Un modèle stochastique du taux d'intérêt implicite en microcrédit

PHEAKDEI MAUK, MARC DIENER

LABORATOIRE J.A. DIEUDONNÉ

Dixième colloque des jeunes probabilistes et statisticiens
CIRM Marseille 16-20 avril 2012

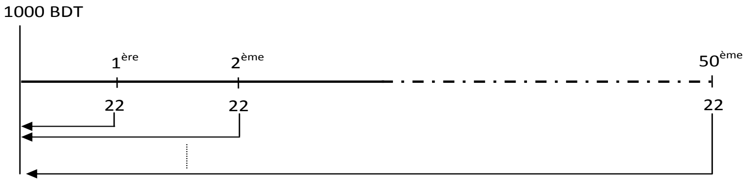
Qu' est-ce que le microcrédit ?

- De très petits prêts à des gens très pauvres.
- Introduit par Muhammad Yunus au Bangladesh dans les années 70.
- Le prix Nobel de la Paix en 2006 pour la Grameen Banque et Yunus.
- Des taux de remboursements très hauts ($\approx$ 97%).
- Environ 10 000 institutions de microfinance (IMF) dans la plupart des pays du monde.
- Et environ 50 milliards d'Euros de prêts à plus de 500 millions de bénéficiaires.

Retard de rembousement / taux d'intérêt effectif

- Reproche : les taux d'intérêts sont trop élevés.
- Mais les emprunteurs ne remboursent pas toujours à temps.
- En cas de retard, l'IMF accorde habituellement un délai gratuit.
- Mais le delai entraine un taux d'intérêt plus petit.
- Aucune étude mathématique de ce phénomène.

L'équation de Yunus (ref. [1])



$$1000 = 22\sum_{k=1}^{50}\left(e^{-\frac{r}{52}}\right)^k = 22\sum_{k=1}^{50} q^k = 22\frac{q-q^{51}}{1-q}, \qquad q = e^{-\frac{r}{52}}$$

r : taux d'intérêt annuel, k : nombre de semaines, $k = 1, 2, \cdots, 50$.

D'où *l'équation de Yunus* $\quad 22q^{51} - 1022q + 1000 = 0.$

$$r \approx 20\%(19.74175\%)$$

Notre Modèle : modèle aléatoire de Yunus

$(\varepsilon_i)_{i=0,1,2,\dots}$: une suite de v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(1, 1-p)$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'emprunteur ne rembourse pas à la date } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

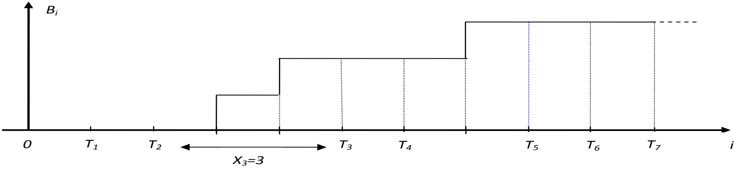
$$\begin{cases} B_0 = 0 \\ B_i = B_{i-1} + \varepsilon_i : \quad \text{un processus de Bernoulli} \end{cases}$$

B_i : le nombre de semaines de retard à la date i.

$$\begin{cases} X_0 = 0, \ T_0 = 0 \\ X_n = \mathrm{Min}\{i \geq 1 \mid \ \varepsilon_{T_{n-1}+i} = 0\} \\ T_n = T_{n-1} + X_n \end{cases}$$

$X_n \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$, où p la probabilité de remboursement à temps

Notre Modèle : modèle aléatoire de Yunus



Soit R le taux d'intérêt actuariel qui satisfait l'équation de Yunus :

$$1000 = 22 \sum_{n=1}^{50} e^{-\frac{R}{52} T_n} = 22 \sum_{n=1}^{50} e^{-\frac{R}{52}(X_1+X_2+\cdots+X_n)}$$

Comme $X_1, X_2, \cdots$ sont des v.a., alors R devient *variable aléatoire*.

Le taux d'intérêt devient aléatoire

Proposition :

Si on désigne par $\bar{r}$ la quantité qui satisfait l'équation :

$$1000 = \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{50} 22e^{-\frac{\bar{r}}{52}(X_1+X_2+\cdots+X_n)}\right)$$

alors $\bar{r} = 52\ln\left(1 + p(\frac{1}{q_+} - 1)\right)$, où q_+ : la solution (positive non triviale) de l'équation de Yunus non stochastique.

- En utilisant la fonction génératrice de X_n, on obtient $\bar{r}$.

