+k,N}. \quad (8)$$

→ Soit  $(\nu(N))_{N \geq 3}$  une suite arbitraire de réels strictement positifs qui tend vers 0 moins vite que  $(\log N)^2/N$ .

→  $\nu_N(t_0)$ , "le voisinage" d'un point fixé  $t_0 \in ]0, 1[$ , est défini par :

$$\begin{aligned} \nu_N(t_0) &= \left\{ i \in \{0, \dots, N - p - 1\} : |i/N - t_0| \leq \nu(N) \right\} \\ &= \{0, \dots, N - p - 1\} \cap [Nt_0 - N\nu(N), Nt_0 + N\nu(N)]. \end{aligned}$$

→  $V(S; Nt_0 - N\nu(N), Nt_0 + N\nu(N))$ , la variation quadratique généralisée de  $S$ , à l'ordre  $N$ , localisée en  $t_0$ , est définie par :

$$V(S; Nt_0 - N\nu(N), Nt_0 + N\nu(N)) = \sum_{i \in \nu_N(t_0)} (\Delta_a S_{i,N})^2. \quad (9)$$

Pour simplifier les notations, on pose :

$$V_N(S; t_0) = V(S; Nt_0 - N\nu(N), Nt_0 + N\nu(N)).$$

→ Sous certaines conditions sur la suite  $(v(N))_{N \geq 3}$ , Benassi, Cohen et Istas (1998), Coeurjolly (2005) et Bardet et Surgailis (2010), ont pu décrire le comportement de  $V_N(X; t_0)$ , la variation quadratique associée aux vraies valeurs du mbm :  $\{X_{i,N}\}_{i \in \{0, \dots, N\}} = \{X(i/N)\}_{i \in \{0, \dots, N\}}$ .

→ Plus précisément, ils ont montré qu'il existe des constantes déterministes non nulles  $c_1$  et  $c_2$ , telles que :

$$\frac{V_N(X; t_0)}{c_1 v(N) N^{1-2H(t_0)}} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{p.s.} 1 \quad (10)$$

et

$$c_2 (N v(N))^{1/2} \left( \frac{V_N(X; t_0)}{c_1 v(N) N^{1-2H(t_0)}} - 1 \right) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{d} \mathcal{N}(0, 1). \quad (11)$$

On considère le mvsm

$$Z(t) = \int_0^t \Phi(X(s)) dW(s), \quad t \in [0, 1], \quad (12)$$

tel que :

- $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  est un mbm caché dont le paramètre  $H(\cdot)$  est une fonction de classe  $C^2$  à valeurs dans  $]0, 1[$ ;
- $\{X(s)\}_{s \in [0,1]}$  est indépendant du mouvement brownien  $\{W(s)\}_{s \in [0,1]}$ .

On observe :

$$\{Z(0), Z(1/n), \dots, Z(n/n)\}.$$

On pose  $f := \Phi^2 = \Phi \times \Phi$ , on suppose que  $f \in C_{pol}^2(\mathbb{R})$  et  $f' \neq 0$  p.p..

Soit  $N_n = [n^\beta]$ , où  $\beta \in ]0, 1[$  est un paramètre. Pour tout  $i \in \{0, \dots, N_n - 1\}$ , on pose  $j_i := [in/N_n]$  et

$$\widehat{Y}_{i, N_n, n} := N_n \sum_{k=0}^{j_{i+1} - j_i - 1} \left( Z((j_i + k + 1)/n) - Z((j_i + k)/n) \right)^2. \quad (13)$$

On a alors :

$$\widehat{Y}_{i, N_n, n} = \overline{Y}_{i, N_n} + \mathcal{E}_{i, N_n, n}, \quad (14)$$

où

$$\overline{Y}_{i, N_n} = N_n \int_{i/N_n}^{(i+1)/N_n} f(X(s)) ds \quad (15)$$

Notre principale idée : quitte à bien choisir le paramètre  $\beta$ , alors

$V_{N_n}(\widehat{Y}; t_0)$  la variation quadratique associée à  $\widehat{Y}$ , se comporte presque comme  $V_{N_n}(X; t_0)$  la variation quadratique correspondant au mbm  $X$ .

# Enoncés des principaux résultats

Hypothèses sur la suite  $(v(N))_{N \geq 3}$  (dans le cadre de ces hypothèses,  $N$  désigne un entier arbitraire qui n'est pas forcément de la forme  $[n^\beta]$ )

- $(\mathcal{A}_1)$  :  $\sum_{N \geq 3} (Nv(N))^{-2} < \infty$  ;
- $(\mathcal{A}_2)$  :  $v(N) = o((\log N)^{-1})$  ;
- $(\mathcal{A}_3)$  :  $\frac{v(2N)}{v(N)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \tau \in ]0, +\infty[$ .

Remarque : dans le cas où  $N = N_n = [n^\beta]$ , nous aurons besoin de remplacer  $(\mathcal{A}_3)$  par :

- $(\mathcal{A}'_3)$  :  $\frac{v(N_{2n})}{v(N_n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tau' \in ]0, +\infty[$ .

