Modèles probabilistes de feux de forêt

Alice Stahl

Institut de Mathématiques de Toulouse

Colloque JPS, 16-20 avril 2012, CIRM

1. Le modèle
   - Présentation
   - Questions d'existence et d'unicité
2. Mesure invariante
   - sur $\mathbb{Z}$
   - sur $\mathbb{Z}^d, d \geq 2$
3. Vers un processus limite

Les modèles

	Modèle physique	
Espace	discret et fini $[\![-n, n]\!]^d$	
Temps	discret : $\mathbb{N}$	
Etats possibles	3 : $\begin{cases} \text{arbre vert} \\ \text{arbre en feu} \\ \text{vide} \end{cases}$	
Evolution	$\star$ pas à pas $\rightsquigarrow$ probabilités de transition	

Les modèles

	Modèle physique	**Modèle mathématique**
Espace	discret et fini $[\![-n, n]\!]^d$	discret et infini $\mathbb{Z}^d$
Temps	discret : $\mathbb{N}$	continu : $\mathbb{R}^+$
Etats possibles	$3 : \begin{cases} \text{arbre vert} \\ \text{arbre en feu} \\ \text{vide} \end{cases}$	$2 : \begin{cases} \text{occupé} \\ \text{vide} \end{cases}$
Evolution	$\star$ pas à pas $\rightsquigarrow$ probabilités de transition	$\star$ processus de Poisson de naissance et de mort $\rightsquigarrow$ règles d'évolution

Définition du processus de feux de forêt

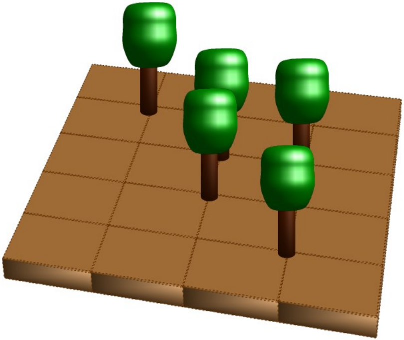
Processus de feux de forêt $(\overline{\eta}_t)_{t\geq 0}$ sur G de paramètre $\lambda > 0$

$G = (V, E)$: graphe dont le degré de sommet est borné par d.
$\forall t \geq 0$, $\overline{\eta}_t = (\eta_{t,x}, G_{t,x}, I_{t,x})_{x\in V} \ \in (\{0,1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N})^V$

1. **configuration** : $(\eta(t))_{t\geq 0} = \{\eta_{t,x}\}_{t\geq 0, x\in V}$
   $\rightsquigarrow \eta_{t,x} = \begin{cases} 0 & \text{site x vide en t} \\ 1 & \text{site x occupé en t} \end{cases}$
2. **naissance** : $(G_{t,x})_{t\geq 0}$: processus de Poisson de paramètre 1
   foudre : $(I_{t,x})_{t\geq 0}$: processus de Poisson de paramètre λ
   $\hookrightarrow$ tous indépendants
3. 4 règles d'évolution
4. régularité :
   - processus càdlàg
   - à accroissements stationnaires

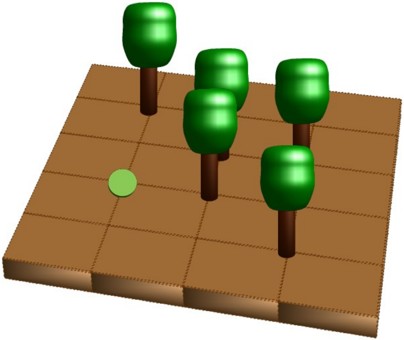
Etude de l'évolution de la configuration

Configuration initiale



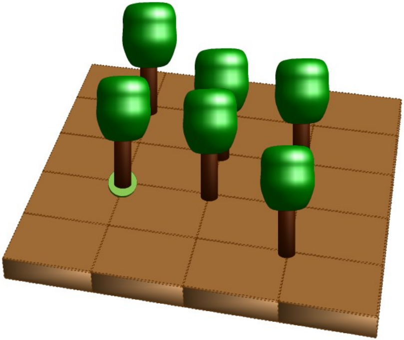
Etude de l'évolution de la configuration

