



Peacocks et martingales associées

Antoine Marie Bogso

Université de Lorraine-Institut Henri Poincaré Nancy I

16 avril 2012

Outline

- 1 Introduction
 - Définition d'un peacock
 - Motivations
- 2 Une généralisation de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
 - Idée générale
 - Monotonie conditionnelle
 - Extension de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
- 3 Une autre généralisation de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
- 4 Références

Outline

- 1 Introduction
 - Définition d'un peacock
 - Motivations
- 2 Une généralisation de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
 - Idée générale
 - Monotonie conditionnelle
 - Extension de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
- 3 Une autre généralisation de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
- 4 Références

Définition d'un peacock

Définition

On appelle **peacock** un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles, intégrable, i.e.

$$\forall t > 0, \mathbb{E}[|X_t|] < \infty,$$

et tel que pour toute fonction convexe $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{E}[\psi(X_t)] \in]-\infty, +\infty] \text{ est croissante.}$$

Remarque

Notons que :

- Si $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock, alors $\mathbb{E}[X_t]$ ne dépend pas de t .
- Le mot "peacock" est inspiré de l'abréviation **P.C.O.C** du terme **Processus Croissant l'Ordre Convexe**.
- En anglais "peacock" signifie "paon".

Définition d'un peacock

Définition

On appelle **peacock** un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles, intégrable, i.e.

$$\forall t > 0, \mathbb{E}[|X_t|] < \infty,$$

et tel que pour toute fonction convexe $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{E}[\psi(X_t)] \in]-\infty, +\infty] \text{ est croissante.}$$

Remarque

Notons que :

- Si $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock, alors $\mathbb{E}[X_t]$ ne dépend pas de t .
- Le mot "peacock" est inspiré de l'abréviation **P.C.O.C** du terme **Processus Croissant l'Ordre Convexe**.
- En anglais "peacock" signifie "paon".

Définition d'un peacock

Définition

On appelle **peacock** un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles, intégrable, i.e.

$$\forall t > 0, \mathbb{E}[|X_t|] < \infty,$$

et tel que pour toute fonction convexe $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{E}[\psi(X_t)] \in]-\infty, +\infty] \text{ est croissante.}$$

Remarque

Notons que :

- Si $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock, alors $\mathbb{E}[X_t]$ ne dépend pas de t .
- Le mot "peacock" est inspiré de l'abréviation **P.C.O.C** du terme **Processus Croissant l'Ordre Convexe**.
- En anglais "peacock" signifie "paon".

Définition d'un peacock

Définition

On appelle **peacock** un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles, intégrable, i.e.

$$\forall t > 0, \mathbb{E}[|X_t|] < \infty,$$

et tel que pour toute fonction convexe $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{E}[\psi(X_t)] \in]-\infty, +\infty] \text{ est croissante.}$$

Remarque

Notons que :

- Si $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock, alors $\mathbb{E}[X_t]$ ne dépend pas de t .
- Le mot "peacock" est inspiré de l'abréviation **P.C.O.C** du terme **Processus Croissant l'Ordre Convexe**.
- En anglais "peacock" signifie "paon".

Comment prouver la propriété de peacock ?

Définition

On désigne par \mathbf{C} la classe des fonctions convexes $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 , et telles que ψ'' est à support compact.

Remarque

Si $\psi \in \mathbf{C}$, ψ' est borné, et il existe $k_1, k_2 \geq 0$ tels que

$$|\psi(x)| \leq k_1 + k_2|x| \quad (1)$$

Théorème

Un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles intégrable est un peacock si et seulement si, pour tout $\psi \in \mathbf{C}$, et pour tous $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbb{E}[\psi(X_s)] \leq \mathbb{E}[\psi(X_t)]. \quad (2)$$

Exemples

Voici quelques exemples simples.

- Toute martingale est un peacock.
- Si X est une v.a. réelle et si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}[|X| \varphi'(sX)] < \infty \text{ et } \mathbb{E}[X \varphi'(tX)] = 0,$$

alors

$(\varphi(tX), t \geq 0)$ est un peacock.

En particulier, si X une v.a. intégrable et centré, alors $(tX, t \geq 0)$ est un peacock.

- Si X est une v.a. telle que $\mathbb{E}[e^{tX}] < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors

$\left(\frac{e^{tX}}{\mathbb{E}[e^{tX}]}, t \geq 0 \right)$ est un peacock.

