Bornes sur la variance des valeurs propres de matrices de Wigner

Sandrine Dallaporta

Institut de Mathématiques de Toulouse

Définition

Une matrice hermitienne aléatoire M_N de taille N est une matrice de Wigner si :

- *les parties réelles et parties imaginaires des $(M_N)_{ij}$ sont iid, ont une moyenne nulle et une variance égale à $\frac{1}{2}$ (pour $i < j$),*
- *ses coefficients diagonaux sont iid, ont une moyenne nulle et une variance 1. Ils sont indépendants des coefficients non diagonaux.*

Normalisation : $W_N = \frac{1}{\sqrt{N}} M_N$.

N valeurs propres réelles : $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N$.

Hypothèse technique : décroissance exponentielle de la loi des coefficients.

Définition (Exemple important de matrices de Wigner)

Si M_N est une matrice de Wigner dont les coefficients suivent une loi gaussienne, alors M_N appartient au GUE (Gaussian Unitary Ensemble).

Définition (Exemple important de matrices de Wigner)

Si M_N est une matrice de Wigner dont les coefficients suivent une loi gaussienne, alors M_N appartient au GUE (Gaussian Unitary Ensemble).

La loi jointe des valeurs propres est alors explicitement connue (ce qui n'est pas vrai dans le cas général) :

$$C_N \mathbb{1}_{\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N} \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \prod_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i^2/2} d\lambda_i .$$

Processus déterminantal, polynômes orthogonaux.

Définition (Exemple important de matrices de Wigner)

Si M_N est une matrice de Wigner dont les coefficients suivent une loi gaussienne, alors M_N appartient au GUE (Gaussian Unitary Ensemble).

La loi jointe des valeurs propres est alors explicitement connue (ce qui n'est pas vrai dans le cas général) :

$$C_N \mathbb{1}_{\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N} \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)^2 \prod_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i^2/2} d\lambda_i .$$

Processus déterminantal, polynômes orthogonaux.
$\Longrightarrow$ Étude complète du spectre possible.

Théorème (Wigner, 1955)

$$\mu_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\delta_{\lambda_k} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \rho_{sc} \; p.s.$$

Définition

La loi semicirculaire est la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité

$$d\rho_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,\mathbb{1}_{|x|<2}.$$

La position théorique de la $j^{ème}$ valeur propre γ_j est définie par $\frac{j}{N} = \int_{-2}^{\gamma_j} d\rho_{sc}(x)$.

Soit $\eta > 0$ fixé.
Valeurs propres dans le bulk : λ_j avec $\eta N \leqslant j \leqslant (1-\eta)N$.

$$\lambda_j - \gamma_j \to 0 \quad \text{p.s.}$$

Théorème (Gustavsson 2005, Tao et Vu 2011)

Soit $\eta > 0$ fixé. Pour tout $\eta N \leqslant j \leqslant (1-\eta)N$,

$$\frac{\lambda_j - \gamma_j}{\sqrt{\frac{\log N}{8(4-\gamma_j^2)N^2}}} \underset{N\to+\infty}{\to} \mathcal{N}(0,1).$$

Soit $\eta > 0$ fixé.
Valeurs propres dans le bulk : λ_j avec $\eta N \leqslant j \leqslant (1-\eta)N$.

$$\lambda_j - \gamma_j \to 0 \quad \text{p.s.}$$

Théorème (Gustavsson 2005, Tao et Vu 2011)

Soit $\eta > 0$ fixé. Pour tout $\eta N \leqslant j \leqslant (1-\eta)N$,

$$\frac{\lambda_j - \gamma_j}{\sqrt{\frac{\log N}{8(4-\gamma_j^2)N^2}}} \underset{N\to+\infty}{\to} \mathcal{N}(0,1).$$

A-t-on $\mathrm{Var}(\lambda_j) \leqslant C(\eta)\frac{\log N}{N^2}$ pour tout N ?

Fonction de comptage des valeurs propres $\mathcal{N}_t = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\lambda_i \leqslant t}$.

Processus déterminantal $\Longrightarrow \mathcal{N}_t$ suit une loi binomiale.

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{N}_t - N\rho_{sc}((-\infty, t])| \geqslant u + C\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{u^2}{c\log N + u}\right).$$

Fonction de comptage des valeurs propres $\mathcal{N}_t = \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{\lambda_i \leqslant t}$.

Processus déterminantal $\Longrightarrow$ $\mathcal{N}_t$ suit une loi binomiale.