Processus de naissance : site vide



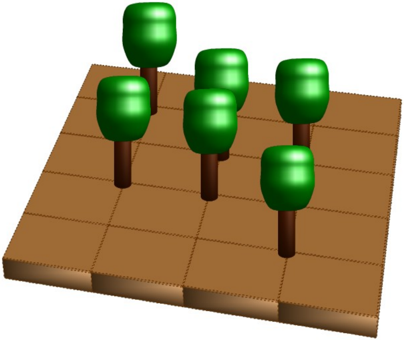
Etude de l'évolution de la configuration

Processus de naissance : site vide



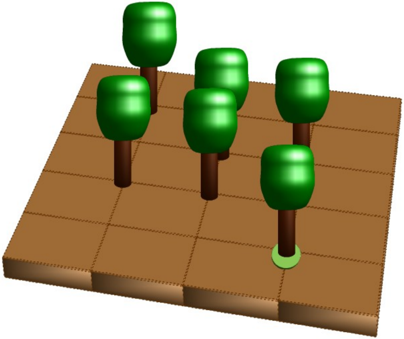
Etude de l'évolution de la configuration

Processus de naissance : site vide



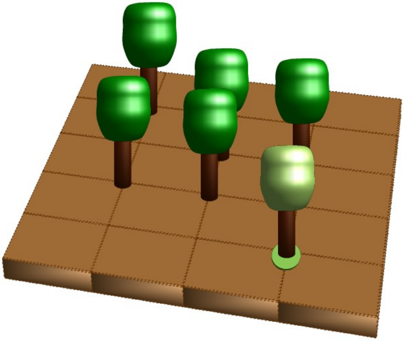
Etude de l'évolution de la configuration

Processus de naissance : site occupé



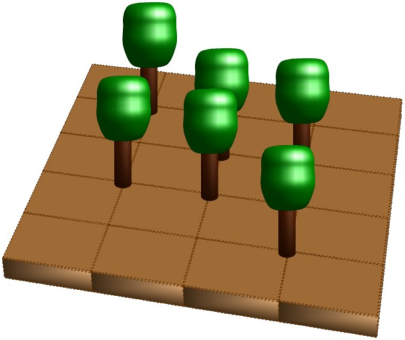
Etude de l'évolution de la configuration

Processus de naissance : site occupé



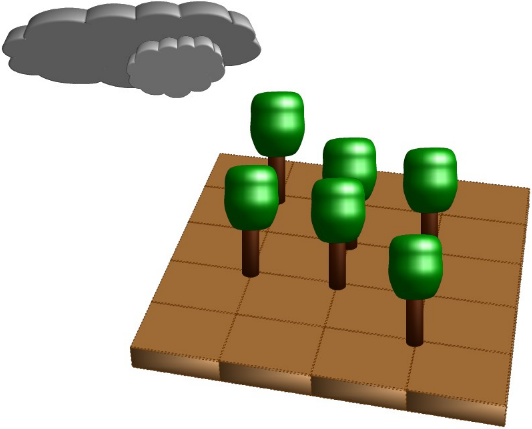
Etude de l'évolution de la configuration

Processus de naissance : site occupé



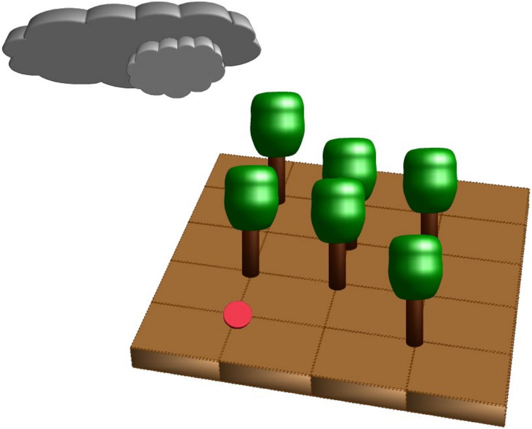
Etude de l'évolution de la configuration

