

# Mouvement stable linéaire multifractionnaire : représentation en ondelettes, régularité trajectorielle et simulation.

Julien HAMONIER

Université de Lille 1 - Laboratoire Paul Painlevé  
Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis - LAMAV

# Plan

- 1 Introduction et objectifs principaux
- 2 Ondelettes de Daubechies et étude de la régularité du mslm
- 3 Ondelettes de Haar et simulation du mslm

# Le mouvement stable linéaire multifractionnaire (mslm)

## Définition 1.1 (Stoev & Taqqu 2004)

Soit  $\alpha \in ]0, 2[$  un paramètre. Le champ stochastique  $S_{\alpha}S$ , noté  $X = \{X(u, v) : (u, v) \in \mathbb{R} \times ]1/\alpha, 1[ \}$ , est défini, pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R} \times ]1/\alpha, 1[$  par l'intégrale stochastique :

$$X(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \left\{ (u-s)_+^{v-1/\alpha} - (-s)_+^{v-1/\alpha} \right\} Z_{\alpha}(ds). \quad (1)$$

## Définition 1.2 (Stoev & Taqqu 2004)

Soient  $\alpha \in ]0, 2[$  un paramètre et  $H(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow ]0, 1[$  un paramètre fonctionnel déterministe. Le mouvement stable linéaire multifractionnaire est le processus stochastique  $S_{\alpha}S$ , noté  $\{Y(t) : t \in \mathbb{R}\}$ , défini pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par

$$Y(t) = X(t, H(t)). \quad (2)$$

Désormais nous supposons que  $\alpha \in ]1, 2[$  et que  $H(\cdot)$  est à valeurs dans  $]1/\alpha, 1[$ .

# Continuité

## Théorème 1.1 (Stoev & Taqqu 2005)

*Soit  $\mathcal{K}$  un intervalle compact. Supposons que la restriction de  $H(\cdot)$  à  $\mathcal{K}$  est une fonction  $\rho$ -höldérienne telle que  $\rho > 1/\alpha$ . Alors le mslm possède une version dont les trajectoires sont, avec probabilité 1, des fonctions continues sur  $\mathcal{K}$ .*

Conjecture (Stoev & Taqqu 2005) : une condition nécessaire et suffisante pour que le mslm possède une version dont les trajectoires sont avec probabilité 1 des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , est que  $H(\cdot)$  soit une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  (Stoev & Taqqu 2005).

→ En utilisant une représentation du champ  $X$  (qui génère le mslm) obtenue via une base d'ondelettes de Daubechies avec suffisamment de moments nuls, nous montrerons que la conjecture est vraie.

# Espace de Hölder uniforme

Nous allons maintenant nous intéresser à des propriétés fines de régularité trajectorielle de la version continue du mslm.

## Définition 1.3 (Espace de Hölder uniforme)

Soient  $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et  $\mathcal{K}$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $\gamma \in ]0, 1]$ , l'espace de Banach des fonctions  $\gamma$ -höldériennes définies sur  $\mathcal{K}$  et à valeurs dans  $\mathbb{B}$ , est noté par  $\mathcal{C}^\gamma(\mathcal{K}, \mathbb{B})$ , est défini par

$$\mathcal{C}^\gamma(\mathcal{K}, \mathbb{B}) := \{f : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{B} : \mathcal{N}_\gamma(f) < \infty\}, \quad (3)$$

où

$$\mathcal{N}_\gamma(f) := \sup_{x \in \mathcal{K}} \|f(x)\| + \sup_{x, y \in \mathcal{K} : x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{|x - y|^\gamma},$$

est la norme naturelle associée à cet espace.

**Remarque :** l'espace  $\mathcal{C}^1(\mathcal{K}, \mathbb{B})$  est habituellement appelé espace de Lipschitz, plutôt que espace de Hölder.