Exemples

Voici quelques exemples simples.

- Toute martingale est un peacock.
- Si X est une v.a. réelle et si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}[|X| \varphi'(sX)] < \infty \text{ et } \mathbb{E}[X \varphi'(tX)] = 0,$$

alors

$(\varphi(tX), t \geq 0)$ est un peacock.

En particulier, si X une v.a. intégrable et centré, alors $(tX, t \geq 0)$ est un peacock.

- Si X est une v.a. telle que $\mathbb{E}[e^{tX}] < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors

$\left(\frac{e^{tX}}{\mathbb{E}[e^{tX}]}, t \geq 0 \right)$ est un peacock.

Exemples

Voici quelques exemples simples.

- Toute martingale est un peacock.
- Si X est une v.a. réelle et si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}[|X| \varphi'(sX)] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X \varphi'(tX)] = 0,$$

alors

$(\varphi(tX), t \geq 0)$ est un peacock.

En particulier, si X une v.a. intégrable et centré, alors $(tX, t \geq 0)$ est un peacock.

- Si X est une v.a. telle que $\mathbb{E}[e^{tX}] < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors

$\left(\frac{e^{tX}}{\mathbb{E}[e^{tX}]}, t \geq 0 \right)$ est un peacock.

Exemples

Voici quelques exemples simples.

- Toute martingale est un peacock.
- Si X est une v.a. réelle et si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}[|X|\varphi'(sX)] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X\varphi'(tX)] = 0,$$

alors

$(\varphi(tX), t \geq 0)$ est un peacock.

En particulier, si X une v.a. intégrable et centré, alors $(tX, t \geq 0)$ est un peacock.

- Si X est une v.a. telle que $\mathbb{E}[e^{tX}] < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors

$\left(\frac{e^{tX}}{\mathbb{E}[e^{tX}]}, t \geq 0 \right)$ est un peacock.

Le Théorème de Kellerer

Définition

- Deux processus $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ (éventuellement définis sur des espaces de probabilité différents) sont dits **associés** si

$$\forall t \geq 0, X_t \stackrel{(loi)}{=} Y_t.$$

- Un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles est une **1-martingale** s'il existe une martingale $(M_t, t \geq 0)$ associée à X .

Théorème (Kellerer, 1972)

Un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles est un peacock si et seulement si c'est une 1-martingale

L'exemple de Carr-Ewald-Xiao

Théorème (Carr-Ewald-Xiao, 2008)

Si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard issu de 0, alors

$$\left(N_t := \frac{1}{t} \int_0^t \exp\left(B_s - \frac{s}{2}\right) ds, t \geq 0 \right) \text{ est un peacock. (CEX08)}$$

Théorème (Baker-Yor, 2009)

Soit $(W_{s,t}; s \geq 0, t \geq 0)$ le drap brownien standard.

- Le processus

$$\left(M_t = \int_0^1 \exp\left(W_{u,t} - \frac{ut}{2}\right) du, t \geq 0 \right)$$

est une martingale par rapport à la filtration

$(\mathcal{G}_t := \sigma\{W_{u,r}; u \geq 0, r \leq t\}, t \geq 0)$.

- $(N_t, t \geq 0)$ et $(M_t, t \geq 0)$ sont associés.

Outline

- 1 Introduction
 - Définition d'un peacock
 - Motivations
- 2 Une généralisation de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
 - Idée générale
 - Monotonie conditionnelle
 - Extension de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
- 3 Une autre généralisation de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
- 4 Références

Idée générale

- Notons qu'après le changement de variable $s = t\lambda$ dans (CEX08),

$$N_t := \int_0^1 e^{B_{t\lambda} - \frac{t\lambda}{2}} d\lambda \stackrel{\text{(loi)}}{=} \int_0^1 e^{\sqrt{t}B_\lambda - \frac{t\lambda}{2}} d\lambda. \quad (3)$$

Ainsi :

$$\left(A_t := \int \frac{e^{\sqrt{t}B_\lambda}}{\mathbb{E}[e^{\sqrt{t}B_\lambda}]} 1_{[0,1]}(\lambda) d\lambda, t \geq 0 \right) \text{ est un peacock.}$$