Processus de foudre



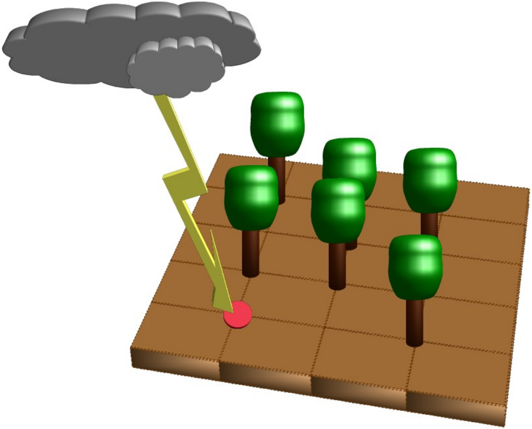
Etude de l'évolution de la configuration

Processus de foudre : site vide



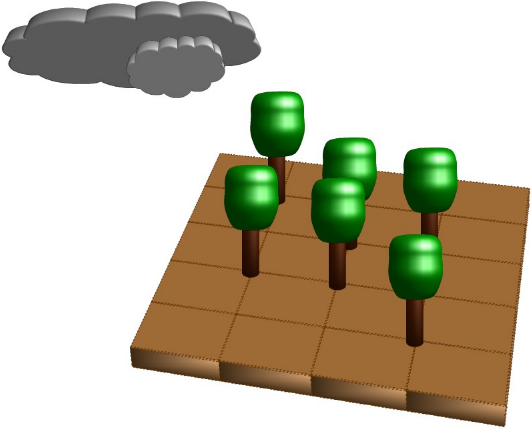
Etude de l'évolution de la configuration

Processus de foudre : site vide



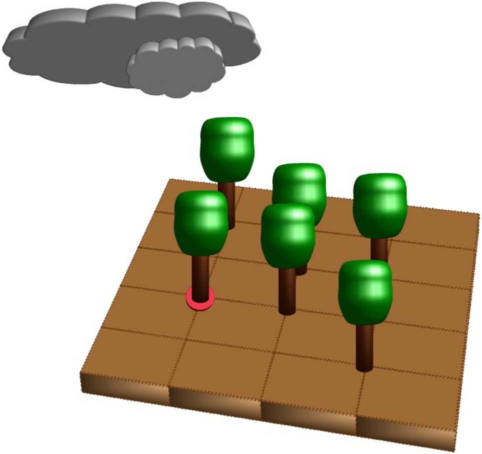
Etude de l'évolution de la configuration

Processus de foudre : site vide



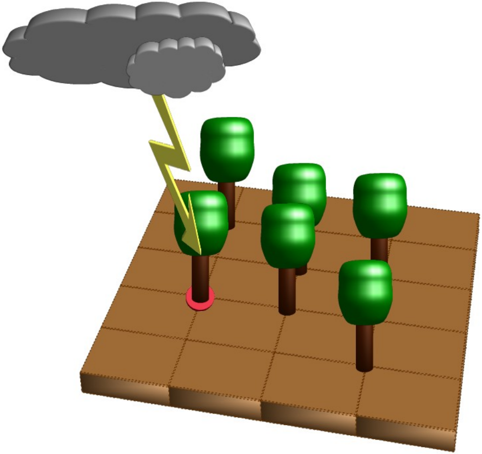
Etude de l'évolution de la configuration