La probabilité de rembousement à temps comme fonction du taux de non défaut

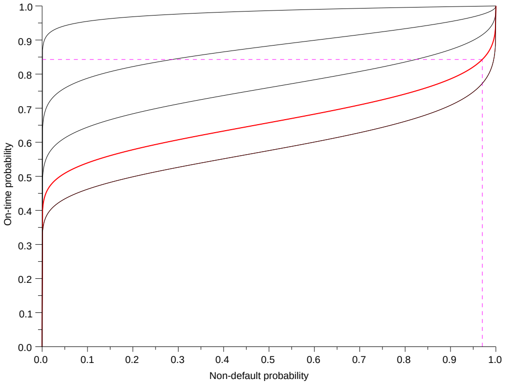
Proposition :

Soit d : le nombre maximum de semaines de retard autorisé et soit
$\gamma = \mathbb{P}(\mathrm{Max}\{X_1, \ldots, X_{50}\} \leq d)$: le taux de non defaut.
On a la relation $p = 1 - (1 - \gamma^{\frac{1}{50}})^{\frac{1}{d}}$.

$$\gamma = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{50} \{X_i \leq d\}\right)$$

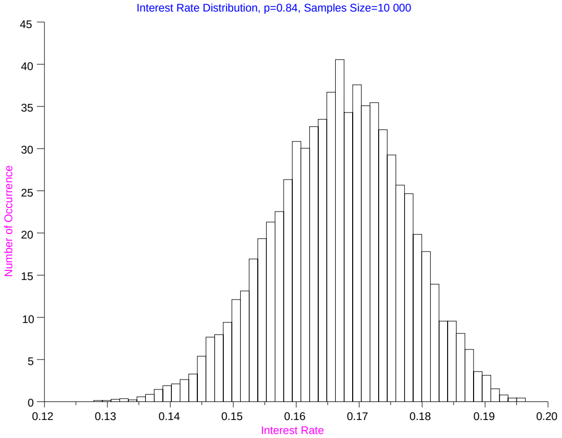
$$= \prod_{i=1}^{50} \mathbb{P}(X_i \leq d), \text{ les } X_i \text{ sont i.i.d. et de loi } \mathcal{G}(p)$$

Graphes de p en fonction de γ pour différentes valeurs de d

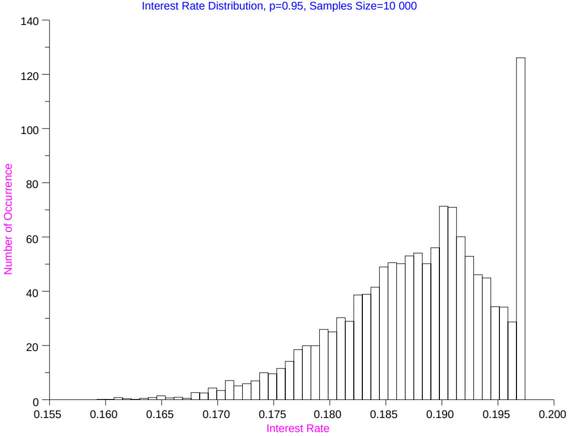


Le retard maximum $d = 1, 2, 3, 4, 5$

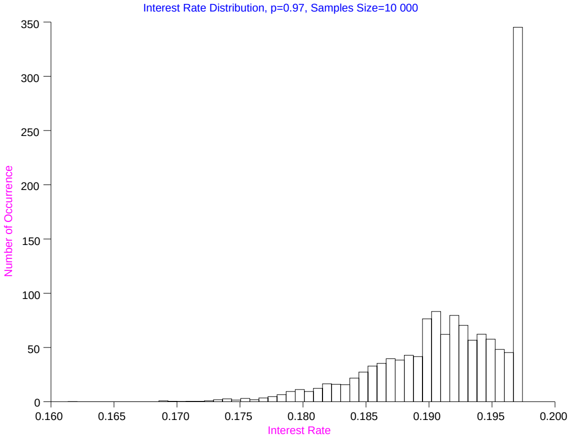
Simulation de la loi du taux d'intérêt aléatoire R, $p = 0.84$



Simulation de la loi du taux d'intérêt aléatoire R, $p = 0.95$



Simulation de la loi du taux d'intérêt aléatoire R, $p = 0.97$



Conclusion

- Dans la pratique, le remboursement du prêt est d'environ 97%, en général, le temps maximal autorisé avant défaut est de 4 semaines.
- Dans notre modèl, pour $d = 4$ et $\gamma = 97\%$, on trouve $p = 84\%$, ce qui correspond à un taux d'intérêt effectif $\bar{r} \approx 16,59\%$.
- Donc le taux d'intérêt effectif, dans ce cas n'est pas de 20% mais de 16,59% en réalité.
- L' étude mathématique du modèle devrait permettre de déterminer la loi de R et le calcul du taux effectif dans le cas général.

Références

[1] M. Yunus et Alan Jolis, *Vers un monde sans pauvreté*, JC Lattès, 1997.

[2] M. Yunus and Alan Jolis, Banker to the Poor : *Micro-lending and the battle against world poverty*, Public Affairs, 1999.

[3] Beatriz Armendàriz de Aghion and Jonathan Morduch, The Economics of Microfinance, The MIT Press, 2005.

[4] Christian Ahlin and Robert M. Townsend, Using repayment data to test across models of join liability lending, The Economic Journal, 2007.

[5] Osman KHODR Modèles dynamiques des innovations du microcrédit, PhD Thesis, Université de Nice Sophia-Antipolis, 2011.