- Nous souhaitons généraliser (CEX08) en donnant des conditions suffisantes sur le processus $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ pour que, pour toute mesure positive finie ν sur \mathbb{R}_+ ,

$$\left(A_t^{(\nu)} := \int \frac{e^{tX_\lambda}}{\mathbb{E}[e^{tX_\lambda}]} \nu(d\lambda), t \geq 0 \right) \text{ soit un peacock.}$$

Idée générale

- Notons qu'après le changement de variable $s = t\lambda$ dans (CEX08),

$$N_t := \int_0^1 e^{B_{t\lambda} - \frac{t\lambda}{2}} d\lambda \stackrel{\text{(loi)}}{=} \int_0^1 e^{\sqrt{t}B_\lambda - \frac{t\lambda}{2}} d\lambda. \quad (3)$$

Ainsi :

$$\left(A_t := \int \frac{e^{\sqrt{t}B_\lambda}}{\mathbb{E}[e^{\sqrt{t}B_\lambda}]} 1_{[0,1]}(\lambda) d\lambda, t \geq 0 \right) \text{ est un peacock.}$$

- Nous souhaitons généraliser (CEX08) en donnant des conditions suffisantes sur le processus $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ pour que, pour toute mesure positive finie ν sur \mathbb{R}_+ ,

$$\left(A_t^{(\nu)} := \int \frac{e^{tX_\lambda}}{\mathbb{E}[e^{tX_\lambda}]} \nu(d\lambda), t \geq 0 \right) \text{ soit un peacock.}$$

Idée générale

- Notons qu'après le changement de variable $s = t\lambda$ dans (CEX08),

$$N_t := \int_0^1 e^{B_{t\lambda} - \frac{t\lambda}{2}} d\lambda \stackrel{\text{(loi)}}{=} \int_0^1 e^{\sqrt{t}B_\lambda - \frac{t\lambda}{2}} d\lambda. \quad (3)$$

Ainsi :

$$\left(A_t := \int \frac{e^{\sqrt{t}B_\lambda}}{\mathbb{E} [e^{\sqrt{t}B_\lambda}]} \mathbf{1}_{[0,1]}(\lambda) d\lambda, t \geq 0 \right) \text{ est un peacock.}$$

- Nous souhaitons généraliser (CEX08) en donnant des conditions suffisantes sur le processus $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ pour que, pour toute mesure positive finie ν sur \mathbb{R}_+ ,

$$\left(A_t^{(\nu)} := \int \frac{e^{tX_\lambda}}{\mathbb{E} [e^{tX_\lambda}]} \nu(d\lambda), t \geq 0 \right) \text{ soit un peacock.}$$

Idee générale

- Il suffit, par approximation, de trouver des conditions sur le processus $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ qui assurent que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, tous $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, et tous $a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$:

$$\left(A_t := \sum_{i=1}^n a_i e^{tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t)}, t \geq 0 \right) \text{ soit un peacock,}$$

où $h_{\lambda_i}(t) := \log \mathbb{E} [e^{tX_{\lambda_i}}]$.

- Supposons que, pour tous $t, \lambda \geq 0$, $\mathbb{E} [e^{tX_\lambda}] < \infty$. Alors, pour tout $\psi \in \mathbf{C}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}[\psi(A_t)] = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E} \left[\phi_i(X_{\lambda_i})(X_{\lambda_i} - h'_{\lambda_i}(t)) e^{tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t)} \right], \quad (4)$$

où $\phi_i(z) = \mathbb{E}[\psi'(A_t) | X_{\lambda_i} = z]$.

Idee générale

- Il suffit, par approximation, de trouver des conditions sur le processus $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ qui assurent que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, tous $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, et tous $a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$:

$$\left(A_t := \sum_{i=1}^n a_i e^{tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t)}, t \geq 0 \right) \text{ soit un peacock,}$$

où $h_{\lambda_i}(t) := \log \mathbb{E} [e^{tX_{\lambda_i}}]$.

- Supposons que, pour tous $t, \lambda \geq 0$, $\mathbb{E} [e^{tX_\lambda}] < \infty$. Alors, pour tout $\psi \in \mathbf{C}$,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}[\psi(A_t)] = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E} \left[\phi_i(X_{\lambda_i})(X_{\lambda_i} - h'_{\lambda_i}(t)) e^{tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t)} \right], \quad (4)$$

où $\phi_i(z) = \mathbb{E}[\psi'(A_t) | X_{\lambda_i} = z]$.

Monotonie conditionnelle.