Processus de foudre : site occupé



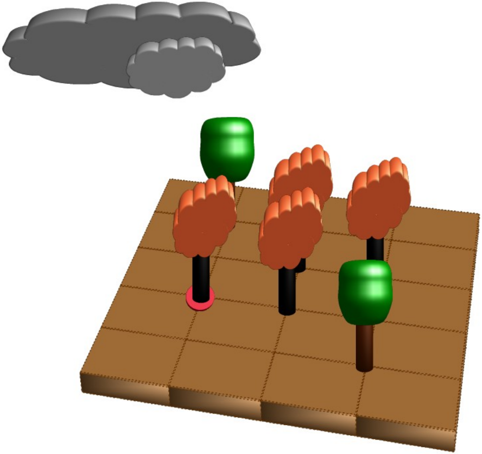
Etude de l'évolution de la configuration

Processus de foudre : site occupé



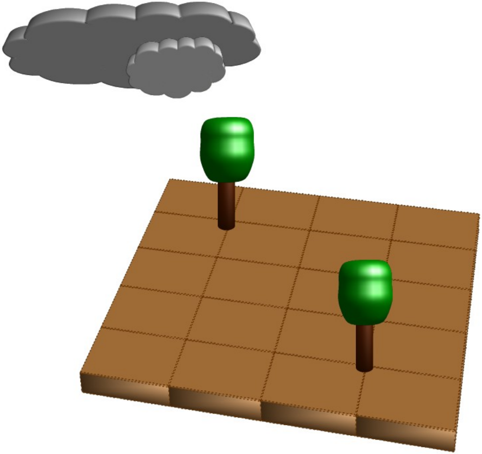
Etude de l'évolution de la configuration

Processus de foudre : site occupé

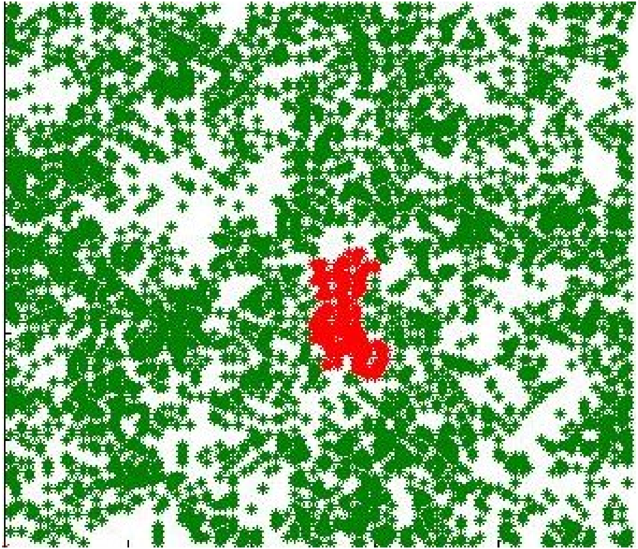


Etude de l'évolution de la configuration

Processus de foudre : site occupé



Simulations



Existence du processus

Existence du processus

▷ Problème : infinité d'évènements poissoniens sur $[0, t]$

Théorème d'existence

Pour tout $\lambda > 0$ et pour toute configuration initiale "sympathique", le processus de feux de forêt défini précédemment existe.

- **En dimension 1** : construction graphique

Existence du processus

▷ Problème : infinité d'évènements poissoniens sur $[0, t]$

Théorème d'existence

Pour tout $\lambda > 0$ et pour toute configuration initiale "sympathique", le processus de feux de forêt défini précédemment existe.

- **En dimension 1** : construction graphique
- **En dimension** $d \geq 2$:
  difficulté = contournement des sites vides
  1. Preuve [Dürre, '06] : processus sur des boîtes finies
  2. Sous résultats importants :
     $\rightarrow$ ps il n'existe pas de composantes connexes infinies
     $\rightarrow$ ps la limite à gauche d'une composante connexe est finie

Unicité du processus

Théorème d'unicité

Pour tout $\lambda > 0$ et pour toute configuration initiale "sympathique", le processus de feux de forêt défini précédemment est unique.

