# Effet régularisant de l'ajout de bruit dans un système

C. de Raynal P.E, sous la direction de F.Delarue

Université de Nice Sophia-Antipolis, Laboratoire J.A. DIEUDONNE

16 avril 2012

# Présentation du problème

- Regardons le système :

$$dX_t = b(X_t)dt$$

# Présentation du problème

- Regardons le système :

$$dX_t = b(X_t)dt$$

- $b$ Lipschitz : Existence et unicité

# Présentation du problème

- Regardons le système :

$$dX_t = b(X_t)dt$$

- $b$ Lipschitz : Existence et unicité
- $b$ "Sous-Lipschitz" : pas de résultat d'unicité au sens "classique"

# Présentation du problème

- Regardons le système :

$$dX_t = b(X_t)dt$$

- $b$ Lipschitz : Existence et unicité
- $b$ "Sous-Lipschitz" ?

# Présentation du problème

- Regardons le système :

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t$$

- $b$ Lipschitz : Existence et unicité
- $b$ "Sous-Lipschitz"
  - Ajout "microscopique" d'un bruit gaussien.

# Présentation du problème

- Regardons le système :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + (W_t - W_0)$$

- $b$ Lipschitz : Existence et unicité
- $b$ "Sous-Lipschitz"
  - Ajout "microscopique" d'un bruit gaussien.

# Présentation du problème

- Regardons le système :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + (W_t - W_0)$$

- $b$ Lipschitz : Existence et unicité forte (trajectorielle).
- $b$ "Sous-Lipschitz"
  - Ajout "microscopique" d'un bruit gaussien.

# Présentation du problème

- Regardons le système :

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + (W_t - W_0)$$

- $b$ "Sous-Lipschitz"
  - Ajout "microscopique" d'un bruit gaussien.
  - $\Longrightarrow$ Existence et unicité forte pour $b$ Hölder ($b \in \mathbb{L}_p,\ p > d$).

# Présentation du problème

- **Pourquoi l'ajout de bruit permet-il d'affaiblir les conditions de solvabilité ?**

# Présentation du problème

- **Pourquoi l'ajout de bruit permet-il d'affaiblir les conditions de solvabilité ?**

  Lien avec les EDP et l'effet régularisant du noyau de la chaleur.

**Pourquoi des EDPs et des Probabilités ? Comment interpréter l'effet régularisant**

# EDP, Proba et effet régularisant : la formule de Kolmogorov rétrograde

Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

- Solution : $u(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$ .

# EDP, Proba et effet régularisant : la formule de Kolmogorov rétrograde

Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

- Solution : $u(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$ .
- Formule d'Itô :

# EDP, Proba et effet régularisant : la formule de Kolmogorov rétrograde

Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{array} \right.$$

- Solution : $u(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$ .
- Formule d'Itô : $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

# EDP, Proba et effet régularisant : la formule de Kolmogorov rétrograde

Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

- Solution : $u(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$ .
- Formule d'Itô : $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$$u(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(x+B_t)]$$

- $\implies$ La solution $u$ au point $(t,x)$ s'exprime comme la moyenne de la condition initiale en les valeurs prises par un mouvement brownien en $t$, partant de $x$ en 0.

# EDP, Proba et effet régularisant : la formule de Kolmogorov rétrograde

Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

- $f$ "seulement" continue bornée.
- Solution : $u(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$ est $C^\infty$ !.
- Formule d'Itô : $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$$u(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(x + B_t)]$$

- $\Longrightarrow$ La solution $u$ au point $(t,x)$ s'exprime comme la moyenne de la condition initiale en les valeurs prises par un mouvement brownien en $t$, partant de $x$ en 0.

# EDP, Proba et effet régularisant : la formule de Kolmogorov rétrograde

Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

- $f$ "seulement" continue bornée.
- Solution : $u(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$ est $C^\infty$ !.
- Formule d'Itô : $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$$u(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(x+B_t)]$$

- $\Longrightarrow$ La solution $u$ au point $(t,x)$ s'exprime comme la moyenne de la condition initiale en les valeurs prises par un mouvement brownien en $t$, partant de $x$ en 0.