**Théorème 4** (ici  $\{\bar{X}_{i,N}\}_{i=0,\dots,N-1}$  est connu)

Posons  $\hat{H}_{N,t_0}(\bar{X}) = \frac{1}{2} \left( 1 + \log_2(\tau) + \log_2 \left( \frac{V_N(\bar{X}; t_0)}{V_{2N}(\bar{X}; t_0)} \right) \right)$ .

- (i) Supposons  $(\mathcal{A}_2)$  et  $(\mathcal{A}_3)$ , alors  $\hat{H}_{N,t_0}(\bar{X}) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} H(t_0)$ .
- (ii) En outre, lorsque  $v(N) = o(N^{-1/3}(\log N)^{-2/3})$ , alors

$$(Nv(N))^{1/2} \left( \hat{H}_{N,t_0}(\bar{X}) - H(t_0) \right) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{d} \text{(gaussienne centrée)}.$$

**Remarque :** lorsque dans (i) on suppose également  $(\mathcal{A}_1)$ , alors la convergence de l'estimateur devient presque sûre.

**Théorème 5** (ici  $\{\bar{Y}_{i,N}\}_{i=0,\dots,N-1}$  est connu)

Posons  $\hat{H}_{N,t_0}(\bar{Y}) = \frac{1}{2} \left( 1 + \log_2(\tau) + \log_2 \left( \frac{V_N(\bar{Y}; t_0)}{V_{2N}(\bar{Y}; t_0)} \right) \right)$ .

- (i) Supposons  $(\mathcal{A}_2)$  et  $(\mathcal{A}_3)$ , alors  $\hat{H}_{N,t_0}(\bar{Y}) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} H(t_0)$ .
- (ii) En outre, lorsque  $H(t_0) \in ]1/2, 1[$  et il existe  $\eta \geq 0$  tel que  $v(N) = \mathcal{O}(N^{-1/2}(\log N)^\eta)$ , alors

$$(Nv(N))^{1/2} \left( \hat{H}_{N,t_0}(\bar{Y}) - H(t_0) \right) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{d} (\text{gaussienne centrée}).$$

**Remarque :** lorsque dans (i) on suppose également  $(\mathcal{A}_1)$ , alors la convergence de l'estimateur devient presque sûre.

### Théorème 6 (ici uniquement $\{Z(q/n)\}_{q=0,\dots,n}$ est connu)

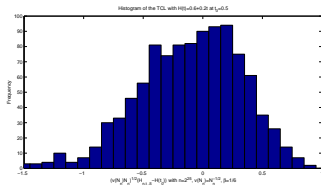
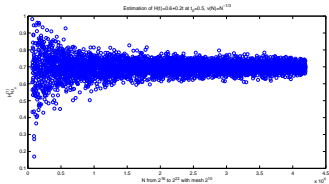
Posons  $\hat{H}_{n,t_0}(\hat{Y}) = \frac{1}{2} \left( 1 + \log_2(\tau') + \log_2 \left( \frac{V_{N_n}(\hat{Y}; t_0)}{V_{N_{2n}}(\hat{Y}; t_0)} \right) \right)$ .

- (i) Supposons  $(\mathcal{A}_2)$ ,  $(\mathcal{A}'_3)$  et  $\beta \in ]0, 1/3]$ , alors  $\hat{H}_{n,t_0}(\hat{Y}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} H(t_0)$ .
- (ii) En outre, lorsque  $H(t_0) \in ]1/2, 1[$ ,  $\beta \in ]0, 1/4]$  et il existe  $\eta \geq 0$  tel que  $v(N) = \mathcal{O}(N^{-1/2}(\log N)^\eta)$ , alors

$$(N_n v(N_n))^{1/2} \left( \hat{H}_{n,t_0}(\hat{Y}) - H(t_0) \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{d}} (\text{gaussienne centrée}).$$

**Remarque :** lorsque dans (i) on suppose également  $(\mathcal{A}_1)$  et  $\beta \in ]0, 1/6]$ , alors la convergence de l'estimateur devient presque sûre.

## Simulation de l'estimateur



## Quelques références.

- [1] Ayache, A. and Lévy Véhel, J. (2004) On the identification of the pointwise Hölder exponent of the generalized multifractional Brownian motion, *Stoch. Proc. Appl.*, 111, 119–156.
- [2] Benassi, A., Cohen, S., Istas, J. and Jaffard, S. (1998) Identification of filtered white noises, *Stoch. Proc. Appl.*, 75, 31–49.
- [3] Gloter, A. and Hoffmann, M. (2004) Stochastic volatility and fractional Brownian motion, *Stoch. Proc. Appl.*, 113, 143–172.
- [4] Rosenbaum, M. (2008) Estimation of the volatility persistence in a discretely observed diffusion model, *Stoch. Proc. Appl.*, 118, 1434–1462.

Merci de votre attention.