- **En dimension 1** : construction graphique
- **En dimension** $d \geq 2$:
  1. $\forall\ \lambda > \lambda_d = \frac{1-p_c^d}{p_c^d}$ [Dürre '06]
     $\hookrightarrow$ percolation sous-critique
  2. $\forall\ \lambda > 0$ [Dürre '09]
     $\hookrightarrow$ étude de l'influence de l'infini

1. Le modèle
   - Présentation
   - Questions d'existence et d'unicité

2. Mesure invariante
   - sur $\mathbb{Z}$
   - sur $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$

3. Vers un processus limite

Mesure invariante en dimension 1

▷ **Premiers résultats** : [Berg et Jarai, '05] : densité de sites vides et taille des composantes connexes à l'équilibre.

Théorème d'existence [Brouwer et Pennanen, '06]

Pour tout paramètre $\lambda > 0$, il existe au moins une mesure invariante.

Mesure invariante en dimension 1

▷ **Premiers résultats** : [Berg et Jarai, '05] : densité de sites vides et taille des composantes connexes à l'équilibre.

Théorème d'existence [Brouwer et Pennanen, '06]

Pour tout paramètre $\lambda > 0$, il existe au moins une mesure invariante.

Théorème d'unicité [Bressaud et Fournier, '09]

Lorsque $\lambda = 1$, il existe une unique mesure invariante.

Résultat d'existence

Théorème d'existence

Pour tout paramètre $\lambda > 0$, il existe au moins une mesure invariante.

Idée de démonstration :

⋆ Processus sur une boite finie de rayon n
= chaîne de Markov à espace d'états fini, irréductible, récurrente, apériodique $\Rightarrow$ unique mesure invariante

⋆ Mesure candidate = limite faible d'une sous suite de ces mesures

1. Le modèle
   - Présentation
   - Questions d'existence et d'unicité

2. Mesure invariante
   - sur $\mathbb{Z}$
   - sur $\mathbb{Z}^d, d \geq 2$

3. Vers un processus limite

Présentation du problème

Objectif : faire tendre λ vers 0 et trouver un processus limite
$\hookrightarrow$ on ne sait pas s'il existe !

- $\star$ Que se passe-t-il ?
  - Percolation sur-critique : composante connexe infinie
  - Modèle de feux de forêt : composantes connexes finies ps

- $\star$ Première étape : trouver une nouvelle échelle temps/espace
  $\hookrightarrow$ taille d'une composante connexe "typique" ?

Processus limite en dimension 1

Théorème [Bressaud et Fournier, '10]

Lorsque λ tend vers 0, le processus de feux de forêt de paramètre λ et de configuration initiale vide converge en loi vers un processus limite uniquement défini.

1. changement d'échelle :
   - accélération du temps par $\log(\frac{1}{\lambda})$
   - réduction de l'espace par $\lambda \log(\frac{1}{\lambda})$
2. description du processus limite sur $\mathbb{R}$ via les composantes connexes

Processus limite sur les arbres binaires

Modification : on se place sur un arbre binaire

- $+$: indépendance entre les branches, calculs plus faciles
- $-$: problème de la racine, taille frontière/intérieur d'une boule

Modèle avec feux modifié : $\rightsquigarrow$ "équilibre"

- hypothèse : loi des cc dans le bassin d'une loi strictement $\frac{1}{2}$-stable notée $\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}$
- taille de la cc de l'origine quand elle meurt ?

$$\frac{\lambda^2}{4}|\mathcal{C}^b| \xrightarrow[\lambda\to 0]{d} Exp(1)^2\mathcal{G}_{\frac{1}{2}}.$$

Conclusion

Perspectives :

- Existence/unicité du processus pour toute configuration initiale ?
- Unicité de la mesure invariante ?
- Processus limite :
  vrai processus sur l'arbre binaire
  retour à l'étude sur $\mathbb{Z}^d, d \geq 2$

Merci pour votre attention !