# Exposant de Hölder uniforme

## Définition 1.4

$\beta_g(\mathcal{K})$  l'exposant de Hölder uniforme (critique) d'une fonction  $g : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et non dérivable, est défini par

$$\beta_g(\mathcal{K}) := \sup\{\gamma \in [0, 1] : g \in \mathcal{C}^\gamma(\mathcal{K}, \mathbb{R})\}.$$

## Théorème 1.2 (Stoev & Taqqu 2005)

Lorsque  $H(\cdot)$  appartient à l'espace de Hölder uniforme  $\mathcal{C}^\beta(\mathcal{K}, \mathbb{R})$  où  $\beta > \max_{t \in \mathcal{K}} H(t)$ , alors on a avec probabilité 1,

$$\min_{t \in \mathcal{K}} H(t) - 1/\alpha \leq \beta_Y(\mathcal{K}) \leq \min_{t \in \mathcal{K}} H(t).$$

→ Au moyen de la représentation du champ  $X$  via des ondelettes de Daubechies, nous obtiendrons un fin module de continuité uniforme des trajectoires du mslm et il en résultera que, presque sûrement, on a

$$\beta_Y(\mathcal{K}) = \min_{t \in \mathcal{K}} H(t) - 1/\alpha.$$

# Plan

- 1 Introduction et objectifs principaux
- 2 Ondelettes de Daubechies et étude de la régularité du mslm
- 3 Ondelettes de Haar et simulation du mslm

## Trois notations importantes

- (I) La fonction  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  désigne une ondelette mère de Daubechies à support compact avec au moins 15 moments nuls i.e.

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x\psi(x) dx = \dots = \int_{\mathbb{R}} x^{14}\psi(x) dx = 0.$$

Notons que  $\psi$  est de classe  $C^3$  sur  $\mathbb{R}$ .

- (II) La fonction  $\Psi : \mathbb{R} \times ]1/\alpha, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  est définie pour tout  $(x, v) \in \mathbb{R} \times ]1/\alpha, 1[$  par,

$$\Psi(x, v) := \int_{\mathbb{R}} (x - y)_+^{v-1/\alpha} \psi(y) dy. \quad (4)$$

### Proposition 2.1

- $\Psi$  est de classe  $C^3$  sur  $\mathbb{R} \times ]1/\alpha, 1[$ , de plus elle est infiniment dérivable par rapport à  $v$ .
- $\Psi$  et toutes ses dérivées partielles, sont bien localisées en  $x$  uniformément en  $v$ . i.e. pour tout intervalle  $[a, b] \subset ]1/\alpha, 1[$  et tout  $(p, q) \in \{0, 1, 2, 3\} \times \mathbb{N}$ ,

$$\sup_{v \in [a, b]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |(\partial_x^p \partial_v^q \Psi)(x, v)| (1 + |x|)^2 < \infty.$$

(III)  $\{\epsilon_{j,k} : (j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$  est la suite de variables aléatoires  $\mathcal{S}\alpha\mathcal{S}$  définies par

$$\epsilon_{j,k} := \int_{\mathbb{R}} 2^{j/\alpha} \psi(2^j s - k) Z_{\alpha}(ds). \quad (5)$$

### Lemme 2.1 (Ayache, Roueff, Xiao 2009)

*Il existe un évènement de probabilité 1, noté  $\Omega^*$ , tel que pour tout  $\eta > 0$ , tout  $\omega \in \Omega^*$  et pour tout  $(j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , on a*

$$|\epsilon_{j,k}(\omega)| \leq C(\omega)(1 + |j|)^{1/\alpha + \eta}(1 + |k|)^{1/\alpha} \log^{1/\alpha + \eta}(2 + |k|), \quad (6)$$

*où  $C > 0$  est une variable aléatoire presque sûrement finie, dépendant uniquement de  $\eta$ .*

# Représentation de $X$ via des ondelettes de Daubechies

Désormais  $\mathcal{K} = [-M, M]$  où  $M > 0$  est un réel arbitraire. De plus,  $a$  et  $b$  désignent deux réels arbitraires tels que

$$1/\alpha < a \leq b < 1.$$

## Théorème 2.1

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons,

$$D_{n,M} := \{(j, k) \in \mathbb{Z}^2 : |j| \leq n \text{ et } |k| \leq M2^{n+1}\}.$$

Le champ  $\{X(u, v) : (u, v) \in \mathcal{K} \times [a, b]\}$  peut s'exprimer de la façon suivante :

$$X(u, v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{(j,k) \in D_{n,M}} \epsilon_{j,k} 2^{-jv} \left( \Psi(2^j u - k, v) - \Psi(-k, v) \right); \quad (7)$$

la converge dans (7) a lieu, presque sûrement (en fait pour tout  $\omega \in \Omega^*$ ), au sens des normes de tous les espaces  $\mathcal{E}_\gamma(a, b, \mathcal{K}) = \mathcal{C}^1([a, b], \mathcal{C}^\gamma(\mathcal{K}, \mathbb{R}))$ , tels que  $\gamma < a - 1/\alpha$ .