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{N}_t - N\rho_{sc}((-\infty, t])| \geqslant u + C\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{u^2}{c\log N + u}\right).$$

Proposition (Inégalité de déviation pour λ_j)

Il existe des constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $C_3 > 0$ and $C_4 > 0$ (toutes dépendant de η) telles que, pour tout $C_3 \leqslant u \leqslant C_4 N$,

$$\mathbb{P}\left(|\lambda_j - \gamma_j| \geqslant \frac{u}{N}\right) \leqslant 4\exp\left(-\frac{C_1^2 u^2}{C_2 \log N + C_1 u}\right).$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left[(\lambda_j - \gamma_j)^2\right] \leqslant C(\eta)\frac{\log N}{N^2}.$$

Théorème (Erdös-Yau-Yin, 2010)

Il existe des constantes $C > 0$ et $c > 0$ telles que, pour tout $\eta N \leqslant j \leqslant (1-\eta)N$,

$$\mathbb{P}\left(|\lambda_j - \gamma_j| \geqslant \frac{(\log N)^{C \log \log N}}{N}\right) \leqslant \delta_N,$$

pour N assez grand, avec $\delta_N = C \exp[-(\log N)^{c \log \log N}]$.

Théorème (Erdös-Yau-Yin, 2010)

Il existe des constantes $C > 0$ et $c > 0$ telles que, pour tout $\eta N \leqslant j \leqslant (1-\eta)N$,

$$\mathbb{P}\left(|\lambda_j - \gamma_j| \geqslant \frac{(\log N)^{C \log\log N}}{N}\right) \leqslant \delta_N,$$

pour N assez grand, avec $\delta_N = C \exp[-(\log N)^{c \log\log N}]$.

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left[(\lambda_j - \gamma_j)^2\right] \leqslant \frac{(\log N)^{2C \log\log N}}{N^2}.$$

Théorème (Tao et Vu, 2011)

Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que la proposition suivante est vraie.
Soient M_N and M'_N deux matrices de Wigner dont les coefficients ont les mêmes 4 premiers moments.
On pose $W_N = \frac{1}{\sqrt{N}} M_N$ et $W'_N = \frac{1}{\sqrt{N}} M'_N$.
Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse vérifiant :

$$\forall\ 0 \leqslant j \leqslant 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |G^{(j)}(x)| \leqslant N^{c_0}.$$

Alors, pour tout $1 \leqslant j \leqslant N$ et pour N assez grand,

$$\left|\mathbb{E}[G(N\lambda_j)] - \mathbb{E}[G(N\lambda'_j)]\right| \leqslant N^{-c_0}.$$

G troncature de $x \mapsto (x - N\gamma_j)^2$.

Théorème (Tao et Vu, 2011)

Il existe une constante $c_0 > 0$ telle que la proposition suivante est vraie.
Soient M_N and M'_N deux matrices de Wigner dont les coefficients ont les mêmes 4 premiers moments.
On pose $W_N = \frac{1}{\sqrt{N}} M_N$ et $W'_N = \frac{1}{\sqrt{N}} M'_N$.
Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse vérifiant :

$$\forall\ 0 \leqslant j \leqslant 5, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |G^{(j)}(x)| \leqslant N^{c_0}.$$

Alors, pour tout $1 \leqslant j \leqslant N$ et pour N assez grand,

$$\left|\mathbb{E}[G(N\lambda_j)] - \mathbb{E}[G(N\lambda'_j)]\right| \leqslant N^{-c_0}.$$

G troncature de $x \mapsto (x - N\gamma_j)^2$.

$$\Longrightarrow \quad \mathbb{E}\left[(\lambda_j - \gamma_j)^2\right] \leqslant C(\eta)\frac{\log N}{N^2}.$$

Théorème (Wigner, 1955)

$$\mu_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\delta_{\lambda_k} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \rho_{sc} \ p.s.$$

Vitesse de convergence ?

Théorème (Wigner, 1955)

$$\mu_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \delta_{\lambda_k} \xrightarrow[N\to\infty]{} \rho_{sc} \ p.s.$$

Vitesse de convergence ?

Définition (Distance de Wasserstein d'ordre 2)

$$W_2(\mu,\nu) = \left(\inf \int_{\mathbb{R}^2} |x-y|^2 \, d\pi(x,y) \right)^{1/2},$$

où l'infimum est pris sur toutes les mesures de probabilité π sur $\mathbb{R}^2$ de marginales μ et ν.

Borne sur $\mathbb{E}\left[W_2(\mu_N, \rho_{sc})\right]$?

Proposition

Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que

$$W_2^2(\mu_N, \rho_{sc}) \leqslant \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} (\lambda_j - \gamma_j)^2 + \frac{C}{N^2} \ p.s.$$

Proposition

Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que

$$W_2^2(\mu_N, \rho_{sc}) \leqslant \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} (\lambda_j - \gamma_j)^2 + \frac{C}{N^2} \ p.s.$$

Corollaire

Il existe une constante universelle $C > 0$ telle que, pour tout $N \geqslant 2$,

$$\mathbb{E}\left[W_2^2(\mu_N, \rho_{sc})\right] \leqslant C \frac{\log N}{N^2}.$$

Merci pour votre attention !