Définition

Un processus $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ à valeurs réelles est dit **conditionnellement monotone (MC)** si, pour tout $x \in I$, tout $n \geq 2$, tout $i \in \{1, \dots, n\}$, tout $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ et toute fonction borélienne bornée $\phi : I^n \rightarrow \mathbb{R}$ croissante (resp. décroissante) en chacun de ses arguments :

$$\left. \begin{array}{l} \phi_i : z \mapsto \mathbb{E}[\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}) | X_{\lambda_i} = z] \\ \text{est une fonction croissante (resp. décroissante).} \end{array} \right\} \quad (\text{MC})$$

Exemple

Comme exemple simple de processus conditionnellement monotone, nous avons le processus $(\theta(tX), t \geq 0)$, où X est une v.a réelle, et $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

Un résultat important.

Théorème (B.-Profeta-Royette, 2011)

Soit $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ un processus continu à droite qui satisfait (MC). On suppose que, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}_+$, et pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[\exp(t \sup_{\lambda \in K} X_\lambda)] < \infty$ et $\inf_{\lambda \in K} \mathbb{E}[\exp(tX_\lambda)] > 0$.

Alors, pour toute mesure positive finie ν sur \mathbb{R}_+ ,

$$\left(A_t^{(\nu)} := \int_0^\infty \frac{e^{tX_\lambda}}{\mathbb{E}[e^{tX_\lambda}]} \nu(d\lambda), t \geq 0 \right) \text{ est un peacock.} \quad (\text{BPR})$$

Corollaire

Si X est une v.a. telle que $\mathbb{E}[e^{tX}] < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors

$$\left(A_t^{(\nu)} := \int_0^\infty \frac{e^{t\lambda X}}{\mathbb{E}[e^{t\lambda X}]} \nu(d\lambda), t \geq 0 \right) \text{ est un peacock.}$$

Notion de positivité totale

Définition

- On dit que la fonction de transition $P_{\eta,\zeta}(x, dy)$ d'un processus de Markov $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} est totalement positive d'ordre 2 (TP₂) si, pour tous $0 \leq \eta < \zeta$, tous $x_1 < x_2$, et pour tous boréliens $E_1 < E_2$ de I (i.e. $y_1 < y_2$ pour tous $y_1 \in E_1, y_2 \in E_2$),

$$\det \begin{pmatrix} P_{\eta,\zeta}(x_1, E_1) & P_{\eta,\zeta}(x_1, E_2) \\ P_{\eta,\zeta}(x_2, E_1) & P_{\eta,\zeta}(x_2, E_2) \end{pmatrix} \geq 0. \quad (\text{TP}_2)$$

- En particulier, si $P_{\eta,\zeta}(x, dy) = p_{\eta,\zeta}(x, y)dy$, où $p_{\eta,\zeta}(x, \cdot)$ est continue pour tout x , alors (TP₂) équivaut à :

$$\det \begin{pmatrix} p_{\eta,\zeta}(x_1, y_1) & p_{\eta,\zeta}(x_1, y_2) \\ p_{\eta,\zeta}(x_2, y_1) & p_{\eta,\zeta}(x_2, y_2) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Notion de positivité totale

Définition

- On dit que la fonction de transition $P_{\eta,\zeta}(x, dy)$ d'un processus de Markov $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} est totalement positive d'ordre 2 (TP₂) si, pour tous $0 \leq \eta < \zeta$, tous $x_1 < x_2$, et pour tous boréliens $E_1 < E_2$ de I (i.e. $y_1 < y_2$ pour tous $y_1 \in E_1, y_2 \in E_2$),

$$\det \begin{pmatrix} P_{\eta,\zeta}(x_1, E_1) & P_{\eta,\zeta}(x_1, E_2) \\ P_{\eta,\zeta}(x_2, E_1) & P_{\eta,\zeta}(x_2, E_2) \end{pmatrix} \geq 0. \quad (\text{TP}_2)$$

- En particulier, si $P_{\eta,\zeta}(x, dy) = p_{\eta,\zeta}(x, y)dy$, où $p_{\eta,\zeta}(x, \cdot)$ est continue pour tout x , alors (TP₂) équivaut à :

$$\det \begin{pmatrix} p_{\eta,\zeta}(x_1, y_1) & p_{\eta,\zeta}(x_1, y_2) \\ p_{\eta,\zeta}(x_2, y_1) & p_{\eta,\zeta}(x_2, y_2) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Notion de positivité totale

