

# $\Lambda$ -coalescents, $M$ -coalescents et descente de l'infini

Clément Foucart

Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires  
Université Pierre et Marie Curie  
Paris

Colloque JPS  
20/04/2012

## Premières définitions

On considère une population infinie décrite par

$$\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$$

- **haploïde**: Chaque individu a un unique parent
- **neutre**: Pas de sélection, même chance de reproduction pour chacun.

A la suite des travaux de Kingman (1982), Pitman et Sagitov ont défini en 1999 une classe de processus à **valeurs partitions** plus grande pour définir les généalogies de ces populations dites **échangeables**.

## Construction des $\Lambda$ -coalescents

Soit  $\Lambda$  une mesure FINIE sur  $[0, 1]$ . On se donne un processus de Poisson ponctuel  $\mathcal{N}$  sur  $\mathbb{R}_+ \times [0, 1] \times \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  d'intensité

$$dt \otimes x^{-2} \Lambda(dx) \otimes \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{N}}(x).$$

Posons  $\Pi(0) = 0_{[\infty]}$  (partition de  $\mathbb{N}$  en singletons), soit  $(t, x, b)$  un atome de  $\mathcal{N}$ .  $b$  est une suite i.i.d. de Bernoulli de paramètre  $x$ .

- Tous les blocs présents juste avant  $t$  qui ont tiré la valeur 1 coagulent.
- Les blocs présents juste avant  $t$  qui ont tiré la valeur 0 ne coagulent pas.

On superpose en plus de ces coagulations, des coagulations binaires à taux constant  $\Lambda(0)$  au cours du temps: chaque paire porte une horloge exponentielle de paramètre  $\Lambda(0)$ .

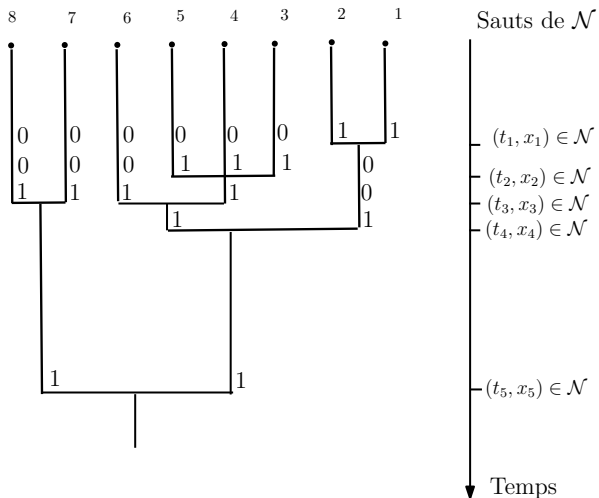


Figure:  $n$ - $\Lambda$ -coalescent

Le processus  $(\Pi(t), t \geq 0)$  obtenu est un  $\Lambda$ -coalescent. Si  $\Lambda$  est concentrée en 0, on obtient le coalescent de Kingman avec coefficient de coagulation  $\Lambda(0)$ .

La loi d'un coalescent est entièrement caractérisée par les taux de sauts de ses restrictions:

$$\lambda_{l,k} = \int_{]0,1]} x^k (1-x)^{l-k} x^{-2} \Lambda(dx) + \Lambda(0) 1_{k=2}.$$

Taux de saut de  $0_{[l]}$  partition de  $\{1, \dots, l\}$  en singletons et  $\pi$  une partition de  $\{1, \dots, l\}$  avec un seul bloc non singleton contenant  $k$  éléments (ce qui implique que  $\pi$  a  $l - k + 1$  blocs).

Pitman et Schweinsberg (2000) ont découvert un phénomène remarquable sur le processus du nombre de blocs  $(N(t), t \geq 0)$ , appelé

*descente de l'infini*

Ils ont montré que si  $\Lambda(1) = 0$ ,  $(N(t), t \geq 0)$  n'a que deux comportements sont possibles:

- Soit  $N(t) = \infty$  pour tout  $t \geq 0$
- Soit  $N(0) = \infty$ ,  $N(t) < \infty$  pour tout  $t > 0$  [descente de l'infini].

Soit

$$\phi(n) = \sum_{k=2}^n (k-1) C_n^k \lambda_{n,k}$$

avec  $\lambda_{n,k} = \int_0^1 x^{k-2} (1-x)^{n-k} \Lambda(dx)$ .