Rappelons que,

$$\mathcal{E}_\gamma(a, b, \mathcal{K}) = \mathcal{C}^1([a, b], \mathcal{C}^\gamma(\mathcal{K}, \mathbb{R})),$$

est l'espace de Banach des fonctions lipschitziennes définies sur  $[a, b]$  et à valeurs dans l'espace de Hölder  $\mathcal{C}^\gamma(\mathcal{K}, \mathbb{R})$ .

**Remarque :** toute fonction  $F$  de  $\mathcal{E}_\gamma(a, b, \mathcal{K})$  peut être vu comme une fonction à valeurs réelles définies sur  $\mathcal{K} \times [a, b]$ ; de plus, la norme de cet espace est équivalente à la norme :

$$\begin{aligned} & \sup_{(u,v) \in \mathcal{K} \times [a,b]} |F(u, v)| + \sup_{(u_1, u_2, v) \in \mathcal{K}^2 \times [a,b]} \frac{|F(u_1, v) - F(u_2, v)|}{|u_1 - u_2|^\gamma} \\ & + \sup_{(u, v_1, v_2) \in \mathcal{K} \times [a,b]^2} \frac{|F(u, v_1) - F(u, v_2)|}{|v_1 - v_2|} \\ & + \sup_{(u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathcal{K}^2 \times [a,b]^2} \frac{|F(u_1, v_1) - F(u_1, v_2) - F(u_2, v_1) + F(u_2, v_2)|}{|u_1 - u_2|^\gamma |v_1 - v_2|}. \end{aligned}$$

## Conséquences importantes du Théorème 2.1

### Corollaire 2.1

*Il existe une variable aléatoire  $C_1$  finie, positive telle que, presque sûrement, pour tous  $\omega \in \Omega^*$  et  $(v_1, v_2) \in [a, b]^2$ , on a*

$$\sup_{u \in \mathcal{K}} |X(u, v_1, \omega) - X(u, v_2, \omega)| \leq C_1(\omega) |v_1 - v_2|. \quad (8)$$

### Corollaire 2.2

*En remplaçant  $(u, v)$  par  $(t, H(t))$  et  $[a, b]$  par  $[\min_{t \in \mathcal{K}} H(t), \max_{t \in \mathcal{K}} H(t)]$ , on obtient une représentation en série aléatoire d'ondelettes du mslm  $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{K}}$ ; cette série est presque sûrement, convergente, dans tous les espaces de Hölder  $C^\gamma(\mathcal{K}, \mathbb{R})$  où  $\gamma < \min \{ \min_{t \in \mathcal{K}} H(t) - 1/\alpha, \beta_H(\mathcal{K}) \}$ .*

*Ainsi,  $\beta_Y(\mathcal{K})$  l'exposant de Hölder uniforme de  $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{K}}$ , vérifie, presque sûrement,*

$$\beta_Y(\mathcal{K}) \geq \min \left\{ \min_{t \in \mathcal{K}} H(t) - 1/\alpha, \beta_H(\mathcal{K}) \right\}.$$

# Module de continuité du champ $X$

## Théorème 2.2

Pour tous  $\omega \in \Omega^*$  et  $\eta > 0$ , on a

$$\sup_{(u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathcal{K}^2 \times [a, b]^2} \frac{|X(u_1, v_1, \omega) - X(u_2, v_2, \omega)|}{|u_1 - u_2|^{v_1 \vee v_2 - 1/\alpha} (1 + |\log |u_1 - u_2||)^{2/\alpha + \eta} + |v_1 - v_2|} < +\infty. \quad (9)$$

Le théorème 2.2 résulte du Corollaire 2.1 et de la proposition suivante.

## Proposition 2.2

Pour tous  $\omega \in \Omega^*$  et  $\eta > 0$ , on a

$$\sup_{(u_1, u_2, v) \in \mathcal{K}^2 \times [a, b]} \frac{|X(u_1, v, \omega) - X(u_2, v, \omega)|}{|u_1 - u_2|^{v - 1/\alpha} (1 + |\log |u_1 - u_2||)^{2/\alpha + \eta}} < +\infty. \quad (10)$$

La Proposition 2.2 avait été obtenue par Takashima (1989) dans le cas particulier où  $a = b$ .