Définition

- On dit que la fonction de transition $P_{\eta,\zeta}(x, dy)$ d'un processus de Markov $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} est totalement positive d'ordre 2 (TP_2) si, pour tous $0 \leq \eta < \zeta$, tous $x_1 < x_2$, et pour tous boréliens $E_1 < E_2$ de I (i.e. $y_1 < y_2$ pour tous $y_1 \in E_1, y_2 \in E_2$),

$$\det \begin{pmatrix} P_{\eta,\zeta}(x_1, E_1) & P_{\eta,\zeta}(x_1, E_2) \\ P_{\eta,\zeta}(x_2, E_1) & P_{\eta,\zeta}(x_2, E_2) \end{pmatrix} \geq 0. \quad (TP_2)$$

- En particulier, si $P_{\eta,\zeta}(x, dy) = p_{\eta,\zeta}(x, y)dy$, où $p_{\eta,\zeta}(x, \cdot)$ est continue pour tout x , alors (TP_2) équivaut à :

$$\det \begin{pmatrix} p_{\eta,\zeta}(x_1, y_1) & p_{\eta,\zeta}(x_1, y_2) \\ p_{\eta,\zeta}(x_2, y_1) & p_{\eta,\zeta}(x_2, y_2) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Notion de positivité totale

Lemme (B., 2012)

Soit $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ un processus de Markov à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} , dont la fonction de transition $P_{\zeta, \eta}(x, dy)$ est TP_2 et absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue), i.e.

$$P_{\eta, \zeta}(x, dy) = p_{\eta, \zeta}(x, y) dy.$$

Alors $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ est conditionnellement monotone.

Exemple (Karlin, 1964)

- Les processus à accroissements indépendants et log-concaves,
- Les processus de naissance et de mort,
- Les diffusions homogènes,
- Les ponts de diffusion homogène.

Notion de positivité totale

Lemme (B., 2012)

Soit $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ un processus de Markov à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} , dont la fonction de transition $P_{\zeta, \eta}(x, dy)$ est TP_2 et absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue), i.e.

$$P_{\eta, \zeta}(x, dy) = p_{\eta, \zeta}(x, y) dy.$$

Alors $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ est conditionnellement monotone.

Exemple (Karlin, 1964)

- Les processus à accroissements indépendants et log-concaves,
- Les processus de naissance et de mort,
- Les diffusions homogènes,
- Les ponts de diffusion homogène.

Notion de positivité totale

Lemme (B., 2012)

Soit $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ un processus de Markov à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} , dont la fonction de transition $P_{\zeta, \eta}(x, dy)$ est TP_2 et absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue), i.e.

$$P_{\eta, \zeta}(x, dy) = p_{\eta, \zeta}(x, y) dy.$$

Alors $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ est conditionnellement monotone.

Exemple (Karlin, 1964)

- Les processus à accroissements indépendants et log-concaves,
- Les processus de naissance et de mort,
- Les diffusions homogènes,
- Les ponts de diffusion homogène.

Notion de positivité totale

Lemme (B., 2012)

Soit $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ un processus de Markov à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} , dont la fonction de transition $P_{\zeta, \eta}(x, dy)$ est TP_2 et absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue), i.e.

$$P_{\eta, \zeta}(x, dy) = p_{\eta, \zeta}(x, y) dy.$$

Alors $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ est conditionnellement monotone.

Exemple (Karlin, 1964)

- Les processus à accroissements indépendants et log-concaves,
- Les processus de naissance et de mort,
- Les diffusions homogènes,
- Les ponts de diffusion homogène.

Notion de positivité totale

Lemme (B., 2012)

Soit $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ un processus de Markov à valeurs dans un intervalle I de \mathbb{R} , dont la fonction de transition $P_{\zeta, \eta}(x, dy)$ est TP_2 et absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue), i.e.

$$P_{\eta, \zeta}(x, dy) = p_{\eta, \zeta}(x, y) dy.$$

Alors $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ est conditionnellement monotone.

Exemple (Karlin, 1964)

- Les processus à accroissements indépendants et log-concaves,
- Les processus de naissance et de mort,
- Les diffusions homogènes,
- Les ponts de diffusion homogène.

Extension de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao.