**Théorème (Schweinsberg, 2000)**

*Le  $\Lambda$ -coalescent descend de l'infini ssi  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\phi(n)} < \infty$ .*

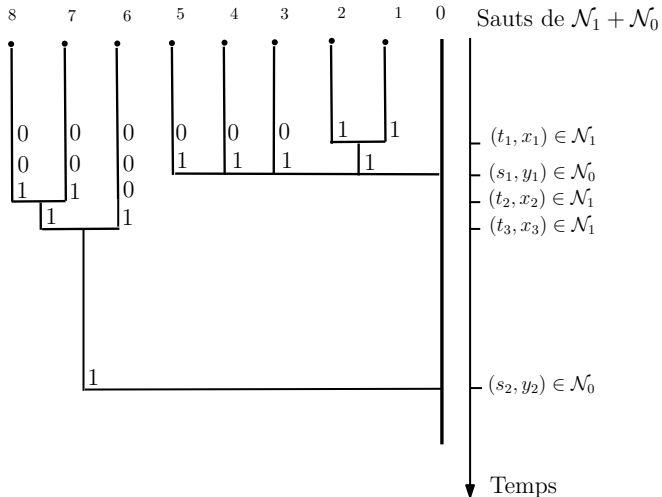
Exemples:  $\Lambda(dx) = x^{1-\alpha} dx$  pour  $\alpha \in (0, 2)$

- $\alpha \in (0, 1]$ :  $N(t) = \infty$  pour tout  $t \geq 0$
- $\alpha \in (1, 2)$ :  $N(t) < \infty$  pour tout  $t > 0$ .

Nous allons nous intéresser à ce phénomène dans le cadre un peu plus général des *M*-coalescents (processus à valeurs dans les partitions de  $\mathbb{Z}_+$ )...

- En plus de la reproduction, nous supposons qu'il y a une immigration (non simultanée) dans la population.
- A cause de l'immigration, certaines lignées ancestrales peuvent être impossible à suivre à partir d'un certain temps.
- Pour coder les individus issus de l'immigration, on ajoute un ancêtre externe générique 0.





## Construction Poissonienne

Soit  $M = (\Lambda_0, \Lambda_1)$  un couple de mesures finies sur  $[0, 1]$ .

- Soit  $\mathcal{N}_0$  PPP d'intensité

$$dt \otimes x^{-1} \Lambda_0(dx) \otimes \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{N}}(x).$$

A chaque atome de temps  $t$  de  $\mathcal{N}_0$ , les blocs présents au temps  $t-$  qui ont tiré 1 coagulent avec le bloc distingué (i.e le bloc contenant 0)

- Soit  $\mathcal{N}_1$  PPP d'intensité

$$dt \otimes x^{-2} \Lambda_1(dx) \otimes \mathcal{B}^{\otimes \mathbb{N}}(x).$$

A chaque atome de temps  $t$  de  $\mathcal{N}_1$ , les blocs présents au temps  $t-$  qui ont tiré 1 coagulent ensemble.

## Descente de l'infini pour les $M$ -coalescents

### Théorème (F. 2011)

Le  $(\Lambda_0, \Lambda_1)$ -coalescent descend de l'infini ssi  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\phi_1(n)} < \infty$  où  
 $\phi_1(n) = \sum_{k=2}^n (k-1) C_n^k \lambda_{n,k}$ .

Les coagulations avec le bloc distingué n'ont aucun rôle dans la descente de l'infini. Autrement dit, seule la reproduction joue un rôle dans l'événement de coagulation totale.

### Proposition

Soit  $\zeta := \inf\{t \geq 0, N(t) = 1\}$ , on a

$$\mathbb{E}[\zeta] \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1/(\phi_1(n) + \Lambda_0([0, 1])n).$$

## Vitesse de descente de l'infini

- $\Lambda$ -coalescents: Bertoin et Le Gall (2005) ont observé l'équivalence

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\phi(n)} < \infty \iff \exists a > 0 \int_a^{\infty} \frac{dq}{\Psi(q)} < \infty$$

avec

$$\Psi(q) = \int_0^1 (e^{-qx} - 1 + qx)x^{-2}\Lambda(dx)$$

Berestycki<sup>2</sup> et Limic (2010) ont montré l'asymptotique suivante:

$$N(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} v_{\Lambda}(t)$$

avec  $v_{\Lambda}(t) := \inf\{s > 0; \int_s^{\infty} \frac{dq}{\Psi(q)} < t\}$ .

- $M$ -coalescents.

$$N(t) \sim v_{\Lambda_1}(t).$$

Merci !

- F. (2011): Distinguished exchangeable coalescents and generalized Fleming-Viot processes with immigration, Adv. App. Prob. Vol 43 N°2
- Pitman (1999) Coalescent with multiple collisions, Ann Probab.
- Schweinsberg (2000) A necessary and sufficient condition for the  $\Lambda$ -coalescent to come down from infinity, ECP
- Schweinsberg (2000) Coalescents with simultaneous multiple collisions, EJP