# Module de continuité du mslm

## Théorème 2.3

Pour tous  $\omega \in \Omega^*$  et  $\eta > 0$ , on a

$$\sup_{(t,s) \in \mathcal{K}^2} \frac{|Y(t, \omega) - Y(s, \omega)|}{|t - s|^{H(s) \vee H(t) - 1/\alpha} (1 + |\log |t - s||)^{2/\alpha + \eta} + |H(t) - H(s)|} < +\infty. \quad (11)$$

## Corollaire 2.3

Supposons que la condition suivante  $(\mathcal{A}_{\mathcal{K}})$  est vérifiée ;

$(\mathcal{A}_{\mathcal{K}})$  : il existe  $\gamma_0 > \max_{x \in \mathcal{K}} H(x) - 1/\alpha$  tel que  $H(\cdot) \in C^{\gamma_0}(\mathcal{K}, \mathbb{R})$ .

Alors, pour tous  $\omega \in \Omega^*$  et  $\eta > 0$ , on a,

$$\sup_{(t,s) \in \mathcal{K}^2} \frac{|Y(t, \omega) - Y(s, \omega)|}{|t - s|^{\min_{x \in \mathcal{K}} H(x) - 1/\alpha} (1 + |\log |t - s||)^{2/\alpha + \eta}} < +\infty. \quad (12)$$

Le Corollaire 2.3 permet d'établir que les trajectoires de  $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{K}}$  sont, avec probabilité 1, des fonctions  $(\min_{x \in \mathcal{K}} H(x) - 1/\alpha - \epsilon)$ -höldériennes, pour tout  $\epsilon > 0$ .

## Quasi-optimalité du module de continuité

Le résultat suivant peut être vu comme un inverse au corollaire précédent :

### Théorème 2.4

Posons  $\rho :=$

$\sup \left\{ \theta \in \mathbb{R}_+ : \exists t_0 \in \mathcal{K} \text{ tel que } H(t_0) = \min_{x \in \mathcal{K}} H(x) \text{ et } \sup_{t \in \mathcal{K}} \frac{|H(t) - H(t_0)|}{|t - t_0|^{\theta - 1/\alpha}} < \infty \right\}$

et  $\tau = \frac{1+2\alpha^{-1}}{\alpha\rho-1}$ . Alors, sous la condition  $\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ , pour tout  $\eta > 0$ , on a, presque sûrement,

$$\sup_{t, s \in \mathcal{K}} \frac{|Y(t) - Y(s)|}{|t - s|^{\min_{x \in \mathcal{K}} H(x) - 1/\alpha} (1 + |\log |t - s||)^{-\tau - \eta}} = \infty. \quad (13)$$

Ceci implique notamment que, les trajectoires de  $\{Y(t)\}_{t \in \mathcal{K}}$  ne sont pas, avec probabilité 1, des fonctions  $(\min_{x \in \mathcal{K}} H(x) - 1/\alpha + \epsilon)$ -höldériennes, pour tout  $\epsilon > 0$ . Ainsi, en combinant le Corollaire 2.3 avec le Théorème 2.4, on a, presque sûrement,

$$\beta_Y(\mathcal{K}) = \min_{x \in \mathcal{K}} H(x) - 1/\alpha.$$

# Plan

- 1 Introduction et objectifs principaux
- 2 Ondelettes de Daubechies et étude de la régularité du mslm
- 3 Ondelettes de Haar et simulation du mslm

Notons que le champ aléatoire  $X = \{X(u, v) : (u, v) \in [0, 1] \times [a, b]\}$  défini précédemment, se décompose ainsi

$$X(u, v) = \int_0^1 (u-s)_+^{v-1/\alpha} Z_\alpha(ds) + \int_{-\infty}^0 (u-s)^{v-1/\alpha} - (-s)^{v-1/\alpha} Z_\alpha(ds).$$

- Le champ  $\mathcal{S}\alpha\mathcal{S} \{Q(u, v) : (u, v) \in [0, 1] \times [a, b]\}$ , défini par :

$$Q(u, v) = \int_{-\infty}^0 (u-s)^{v-1/\alpha} - (-s)^{v-1/\alpha} Z_\alpha(ds).$$

est appelé **partie basse-fréquence** du champ  $X$  ;