Corollaire (B., 2012)

Soit $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ un processus de Markov à valeurs dans \mathbb{R} , continu à droite, et tel que, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}_+$, et pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}[\exp(t \sup_{\lambda \in K} X_\lambda)] < \infty \text{ et } \inf_{\lambda \in K} \mathbb{E}[\exp(tX_\lambda)] > 0.$$

On suppose que sa fonction $P_{\eta, \zeta}(x, dy)$ de transition est TP_2 , et que :

$$P_{\eta, \zeta}(x, dy) = p_{\eta, \zeta}(x, y) dy,$$

où $p_{\eta, \zeta}$ est continue.

Alors,

$$\left(A_t^\nu := \int_0^\infty \frac{e^{tX_\lambda}}{\mathbb{E}[e^{tX_\lambda}]} \nu(d\lambda), t \geq 0 \right) \text{ est un peacock.}$$

Outline

- 1 Introduction
 - Définition d'un peacock
 - Motivations
- 2 Une généralisation de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
 - Idée générale
 - Monotonie conditionnelle
 - Extension de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
- 3 Une autre généralisation de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
- 4 Références

idée générale

- Observons que $(e^{B_t - \frac{t}{2}}, t \geq 0)$ est une martingale. Une question naturelle est donc de savoir si, pour toute martingale $(M_n, n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\left(Q_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_k, t \geq 0 \right) \text{ est un peacock.}$$

- Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\psi \in \mathbf{C}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi(Q_{n+1})] - \mathbb{E}[\psi(Q_n)] &\geq \mathbb{E}[\psi'(Q_n)(Q_{n+1} - Q_n)] \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\psi'(Q_n)(M_{n+1} - M_k)] \geq 0, \end{aligned}$$

car $(M_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est une martingale et ψ' est croissante.

idée générale

- Observons que $(e^{B_t - \frac{t}{2}}, t \geq 0)$ est une martingale. Une question naturelle est donc de savoir si, pour toute martingale $(M_n, n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\left(Q_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_k, t \geq 0 \right) \text{ est un peacock.}$$

- Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\psi \in \mathbf{C}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi(Q_{n+1})] - \mathbb{E}[\psi(Q_n)] &\geq \mathbb{E}[\psi'(Q_n)(Q_{n+1} - Q_n)] \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\psi'(Q_n)(M_{n+1} - M_k)] \geq 0, \end{aligned}$$

car $(M_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est une martingale et ψ' est croissante.

idée générale

- Observons que $(e^{B_t - \frac{t}{2}}, t \geq 0)$ est une martingale. Une question naturelle est donc de savoir si, pour toute martingale $(M_n, n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\left(Q_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M_k, t \geq 0 \right) \text{ est un peacock.}$$

- Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\psi \in \mathbf{C}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi(Q_{n+1})] - \mathbb{E}[\psi(Q_n)] &\geq \mathbb{E}[\psi'(Q_n)(Q_{n+1} - Q_n)] \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\psi'(Q_n)(M_{n+1} - M_k)] \geq 0, \end{aligned}$$

car $(M_n, n \in \mathbb{N}^*)$ est une martingale et ψ' est croissante.

Notion de peacock fort

Définition

On appelle **peacock fort** un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tous $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1}$, et toute fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ croissante en chaque argument,

$$\mathbb{E}[\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})(X_{t_{n+1}} - X_{t_n})] \geq 0. \quad (\text{SP})$$

Lemme

Un processus $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock fort si et seulement si, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1, \dots, n\}$, tous $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1}$, et toute fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ croissante en chaque argument,

$$\mathbb{E}[\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})(X_{t_{n+1}} - X_{t_k})] \geq 0. \quad (\text{SP}')$$

Remarque et exemples

- Tout peacock fort est un peacock.
- Toute martingale est un peacock fort.
- Si X est une v.a. réelle et si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}[|X|\varphi'(sX)] < \infty \text{ et } \mathbb{E}[X\varphi'(tX)] = 0,$$

alors

$(\varphi(tX), t \geq 0)$ est un peacock fort.

- Si X est une v.a. telle que $\mathbb{E}[e^{tX}] < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors

$$(X_t = \frac{e^{tX}}{\mathbb{E}[e^{tX}]}, t \geq 0) \text{ est un peacock fort.}$$

Remarque et exemples

- Tout peacock fort est un peacock.
- Toute martingale est un peacock fort.
- Si X est une v.a. réelle et si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}[|X|\varphi'(sX)] < \infty \text{ et } \mathbb{E}[X\varphi'(tX)] = 0,$$

alors

$(\varphi(tX), t \geq 0)$ est un peacock fort.