# EDP, Proba et effet régularisant : la formule de Kolmogorov rétrograde

Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

- $f$ "seulement" continue bornée.
- Solution : $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$ est $C^\infty$ !.
- Formule d'Itô : $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

$$u(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(x+B_t)]$$

- $\Longrightarrow$ La solution $u$ au point $(t,x)$ s'exprime comme la moyenne de la condition initiale en les valeurs prises par un mouvement brownien en $t$, partant de $x$ en 0.

# EDP, Proba et effet régularisant : la formule de Kolmogorov rétrograde

Équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

- $f$ "seulement" continue bornée.
- Solution : $u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi t}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$ est $C^\infty$ !.
- Formule d'Itô :

$$u(t,x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(x+B_t)]$$

- $\Longrightarrow$ La solution $u$ au point $(t,x)$ s'exprime comme la moyenne de la condition initiale en les valeurs prises par un mouvement brownien en $t$, partant de $x$ en 0.
- **Le Brownien visite suffisamment l'espace tout autour de $x$ pour mélanger les valeurs de $u$... et donc de la régulariser**

# Retour à notre problème

- Soit $T > 0$, on s'intéresse sur $[0, T]$ à :

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t$$

# Retour à notre problème

- Soit $T > 0$, on s'intéresse sur $[0, T]$ à :

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t$$

- Équation aux dérivées partielles associée à ce système :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b(x)\partial_x u(t,x) + \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = \phi(t,x) \\ u(T,x) = f(x) \end{cases}$$

# Retour à notre problème

- Soit $T > 0$, on s'intéresse sur $[0, T]$ à :

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t$$

- Équation aux dérivées partielles associée à ce système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u(t,x) + b(x)\partial_x u(t,x) + \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = \phi(t,x) \\ u(T,x) = f(x) \end{array} \right.$$

- Si $\phi$ et $f$ Hölder : il existe une unique solution $u \in C^{1,2}$

# Retour à notre problème

- Soit $T > 0$, on s'intéresse sur $[0, T]$ à :

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t$$

- Équation aux dérivées partielles associée à ce système :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b(x)\partial_x u(t,x) + \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = b(x) \\ u(T,x) = 0 \end{cases}$$

- $b$ Hölder : En temps "suffisamment" petit il existe une unique solution $u \in C^{1,2}$ et :

$$||u||_{\infty,\mathrm{Lip}} \leq C_T$$
$$||\partial_x u||_{\infty,\mathrm{Lip}} \leq C'_T$$

où $C_T, C'_T \to 0$ quand $T \to 0$.

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP

$$
\begin{aligned}
& u(t, X_t) - X_t = \\
& \underbrace{\int_0^t \left[ \partial_t u(s, X_s) + b(X_s)\partial_x u(s, X_s) + \frac{1}{2}\Delta u(s, X_s) \right] ds} \\
& \quad - \int_0^t b(X_s) ds \\
& \quad\quad + u(0, x_0) - x_0 + \int_0^t \left[ \partial_x u(s, X_s) - \mathbf{1} \right] dW_s,
\end{aligned}
$$

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP

$$
\begin{aligned}
& u(t, X_t) - X_t = \\
& \underbrace{\int_0^t \left[ \partial_t u(s, X_s) + b(X_s)\partial_x u(s, X_s) + \frac{1}{2}\Delta u(s, X_s) \right] ds}_{= \int_0^t b(X_s) ds} \\
& \quad - \int_0^t b(X_s) ds \\
& \qquad + u(0, x_0) - x_0 + \int_0^t \left[ \partial_x u(s, X_s) - \mathbf{1} \right] dW_s,
\end{aligned}
$$