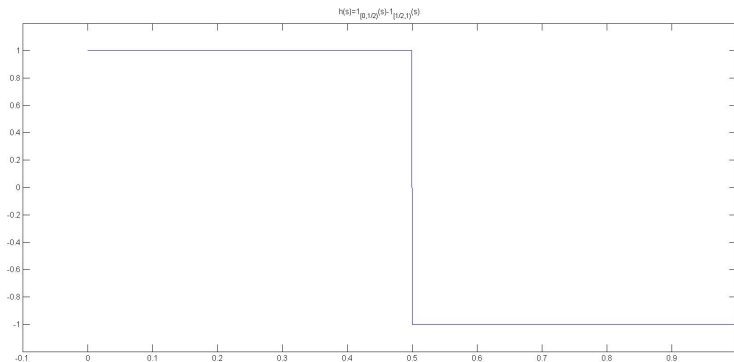
- Le champ  $\mathcal{S}\alpha\mathcal{S} \{S(u, v) : (u, v) \in [0, 1] \times [a, b]\}$ , défini par :

$$S(u, v) = \int_0^1 (u-s)_+^{v-1/\alpha} Z_\alpha(ds),$$

est appelé **partie haute-fréquence** du champ  $X$ .

# Système de Haar

Soit  $h$  la fonction définie, pour tout  $s \in [0, 1]$ , par :



On appelle  $h$  l'ondelette mère de Haar.

## Avantages & Inconvénients

Rappelons que pour tout  $(x, \nu) \in \mathbb{R} \times ]1/\alpha, 1[$ , on a défini la fonction  $\Psi$  par

$$\Psi(x, \nu) := \int_{\mathbb{R}} (x - y)_+^{\nu-1/\alpha} \psi(y) dy.$$

→ Dans le cas où  $\psi$  est une ondelette mère de Daubechies avec au moins 15 moments nuls, on a vu précédemment que la fonction  $\Psi$  est bien localisée i.e.

$$\sup_{\nu \in [a, b] \subset ]1/\alpha, 1[} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\Psi(x, \nu)| (1 + |x|)^2 < \infty. \quad (14)$$

Néanmoins, la fonction  $\Psi$  ne peut être calculée explicitement.

→ Dans le cas où  $\psi$  est une ondelette mère de de Haar, on a une forme explicite de  $\Psi$  donnée par

$$\Psi(u, \nu) = \frac{1}{1 + \nu - 1/\alpha} \left\{ (u - 1)_+^{1+\nu-1/\alpha} - 2(u - 1/2)_+^{1+\nu-1/\alpha} + (u)_+^{1+\nu-1/\alpha} \right\}.$$

Par contre, on perd en localisation puisqu'on n'a plus que

$$\sup_{\nu \in [a, b] \subset ]1/\alpha, 1[} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\Psi(x, \nu)| (1 + |x|)^{1+1/\alpha-\nu} < \infty. \quad (15)$$

## Une seconde représentation

### Théorème 3.1

Le champ  $S_\alpha S$  peut être représenté de la façon suivante :

$$S(u, v) = \frac{u^{1+v-1/\alpha}}{1+v-1/\alpha} \epsilon_{-1} + \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \Psi_{j,k}(u, v) \epsilon_{j,k}, \quad \text{où} \quad (16)$$

- La série converge, presque sûrement, uniformément en  $(u, v)$  ;
- $\{\epsilon_{-1}\} \cup \{\epsilon_{j,k} : j \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq k < 2^j\}$  est une suite de variables aléatoires  $S_\alpha S$  avec le même paramètre d'échelle égale à 1 ;
- pour tout  $(u, v) \in [0, 1] \times [a, b]$ ,

$$\Psi_{j,k}(u, v) := \frac{2^{j(1-1/\alpha)}}{1+v-1/\alpha} \times \left\{ \left( u - \frac{2k+2}{2^{j+1}} \right)_+^{1+v-1/\alpha} - 2 \left( u - \frac{2k+1}{2^{j+1}} \right)_+^{1+v-1/\alpha} + \left( u - \frac{2k}{2^{j+1}} \right)_+^{1+v-1/\alpha} \right\}.$$

# Vitesse de convergence

## Théorème 3.2

Pour tout réel  $\eta > 0$  arbitrairement petit, il existe une variable aléatoire finie, positive, notée  $C_6$  telle que, presque sûrement, pour tout  $J \in \mathbb{Z}_+$

$$\left\| \sum_{j=J}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \Psi_{j,k}(\cdot, \cdot) \epsilon_{j,k} \right\|_{\infty} \leq C_6 (1+J)^{1/\alpha} \log^{1/\alpha+\eta} (1+J) 2^{-J(H_* - \frac{1}{\alpha})},$$

où  $H_* = \min_{t \in [a,b]} H(t)$ .