- Si X est une v.a. telle que $\mathbb{E}[e^{tX}] < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors

$$(X_t = \frac{e^{tX}}{\mathbb{E}[e^{tX}]}, t \geq 0) \text{ est un peacock fort.}$$

Remarque et exemples

- Tout peacock fort est un peacock.
- Toute martingale est un peacock fort.
- Si X est une v.a. réelle et si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\forall t \geq 0, \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}[|X| \varphi'(sX)] < \infty \text{ et } \mathbb{E}[X \varphi'(tX)] = 0,$$

alors

$(\varphi(tX), t \geq 0)$ est un peacock fort.

- Si X est une v.a. telle que $\mathbb{E}[e^{tX}] < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors

$$(X_t = \frac{e^{tX}}{\mathbb{E}[e^{tX}]}, t \geq 0) \text{ est un peacock fort.}$$

Remarque et exemples

- Tout peacock fort est un peacock.
- Toute martingale est un peacock fort.
- Si X est une v.a. réelle et si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\forall t \geq 0, \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}[|X|\varphi'(sX)] < \infty \text{ et } \mathbb{E}[X\varphi'(tX)] = 0,$$

alors

$(\varphi(tX), t \geq 0)$ est un peacock fort.

- Si X est une v.a. telle que $\mathbb{E}[e^{tX}] < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors

$$(X_t = \frac{e^{tX}}{\mathbb{E}[e^{tX}]}, t \geq 0) \text{ est un peacock fort.}$$

Remarque et exemples

- Tout peacock fort est un peacock.
- Toute martingale est un peacock fort.
- Si X est une v.a. réelle et si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\forall t \geq 0, \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}[|X|\varphi'(sX)] < \infty \text{ et } \mathbb{E}[X\varphi'(tX)] = 0,$$

alors

$(\varphi(tX), t \geq 0)$ est un peacock fort.

- Si X est une v.a. telle que $\mathbb{E}[e^{tX}] < \infty$ pour tout $t \geq 0$, alors

$$(X_t = \frac{e^{tX}}{\mathbb{E}[e^{tX}]}, t \geq 0) \text{ est un peacock fort.}$$

Deuxième extension de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao

Théorème (B.-Profeta-Roynette, 2012)

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un peacock fort continue à droite, et tel que, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|] < \infty$. Alors, pour toute fonction continue et strictement croissante $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\alpha(0) = 0$,

$$\left(Q_t := \frac{1}{\alpha(t)} \int_0^t X_s d\alpha(s), t \geq 0 \right) \text{ est un peacock.}$$

Exemple

En appliquant le résultat ci-dessus à la fonction $\alpha : t \mapsto t$, et au mouvement brownien géométrique

$$(X_t := e^{B_t - \frac{t}{2}}, t \geq 0),$$

on retrouve l'exemple (CEX08) de Carr-Ewald-Xiao.

Outline

- 1 Introduction
 - Définition d'un peacock
 - Motivations
- 2 Une généralisation de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
 - Idée générale
 - Monotonie conditionnelle
 - Extension de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
- 3 Une autre généralisation de l'exemple de Carr-Ewald-Xiao
- 4 **Références**

Références



D. Baker and M. Yor.

A Brownian sheet martingale with the same marginals as the arithmetic average of geometric Brownian motion.

Elect. J. Prob., 14(52)1532-1540, 2009.



A. Bogso.

Peacocks sous l'hypothèse de monotonie conditionnelle, et une caractérisation des 2-martingales

PhD thesis, Université Henri Poincaré Nancy, 2012.



A. Bogso, C. Profeta and B. Roynette.

Some examples of peacocks in a Markovian set-up.

In *Séminaire de Probabilités, XLIV*,

Lecture notes in Math. Springer, Berlin, A paraître, 2012.

Références



P. Carr, C.-O. Ewald, and Y. Xiao.

On the qualitative effect of volatility and duration on prices of Asian options.

Finance Research Letters, 5(3) :162–171, September 2008.



F. Hirsch, C. Profeta, B. Roynette, and M. Yor.

Peacocks and associated martingales.

Bocconi-Springer, vol 3, 2011.



H. G. Kellerer.

Markov-Komposition und eine Anwendung auf Martingale.

Math. Ann., 198 :99–122, 1972.