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP

$$u(t, X_t) - X_t =$$

$$u(0, x_0) - x_0 + \int_0^t \left[\partial_x u(s, X_s) - 1\right] dW_s,$$

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP

$$u(t, X_t) - X_t =$$

$$u(0, x_0) - x_0 + \int_0^t [\partial_x u(s, X_s) - 1] \, dW_s,$$

$$u(t, Y_t) - Y_t = u(0, x_0) - x_0 + \int_0^t [\partial_x u(s, Y_s) - 1] \, dW_s.$$

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP

• On prend le carré de la différence

$$
\begin{aligned}
|X_t - Y_t|^2 &\leq C|u(t, X_t) - u(t, Y_t)|^2 \\
&+C\left| \int_0^t \partial_x u(s, X_s) - \partial_x u(s, Y_s) dW_s \right|^2
\end{aligned}
$$

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP

• On prend le carré de la différence ; On prend le supremum sur $t$

$$\sup_{t \in [0,T]} |X_t - Y_t|^2 \leq C \sup_{t \in [0,T]} |u(t, X_t) - u(t, Y_t)|^2$$
$$+ C \sup_{t \in [0,T]} \left| \int_0^t \partial_x u(s, X_s) - \partial_x u(s, Y_s) dW_s \right|^2$$

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP

• On prend le carré de la différence ; On prend le supremum sur $t$ ; On prend l'espérance

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} |X_t - Y_t|^2 \leq C \sup_{t \in [0,T]} \mathbb{E}|u(t, X_t) - u(t, Y_t)|^2$$
$$+ C\mathbb{E} \int_0^T |\partial_x u(s, X_s) - \partial_x u(s, Y_s)|^2 ds$$

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP
  $\Longrightarrow$ $u$ et $\partial_x u$ sont $C_T$ et $C'_T$ Lipschitz .

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |X_t - Y_t|^2 \leq C \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|u(t, X_t) - u(t, Y_t)|^2$$
$$+ C\mathbb{E} \int_0^T |\partial_x u(s, X_s) - \partial_x u(s, Y_s)|^2 ds$$

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP
  $\Longrightarrow$ $u$ et $\partial_x u$ sont $C_T$ et $C'_T$ Lipschitz .

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} |X_t - Y_t|^2 \leq C(T) \left\{ \mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} |X_t - Y_t|^2 + \mathbb{E} \int_0^T |X_s - Y_s|^2 ds \right\},$$

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP
  $\Longrightarrow$ $u$ et $\partial_x u$ sont $C_T$ et $C'_T$ Lipschitz . Et, $C_T, C'_T \rightarrow 0$ avec $T$.

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |X_t - Y_t|^2 \leq C(T) \left\{ \mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |X_t - Y_t|^2 + \mathbb{E} \int_0^T |X_s - Y_s|^2 ds \right\},$$

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP
  $\Longrightarrow$ $u$ et $\partial_x u$ sont $C_T$ et $C'_T$ Lipschitz . Et, $C_T, C'_T \rightarrow 0$ avec $T$.

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} |X_t - Y_t|^2 \leq C(T) \left\{ \mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} |X_t - Y_t|^2 + \mathbb{E} \int_0^T |X_s - Y_s|^2 ds \right\},$$

- Puis on prend $T$ “suffisamment petit”

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP
  $\Longrightarrow$ $u$ et $\partial_x u$ sont $C_T$ et $C'_T$ Lipschitz . Et, $C_T, C'_T \rightarrow 0$ avec $T$.

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} |X_t - Y_t|^2 \leq 0 \qquad ,$$

- Puis on prend $T$ “suffisamment petit”

- $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ deux solution avec la même condition initiale $x_0$.
- $T$ suffisamment petit $\rightarrow$ On applique La formule d'Itô pour $u(t, X_t) - X_t$ et $u(t, Y_t) - Y_t$ :
- $u$ : solution de l'EDP
  $\Longrightarrow$ $u$ et $\partial_x u$ sont $C_T$ et $C'_T$ Lipschitz . Et, $C_T, C'_T \rightarrow 0$ avec $T$.

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} |X_t - Y_t|^2 \leq 0 \qquad ,$$

- Puis on prend $T$ "suffisamment petit"
- Il suffit d'itérer ce raisonnement sur une partition suffisamment petite de l'intervalle.

# En bref :

- Il y a unicité forte pour :

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t$$

En remplaçant le drift "$b$" par la solution "$u$" de l'EDP (associée à la dynamique aléatoire de $X$) dont le terme source est le drift :

**grâce à l'effet régularisant du noyau de la chaleur, on retrouve le caractère Lipschitzien sur les petits intervalles.**

# En bref :

- Il y a unicité forte pour :

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t$$

En remplaçant le drift "$b$" par la solution "$u$" de l'EDP (associée à la dynamique aléatoire de $X$) dont le terme source est le drift :

**grâce à l'effet régularisant du noyau de la chaleur, on retrouve le caractère Lipschitzien sur les petits intervalles.**

- Quid du cas ou le bruit dégénère ?

# En bref :

- Il y a unicité forte pour :

$$dX_t = b(X_t)dt + dW_t$$

En remplaçant le drift "$b$" par la solution "$u$" de l'EDP (associée à la dynamique aléatoire de $X$) dont le terme source est le drift :

**grâce à l'effet régularisant du noyau de la chaleur, on retrouve le caractère Lipschitzien sur les petits intervalles.**

- Quid du cas ou le bruit dégénère ?
  - On s'attend à une perte de l'effet régularisant... dans quelle mesure ?

# Le cas dégénéré

EDO à drift aléatoire :

$$dY_t = b(t, W_t, Y_t)dt$$

- La composante est “complètement dégénérée”

# Le cas dégénéré

Système dégénéré :

$$dX_t = dW_t$$
$$dY_t = b(t, X_t, Y_t)dt$$

- La seconde composante est “complètement dégénérée” Le seul bruit reçu provient de la première composante

# Le cas dégénéré

Système dégénéré :

$$dX_t = dW_t$$
$$dY_t = b(t, X_t, Y_t)dt$$

- $b$ est continus en temps.

# Le cas dégénéré

Système dégénéré :

$$dX_t = dW_t$$
$$dY_t = b(t, X_t, Y_t)dt$$

- $b$ est continus en temps.
- $b$ est dérivable par rapport à $x_1$ à dérivée uniformément non-dégénérée, et $2/3$-Hölder par rapport à $x_2$.

# Le cas dégénéré

Système dégénéré :

$$\begin{aligned} dX_t &= dW_t \\ dY_t &= b(t, X_t, Y_t)dt \end{aligned}$$

- $b$ est continus en temps.
- $b$ est dérivable par rapport à $x_1$ à dérivée uniformément non-dégénérée, et 2/3-Hölder par rapport à $x_2$.

Il y a à nouveau unicité forte.

# Le cas dégénéré

Système dégénéré :

$$dX_t = dW_t$$
$$dY_t = b(t, X_t, Y_t)dt$$

- $b$ est continus en temps.
- $b$ est dérivable par rapport à $x_1$ à dérivée uniformément non-dégénérée, et 2/3-Hölder par rapport à $x_2$.
  - La non-dégénérescence de la dérivée de $b$ assure la transmission de suffisamment de bruit de la première composante dans la seconde (penser à un dvp de Taylor)

Il y a à nouveau unicité forte.

# Le cas dégénéré

Système dégénéré :

$$dX_t = dW_t$$
$$dY_t = b(t, X_t, Y_t)dt$$

- $b$ est continus en temps.
- $b$ est dérivable par rapport à $x_1$ à dérivée uniformément non-dégénérée, et 2/3-Hölder par rapport à $x_2$.
    - La non-dégénérescence de la dérivée de $b$ assure la transmission de suffisamment de bruit de la première composante dans la seconde (penser à un dvp de Taylor)
    - La régularité 2/3-Hölder semble être *le prix à payer* pour la dégénérescence

Il y a à nouveau unicité forte.